ВЕЧІРНІЙ ПІДРУЧНИК ІЗ МАТЕМАТИКИ

Юхан Ару • Крiст'ян Кор'юс • Еліс Саар

ВЕЧІРНІЙ ПІДРУЧНИК
ІЗ МАТЕМАТИКИ

ВЕЧІРНІЙ ПІДРУЧНИК
ІЗ МАТЕМАТИКИ

ВЕЧІРНІЙ ПІДРУЧНИК ІЗ МАТЕМАТИКИ

Видання пʼяте, виправлене

Редактор: Хеле Кіісель
Ілюстрації та графіка: Еліс Саар
Коректор: Маріс Макко
Дизайнер: Янек Саареоя

ISBN 978-9949-489-95-4 (друковане видання)
ISBN 978-9949-489-96-1 (epub)

ЗМІСТ

ПРИВІТ, ЧИТАЧУ!

У нас є надія, що «Вечірній підручник» стане вам прекрасним супутником на шляху знайомства з математикою. Щоб зробити це знайомство простішим, пропонуємо вам також невеликий огляд вашого майбутнього супутника. Почнемо з трьох запитань.

Чи призначений «Вечірній підручник» для мене, і для кого він узагалі призначений?

Чому ми вирішили написати «Вечірній підручник» та як він був виданий?

Що можна знайти у «Вечірньому підручнику» та як його читати?

Кожне запитання також дає вам можливість подружитися з одним із авторів.

Далі ми представимо вам усіх тих інших, без яких ця книга точно не з'явилася б у тому вигляді, в якому ви її бачите зараз. А після цього всього вам не залишиться нічого іншого, як просто почати читати! А якщо у вас виникнуть які-небудь запитання, пропозиції чи роздуми, обов'язково напишіть нам.

Чи призначений «Вечірній підручник» для мене, і для кого він узагалі призначений?

На це запитання відповідає Еліс.

«Вечірній підручник з математики» є ідеальним супутником для всіх тих, кому шкільні уроки з математики час від часу здаються сухими та одноманітними. Я вірю, що наш читач – без сумніву – людина допитлива, для якої недостатньо панічного зазубрювання формул безпосередньо перед контрольною роботою, а яка хоче зрозуміти та вміти виводити їх самостійно. Проте, цей підручник не лише для школярів – він також призначений і для охочих до знань, які відчувають, що математика якимось чином від них віддалилася, і які бажають відкрити для себе що-небудь нове та захоплююче.

Отже, неважливо, чи ви – учень, який готується до старших класів середньої школи, чи збитий із пантелику на уроках математики гімназист, абітурієнт, перед яким маячить іспит з математики, дорослий, який школу давно закінчив, але хоче закріпити свої минулі знання, або вчитель у пошуках додаткових матеріалів уроків – ми пропонуємо вам здійснити невелику подорож основними математичними темами старшої школи, розглядаючи їх у трохи барвистішій перспективі. Ми сподіваємось показати математику корисною та захоплюючою – якщо з якоїсь причини ви її ще такою не бачили , тоді ви точно в потрібному місці!

Чому ми вирішили написати «Вечірній підручник», та як він був виданий?

У Крістʼяна є на це гарна відповідь.

Ідея книжки виникла навесні 2010 року, коли ми з Юханом дивувалися зі свіжо затвердженого навчального плану з математики. Оскільки до навчальної програми були додані нові теми, але подекуди кількість шкільних годин навіть зменшилася, то виникло побоювання, що і без того недброзичливе ставлення учнів до математики може ще більше погіршитися. Нам математика дуже подобається, і оскільки, ми самі її в різних місцях вивчали, викладали і – що може бути навіть важливішим – також застосовували на практиці, то ми вирішили, що можемо доповнити попередні підручники дещо іншим підходом. Для того щоб інший підхід реалізувати, до нашого плану долучилася також художниця Еліс, яка привнесла свої ідеї щодо ілюстрації математичних міркувань, та зробила можливим чудове поєднання тексту із зображенням.

Написання книги виявилося більш захоплюючим і складним, ніж ми вважали на початку, і на завершення рукопису пішло цілих три роки. На підтвердження дещо іншого підходу, видавання книжки також вирішилося у дуже сучасний спосіб: до її виходу, ми отримали початкове фінансування через краудфандингову платформу під назвою «Hooandja», що дозволило нам викласти книгу у вільний доступ в Інтернеті. Це означає, що ви можете сміливо змінювати та використовувати наші тексти, але заробляти на них гроші, все-таки, не дозволено. Таким чином, нашої мети – створити нову, іншого роду книгу для кращого розуміння математики – було досягнуто навіть більш багатосторонньо, ніж ми спочатку планували.

Що можна знайти у «Вечірньому підручнику» та як його читати?

Терпіння, пояснення Юхана буде дещо розлогішим.

Ідея «Вечірнього підручника» полягала в тому, щоб зібрати всю шкільну математику всередину однієї палітурки, однак роблячи це веселіше і життєвіше, ніж це можливо на короткому шкільному уроці. Таким чином, ми принаймні побіжно розібрали всі теми, що попадаються в школі, а також деякі інші, які нам самим із ними асоціювалися.

«Вечірній підручник» був написаний і оформлений із радістю, і саме так його слід і читати. З одного боку, ми зробили все від нас можливе, щоб книгу було необовʼязково читати від початку до кінця, щоб її можна було читати частинами.

Проте, з іншого боку, ми упорядкували частини та розділи в такому порядку, в якому нам самим хотілися б прочитати книгу від початку до кінця.

Деякі розділи вийшли нуднішими, ніж нам би того бажалося; деякі – довшими, ніж планувалося; деякі – складнішими, ніж хотілося: ви й самі це помітите! Однак, під час першого прочитання, ви можете пропускати розділи та частини з зірочкою. Іноді, там розповідається про щось трохи більш складне або більш віддалене від шкільної програми, іноді – просто про щось менш актуальне. Нижче наводимо також зміст:

У частині 0 ми говоримо про те, як ми про математику міркуємо та обговорюємо, чому вивчати математику необхідно, і чому це вивчення часом здається таким важким. В кінці розділу найбільші спонсори книги, зі свого боку, діляться власним натхненням для вивчення математики та читання «Вечірнього підручника».

Сповнившись натхнення, переходимо до частини 1. Частина 1 точно не є найцікавішою частиною книжки. Тут ми маємо справу з математичним письмом та основними поняттями – змінною, рівнянням, множиною, функцією. Разом із тим, ці поняття важливі для розуміння решти книги, тому рекомендуємо вам уважно прочитати цей розділ, навіть якщо при цьому трохи хочеться позіхати. Ми віримо, що в цій частині, попри все, так само таїться щось для вас нове.

Далі йдуть числа і частина 2. Числа є ключовими для цілої математики і, фактично, для цілого життя. У частині 2 ми даємо короткий огляд того, як протягом віків змінилося саме поняття чисел, і від додатних цілих чисел $1, 2, 3$ … ми доходимо, врешті-решт, до уявного числа i й до відомих чисел e та π. Далі ми поговоримо, як за допомогою поняття степеня числа зробити множення більш економним, і як іноді можна підрахувати відстань між числами, що вимірюється модулем числа.

Частина 3 розповідає, яких друзів та родичів мають числа. Замість одного числа ми тепер вивчатимемо математичні об'єкти, що складаються з багатьох зібраних чисел. Почнемо з послідовностей, де ми просто викладатимемо числа у вервечку. Далі поговоримо про вектори, які, з одного боку, є просто парами чисел, трійками чисел і так далі, а з іншого – геометричними об'єктами: красивими стрілочками. Наприкінці, ми дійдемо до довгого додаткового розділу, де розповімо про таблиці чисел, тобто матриці, й про те, як розв'язувати з ними рівняння.

Далі поговоримо й про самі рівняння. У частині 4 ми пояснимо, як за допомогою рівнянь та чисел ставити життєво важливі запитання, а потім за допомогою деяких математичних трюків ці рівняння вирішувати, і на основі розв'язків робити висновки. Лише за крихітний крок від рівнянь знаходяться нерівності, які ґрунтуються на запитанні – що більше? – і які, як ми побачимо, допомагають добре спланувати обідній стіл.

Візуально, частина 5 є, мабуть, однією з найкрасивіших частин книги, але на жаль, при цьому також однією з найдовших і змістовно найбільш насичених. Ми розлого та ґрунтовно поговоримо про тригонометрію. Почнемо з трикутників, потім пограємося круговим рухом, далі подражнимо себе й читача тригонометричними перетвореннями, і нарешті, завершимо додатковим розділом, що розповість, як дивитися на все на світі з точки зору коливань.

У наступному розділі ми повернемося до трохи простіших, але аж ніяк не менш важливих функцій. Частина 6 почнеться з розповіді про многочлени, або такі функції, як квадратична та кубічна. Многочлени є настільки гнучкими, що насправді, вони дають змогу розібратися майже зі всією математикою. Однак, легше взяти на озброєння показникову та логарифмічну функції. Перша допомагає описувати поділ бактерій, а друга допомагала астрономам виконувати астрономічні обчислення ще сотні років тому.

Однак, насправді, функцій існує набагато більше, і їх приємно якимось чином описувати та перетворювати. У частині 7 ми сфокусуємося на цих питаннях. Почнемо з досить дивного, на перший погляд, математичного поняття – границі функції. У певному сенсі, граничне значення дає нам спосіб строго говорити про безкінечно велику і безкінечно малу величини. На ній ґрунтується також частина трьох наступних розділів – неперервність, похідна та інтеграл. Як можна зрозуміти вже з самих слів, тут розмова буде досить технічною. Напевно, доведеться прочитати цей розділ кілька разів. І все ж, не варто лякатися, бо майже про всі ці складні поняття можна також міркувати геометрично: неперервність означає, що графік функції не має розривів; похідна характеризує швидкість підвищення або пониження графіка функції; інтеграл вираховує площу фігури, верхньою стороною якої є графік функції.

На площах та об'ємах ми ще детальніше зупинимося в частині 8. Повернемося до більш простих запитань та поговоримо про те, що взагалі означає слово «вимірювання» та звідки походить багато формул площ та об'ємів, які зустрічаються в школі. Певною мірою, у цій главі ми відмовляємося від суворості, тому що в деяких місцях інтуїція є помітно важливішою та красивішою, ніж технічні деталі. Але те, що при цьому інтуїції, тим не менш, не завжди можна довіряти, вже незабаром покаже сніжинка Коха. Це – шматочок математичної цікавинки, перш ніж ми приступимо до досить монотонних розрахунків. У коротких розділах про перестановки, комбінації та варіації багато цікавого не знайдеш. І все ж таки, якщо ви добре в них розберетеся, то вечірні посиденьки з друзями за грою в карти можуть і справді стати більш захоплюючими.

Книгу завершує частина про ймовірність, частина 9. Дев'ята симфонія для багатьох композиторів стала не лише останньою, але, мабуть, виявилася однією з найважливіших, наприклад, для Бетховена, Брукнера, Шуберта. Ми не можемо стверджувати, що частину 9 треба тепер вважати найважливішою частиною, але водночас, ймовірнісний спосіб мислення знаходить все більше і більше застосування при описі життя навколо. Основою теорії ймовірності є той факт, що все на світі точно передбачити неможливо. Проте, ми часто можемо визначити, що точно може трапитися, і вкласти в числа свої очікування, наскільки вірогідним є, все-таки, той чи інший сценарій. У частині 9 ми обговорюємо за допомогою однієї казочки, чому не все так просто, і як завершальний акорд книги, намагатимемося схвилювати й заплутати читача різними прикладами.

ВЕЛИКЕ-ПРЕВЕЛИКЕ СПАСИБІ!

Ми хотіли б подякувати багатьом. Почнемо з тих двох, які (крім нас самих!) повністю перечитали книжку ще перед тим, як її було надіслано до видавництва: нашого редактора контенту Хеле Кіісель та друга-волонтера Райнера Кюнґаса. Коментарі та побажання їх обох допомогли сформувати як загальний вигляд книги, так і її деталі.

На щастя для нас, ми також мали велику кількість друзів, які зуміли допомогти нам із різними проблемами – Каріта Хоммік допомогла нам зі шкільною термінологією та позначеннями, до Міхеля Крее ми зверталися з усіма дурнуватими питаннями, що стосувалися фізики, Кає Куб'яс написала оригінальну версію лінійної оптимізації, у Джона Маклуна ми знайшли натхнення для діалогу Гензеля і Ґретель у розділі 9, а Леопольда Партсі ми змусили прокоментувати кілька частин розділу про ймовірності,... поки, врешті-решт, не вирішили, натомість, на користь чогось легшого та веселішого.

Було також багато тих, хто прочитали книжку частково і допомогли нам знайти правильний тон та правильну думку. Ми хотіли б подякувати Яанові та Крісті Ару, завданням яких було прокоментувати деякі все ще досить чорнові версії; Лаурі Калдат, чия увага до деталей при прочитанні не мала рівних; Марґусу Нітсоод, який не лише прокоментував кілька частин книги, але й допоміг знайти для неї найкращого художника; і ще багатьом іншим, кого ми не встигнемо перерахувати. Дякуємо вам від щирого серця, навіть якщо ми не змогли згадати тут ваше ім'я!

Ми також досить рано захотіли отримати про нашу книгу відгук – і знову ж таки, це стало можливим завдяки Каріті Хоммік та її двом веселим учням з гімназії Поска. Дуже дякуємо, ми намагалися врахувати ваші коментарі у всіх відношеннях!

Ми також дякуємо академіку професору Юрію Енґельбрехту, який довіряв нам і написав теплого та заохочувального рекомендаційного листа ще до повного завершення роботи над книгою. І звичайно, ми також дякуємо видавцеві, який погодився взяти на себе клопоти з публікацією, незважаючи на те, що в Інтернеті до книги буде відкритий безоплатний доступ завдяки безкоштовній ліцензії.

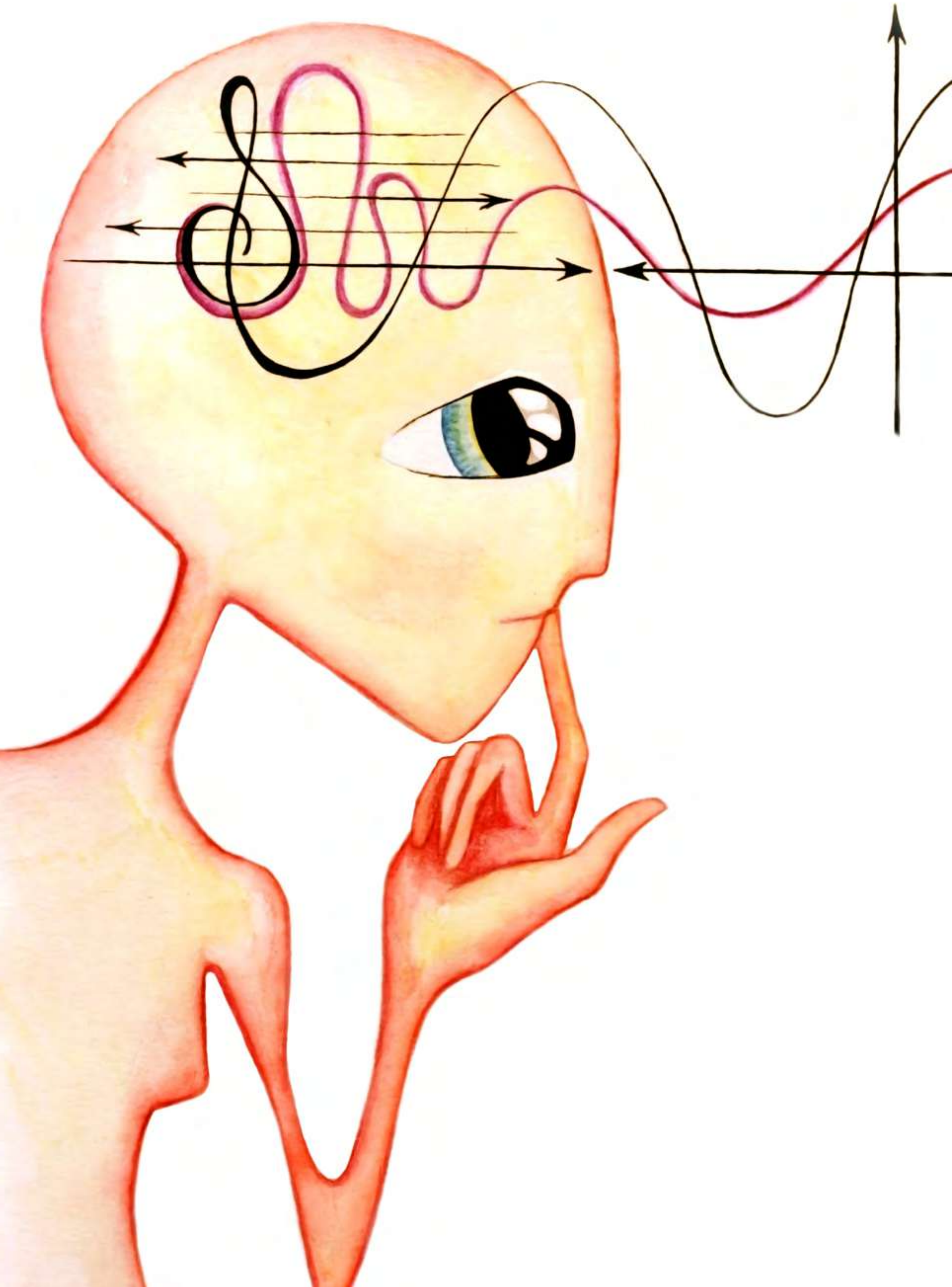
Нарешті, ми хотіли б подякувати порталу «Hooandja» та всім меценатам – завдяки вам, ця книга нарешті опублікується та отримає обкладинку, для нас важливою була не тільки ваша фінансова підтримка, але також те, що ви повірили у важливість та велич проєкту.

Дякуємо Вам,

Янар Аадлі, Вірґе Аас, Аннелі Аасаметс, Анне Аасаметс, Крісті Аасма, Генрік Авік, Айн Аавіксоо, Мадіс Абен, Прііт Адлер, Мікк Адлер, Райт Аґу, Кріст'ян Айт, Карен Аламетс, Каур Аласоо, Юрій Александров, Ейнар Алесєєв, Анне Алмет, Крістель Алтосаар, Пеетер Аніялґ, Теа Анімяґі, Лаурі Антон, Трііну Арак, Індрек Ардель, Тоомас Аріке, Крістель Арнік, Тііна Аро, Малле Аро, Яан Ару, Лілі Азін, Мярт Бакхофф, Анзорі Баркалая, Аллан Берґ, Сільвер Бохл, Вівіан Бохл, Карл-Ерік Боркман, Хелена Браун, Індрек Бремрауд, Хайді Кароліна, Реет Далберґ, Марґус Еха, Андрес Еренпрейс, Серен Ейльман, Еґон Ельбре, Каді Еплер, Юрґен Есінурм, Еркі Ескен, Сіім Еско, Ханно Евард, Керолін Фішер, Дмитро Габбасов, Борис Ґубайдулін, Мееліка Хайнсоо, Айвар Халапуу, Мартін Халлік, Ерко Хансар, Гаррі Ханшмідт, Райво Хейн, Єлена Хейн, Катрі Хейн, Прііт Хейнсалу, Каарі Гельштайн, Рейґо Хендріксон, Юулі Хііо, Каріта Хоммік, Хеді Хооматалу, Марі Хунт, Йорма Хярмсалу, Хейкі Іліссон, Стен Ільм'ярв, Маая Іваск, Марі-Лііс Яансалу, Маріанна Яансон, Вероніка Яансоо, Леель Яер-Еер, Яан Яґомяґі, Хелена Єрет-Мяе, Прііт Йоонас, Індрек Юхані, Ханнес Юкк, Вагур Йиесалу, Мартін Йиґева, Лііле Йиґі, Майрі Йиґі, Аґур Йиґі, Юрген Янес, Тіія Ярве, Мар'ялеена Яаґер, Клен Яаратс, Прііт Юрґенсон, Кріст'ян Юрісалу, Індрек Каарлип, Крісто Каарман, Кадрі Каарна, Хелле Каасік, Олівер Кадак, Яна Кадастік, Рендо Калаус, Лаура Калда, Кярді Калда, Лііс Калда, Кріст'ян Калдур, Рауль Кальво, Міхкель Кама, Лаур Канґер, Марґе Канне, Карін Капп, Сільва Касела, Арві Кассь, Індрек Каус, Ільмар Керм, Ренее Кермон, Андрес Керт, Кертту Кібберманн, Кяллі Кіік, Мартін Кііло, Хеле Кіісель, Яак Кікас, Юлле Кікас, Криит Кілвет, Кірке Кісанд, Андрес Кіттер, Кайко Ківі, Крісті Клаасмяґі, Кадрі Клаос, Айвар Кодумяе, Райво Колде, Анастасія Колде, Юніка Колґа, Рііво Колка, Анті Консап, Каспар Кор'юс, Пірет Кор'юс, Маркко Краусе, Карель Кравік, Тоомас Кріпс, Іво Крусток, Марі-Лііс Крууп, Іво Круусамяґі, Кає Куб'яс, Андрес Кукк, Кюллі Кукк, Мееліс Кулль, Іво Кунд, Кюллі Кунд, Мір'ям Кундла, Тіія Курель, Ханно Куус, Анні Куусік, Еліс Кийвумяґі, Сулев Кикс, Елвіс Килль, Мірко Кянд, Оскар Кярмас, Лаурі Кярнер, Емілія Кяспер, Райнер Кюнґас, Кадрі Кютт, Еве Лаасі, Альвар Лайґна, Ану Лаял, Ріво Лакс, Марґус Ламп, Йоганн Ланґеметс, Тааві Ларіонов, Рене Лассерон, Лехо Лауль, Генрі Лаупмаа, Теееле Лембер, Леннарт Леннук, Анна Леонтьєва, Хіллар Леосте, Делія Лепік, Керсті Лепінг, Тііт Лепп, Ерік Ліім, Аліїс Ліін, Олівер Ліів, Індрек Ліллемяґі, Мартін Ліллепуу, Пеетер Лінд, Ґерд Ліндмаа, Маттіас Ліннап, Тайво Лінтс, Пірет Лів, Едвард Льюлько, Мадіс Лоб'якас, Ерккі Лукк, Ріїна Лулла, Тааві Лулла, Танель Лумісте, Марґіт Лутс, Ева-Марі Лутс, Еркі Лихмус, Хеллі Лиоке, Прііт Лятт, Маріанн Маасі, Етел Маасінґ, Танел Мае, Мартті Майметс, Ілля Малютенко, Ева Марія, Крісті МаркнаМарі Мат’юс, Кюллі Меєр, Хело Мейґас, Неле Мейкар, Тауно Метсалу, Мадіс Метсіс, Роман Міґунов, Еґерт Мілдер, Епп Мітт, Прііт Моотсе, Маріанн Морґенрот, Олексій Морґунов, Марґе Муна, Юлле Муруметс, Піллеріін Мутсо, Прііт Мууґа, Алар Мяеранд, Іво Мяґі, Херкі Мялл, Март Мянд, Пілле-Тріін Мяннік, Ене-Лі Меннінг, Еркі Мянністе, Міхкель Мяртін, Мадіс Мюллер, Аймар Мююрсепп, Айвар Наабер, Маттіас Наан, Ґірті Нааріс, Кайса Ней, Гендрік Ніґул, Ґейлі Ніінеметс, Ріта Нііннесте, Марґус Ніітсоо, Юрій Ніколаєв, Йоосеп Норма, Каарел Нуммерт, Йоонас Нурк, Ану Нутт, Рауно Нуут, Еверт Нилв, Альвар Ниммік, Раймо Ойнус, Аґу Ойасоо, Тарві Олбрей, Анніка Опер, Каті Отепалу, Вельйо Отсасон, Пееп Отставель, Айта Оттсон, Кайдо Паабуск, Прііт Паап, Маркко Паас, Тріін Паавер, Яан Паавер, Маріс Пайсте, Ґеа Паюла, Сандер Паюсалу, Сільвер Паюсте, Ааре Палм, Прііт Палта, Тауно Палтс, Леопольд Партс, Юло Парве, Аріе Пассов, Яан-Еерік Паст, Маар’я Пееґель, Брвт Пеенсоо, Роберт Пеетсалу, Туулі Пент’ярв.ю Ааре Пере, Марі Пере, Хеді Петерсон, Кріст’ян Петерсон, Янне Піхельґас, Хейно Піхлап, Кріст’ян Піхус, Мортен Піібелехт, Тію Пірско, Пееп Пірсо, Райнер Плоом, Тріін Померантс, Крістііна Прааклі, Пілле Пруульман-Венґерфельд, Вагур Пуік, Тааві Пунґас, Тайво Пунґас, Мерле Пурре, Карл-Аксель Пуулманн, Андрес Пуутса, Пауль-Каспер Пильдмяе, Хейя Пяртель, Прііт Пяясукене, Расмус Рааґ, Тааві Райдма, Аларі Раянде, Рамон Рантсус, Лііса Рауд, Хелен Рауде, Евелін Раудсепп, Ееро Раун, Ліісі Ремеетс, Лії Рейктер, Тормі Рейнсон, Піія Рейсманн, Марґус Рекор, Мартті Реммельґас, Аґо-Ерік Ріет, Пілле Рінне, Марілін Рістіківі, Пілле Роальдсет, Лаурі Рооден, Пауль-Еерік Руммо, Ренате Рутіку, Сірет Рутіку, Юрій Руут, Тойво Ряім, Mr S, Лаур Саар, Елле Саар, Маріт Саар, Індрек Саар, Леннарт Сайдла, Прііт Салумаа, Сільві Салупере, Карл Салувеер, Вілья Салувеер, Тину Самуель, Стелла Сарапуу, Кріста Сарв, Мартін Саук, Індрек Саул, Влада Шоттер, Аннетте Шульц, Тоомас Швак, Вііре Сепп, Анелі Шміґельскіте, Янно Сіімар, Сір’є Сільд, Мееліс-Майт Сільдоя, Меліс-Мейт Сілдоя, Каллі Сілламаа, Інґвар Сінка, Кайрі Солманн, Міхкель Солвак, Сіім Сомелар, Мерлін Соооару, Сіґрід Сооман, Аллан Соон, Сілья Соон, Сіґн Сусі, Еркі Суур’яак, Марет Сууроя, Івар Заранс, Станіслав Зав’ялов, Дейві Таал, Анніка Таллінн, Андрес Тальтс, Керст Талвінґ, Рііво Талвісте, Ханнес Там’ярв, Пеетер Тамм, Піія Тамм, Гаррі Тамм, Рональд Таммепилд, Лаурі Таммісте, Ерік Тамре, Маре Таннберґ, Мар’ю Таннберґ, Сандер Танні, Людвіґ Тасане, Харді Тедер, Тауно Тедре, Кріста Тееару, Мікк Теелахк, Майт Теесалу, Тиніс Тельґа, Хассо Теппер, Анніка Теска, Тааві Тіірік, Анніка Тіна, Пеетер Тінітс, Марек Тоомінґ, Лаур Тоомінґ, Сіірі Тоомісте, Тиніс Тоотсен, Костянтин Третьяков, Ренее Трісберґ, Ельмо Тролла, Катрі Трую, Андрас Тсітскан, Леа Туй, Тааві Туйск, Тер’є Туйск, Андо Тулль, Тііна Турбан, Тоомас Тутт, Редік Туулінґ, Ено Тиніссон, Віллі Тинтсон, Кай Тятте, Ерле Тюүр, Мар’ю Унт, Аннелі Унт, Ееро Уустало, Марко Вахтель, Аво Вахтрамяе, Айґар Вайґу, Янар Вайк, Нееме Вайно, Трііну Вакманн, Кадрі Вакманн, Марет Валдісоо, Уку Варблане, Прііт Варе, Сігне Варенді, Танел Варі, Мадіс Вассер, Кріст'ян Вассіль, Кріст'ян Ведель, Марко Веельма, Кадрі Вейдер, Мартін Вельс, Ханно Вене, Кадрі Вескі, Кадрі Відер, Мікк Віідебаум, Ґерлі Віікмаа, Андрес Вільґота, Катрін Вілімаа, Олівер Вільямаа, Райнер Віллідо, Яак Віло, Тріін Вілтроп, Крісті Вінтер, Марі Вінтер, Вейко Віснапуу, Мартін Власов, Юрій Власов, Катрін Вунк, Хеліна Вирно, Тріін Вирно, Андрес Виса, Йорґан Виирманн, Таймі Вярва та Кадрі Иунап.

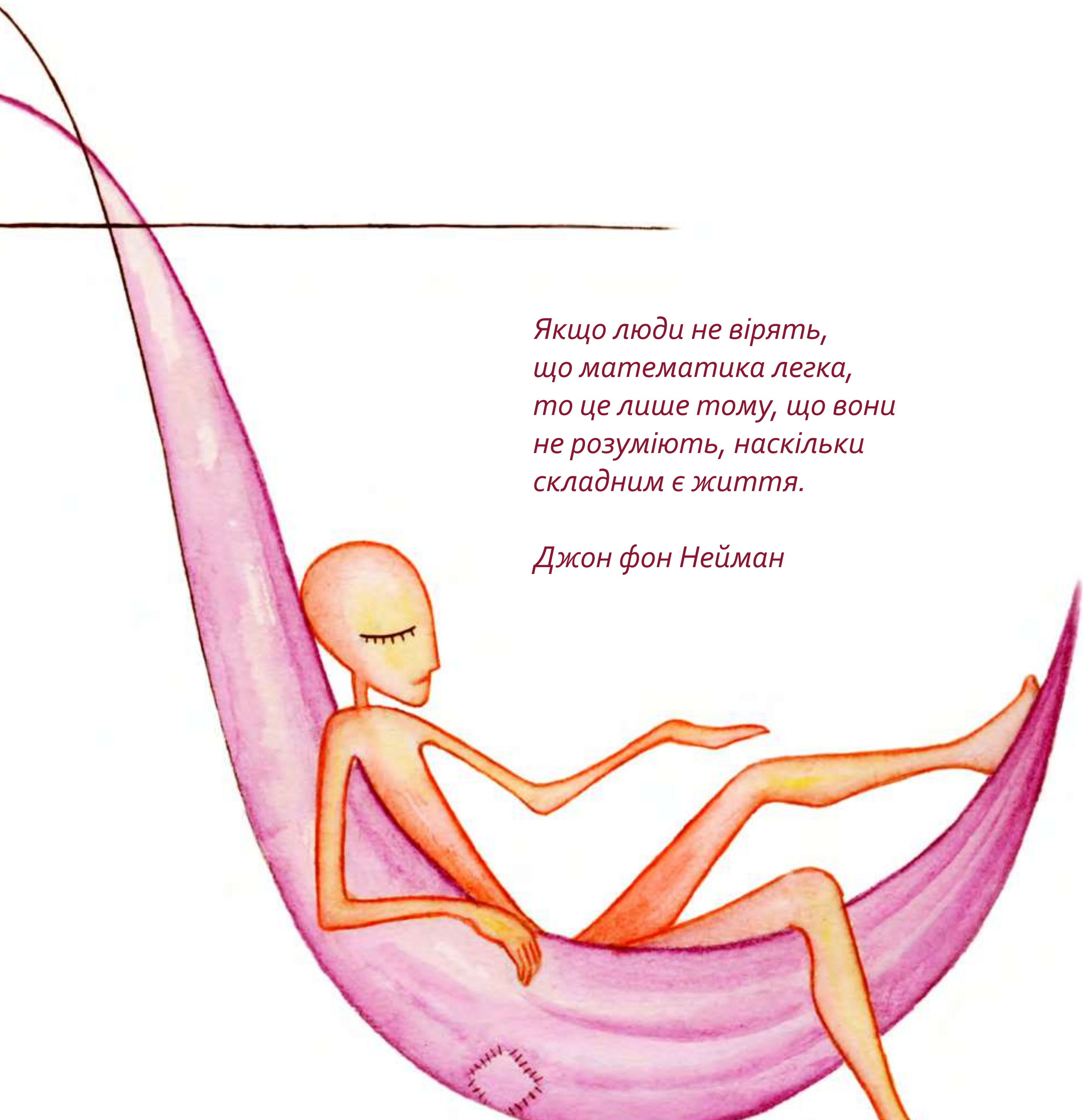
ЧАСТИНА 0 –

ВСТУП



*Якщо люди не вірять,
що математика легка,
то це лише тому, що вони
не розуміють, наскільки
складним є життя.*

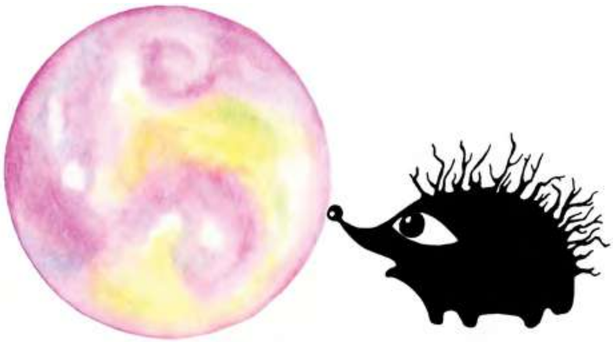
Джон фон Нейман



МАТЕМАТИКА НАВКОЛО НАС

Уявіть собі, що сидите в затишному кафе й дивитеся на міські вулиці. Кава куплена, розрахунки на касі зроблені, і здається, що з математикою на сьогодні вже покінчено.

Але потім ви помічаєте, що на вулиці веселе дівчатко надуває мильні бульбашки, і хоча вони майже завжди мають різний розмір, вони завжди однаково круглі. Чому мильні бульбашки круглі? Це вина дівчинки чи мильних бульбашок?



Ми вже маємо справу з веселим математичним запитанням із фізичним присмаком. Відповідь на нього – це і є суміш фізичних знань і математики: з уроків фізики ми це знаємо, що мильна плівка охоплює якомога більший об'єм; а математика доводить, що у випадку дії такого принципу, бульбашка повинна бути строго сферичною. У нашій книзі ми згадуватимемо подібну властивість кола – серед усіх плоских кривих даної довжини воно охоплює найбільшу площу [с. 97].

Ми також можемо побачити математику в кафе на екрані телевізора, де транслюється футбольний матч та саме дійшли до серії пенальті. Чи виберуть гравці кут, під яким вони битимуть м'ячем по воротах, за певним шаблоном? Чи потрібно почати пенальті в ролі нападника чи захисника? Вивчивши результати попередніх серій пенальті та відеоповтори, ми можемо знайти закономірності – цим займається математична статистика. Записавши закономірності, ми можемо використовувати їх для побудови найкращої стратегії – і з цим допоможуть імовірнісні описи [с. 392].

Навіть якщо врешті-решт вам вдалося втекти від математики в кафе, ви знову потрапите в її кігті біля першої ж клумби. Математика допомагає описати й пояснити, як виникають різні візерунки, і чому форми квіткових пуп'янків такі гарні.

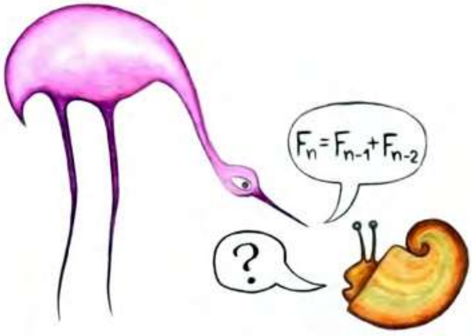
Наприклад, на суцвіттях певних сортів соняшнику розміщені 21 блакитна та 13 синіх спіралей. Це аж ніяк не випадкові числа, 21 і 13 – це числа Фібоначчі [с. 135], які часто з'являються в природі, і чиє виникнення ми також можемо пояснити.

Нарешті, коли ви починаєте ґуґлити ім'я та родину квітки за допомогою свого смартфона чи комп'ютера, то знову кличете на допомогу математику: принципи роботи пошукових систем спочатку були написані математичною мовою, а внутрішнє життя комп'ютерів базується лише на одиницях, нулях та обчисленнях з їх допомогою.

МАТЕМАТИКА ЯК МОВА

Деякі так і кажуть, що математика сама по собі – це мова. І справді, математика допомагає описати світ, як і будь-яка інша мова, і відтак, дає змогу спілкуватися між собою та обмінюватися інформацією.

Однак все-таки мова математики відрізняється від звичайних мов. Звичайна мова має майже для кожного предмета, що трапляється під руку, одне або пару слів. Звичайні мови сприймають та описують майже все, з чим ми стикаємось, але часто роблять це багатозначно. Наприклад, слово «м'яч» фактично може позначати як і круглий футбольний м'яч, так і овальний м'яч для американського футболу. Математика вирішила описувати менше, проте точніше – часто лише кілька малих деталей того чи іншого предмета. Водночас, ці описи є точними та недвозначними: ми б описали м'яч як сферу або еліпсоїд, залежно від його форми, і в кожного цих термінів є своє точне та однозначне математичне визначення [с. 44].



Оскільки математики використовують специфічні слова та терміни, іноді може скластися враження, що вони взагалі життям не переймаються, а їхні ідеї та підходи втратили будь-який зв'язок із повсякденністю. Це також одна з причин, чому математику так важко вчити [с. 30].

І все ж, абстрактність математичних понять не означає, що вони не можуть стати корисними одного дня. Іноді ми просто не вміємо побачити їх зв'язок з оточенням, і цей зв'язок може не показуватися століттями. Наприклад, комплексні числа [с. 89], які колись вважали дивакуватим безумством математиків, відіграють сьогодні важливу роль в описі світу в найдрібнішому масштабі – з їх допомогою добре описувати поведінку найдрібніших частинок. Насамкінець, хоча деякі частини абстрактної математики й до сьогодні вважаються досить непотрібними, ми можемо підтвердити, що вся шкільна математика, представлена в цій книзі, є все ж життєво важливою та просто незамінним інструментом для опису та розуміння світу!

МАТЕМАТИКА ЗМІНЮЄТЬСЯ ТА РОЗВИВАЄТЬСЯ

Але математика – це не лише мова, математика сама досліджує, змінює й розвиває цю ж саму мову, якою вона себе виражає. Математичні поняття змінюються, і в їх зміні також таїться значна частина математики. Навіть те, як думають про числа, змінилося – колись давно знали лише числа $1, 2, 3, \ldots$, тоді виявили, що $\frac{1}{2}$ є також досить зрозумілим числом, і лише нещодавно було погоджено, що -1 також є числом і навіть число $\sqrt{-1}$, яке не лежить на дійсній осі, нічим не гірше підходить під загальне визначення числа [с. 78].

Може виникнути питання: як може змінитися поняття числа? Це необхідно для того, щоб забезпечити однозначність і зрозумілість математичної мови. А ще, поглянувши з іншого боку, математики зрозуміли, що робити обчислення – додавати і віднімати, множити й ділити – можна не тільки з числами $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, але і з набагато складнішими об'єктами. Це показує, наскільки насправді поняття чисел є відносним – чи називати нам числами все, з чим ми можемо робити обчислення, чи мусимо називати числами лише ті об'єкти, що складаються з цифр? Але про розвиток чисел ви можете більше прочитати в розділі про числа [с. 78].

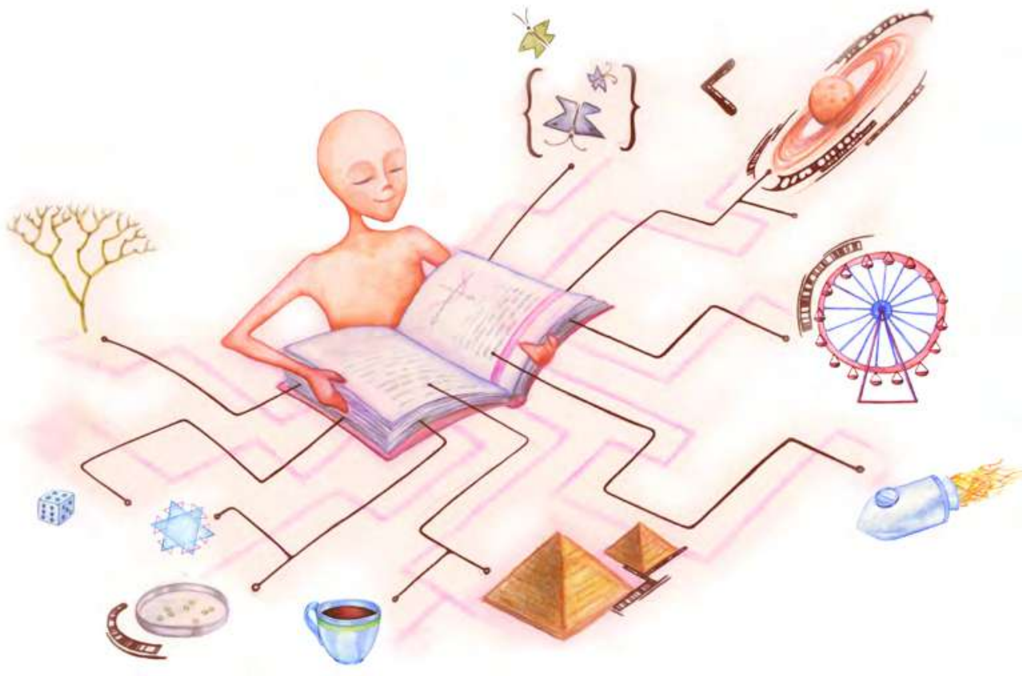
ЩО ТАКЕ МАТЕМАТИКА?

Математика – це приємне поєднання строгості та свободи. Зрозуміло, що мається на увазі під тими чи іншими об'єктами, і дано точні правила гри з ними, утім водночас, опис і правила, що стосуються одних і тих самих об'єктів, можна завжди змінити. Особливо доречно це робити, якщо вони призводять до більшої кількості зв'язків, більшої простоти, більшої краси та більшого розуміння.

Однак читача може все ще переслідувати виправдане запитання: чи відповіли ми, що таке математика? Ні, не відповіли.

Наскільки складно сказати, що таке щастя, чи, що таке мудрість, так само складно і сказати, що таке математика. Ідеться про дуже багатогранне й широке поняття. Дуже дивно, але сама математика характеризується тим, що має справу з об'єктами, у випадку яких на питання «що це таке?» можна дати дуже точну відповідь.

Врешті-решт, математика вчить, що в нас також є достатньо свободи у визначенні чого-небудь. Напевно, не буде нічого поганого в тому, якщо у всіх буде трохи різне розуміння математики. Ми сподіваємось, що цей підручник допоможе читачеві знайти своє власне розуміння.



НАВІЩО ВЧИТИ МАТЕМАТИКУ?

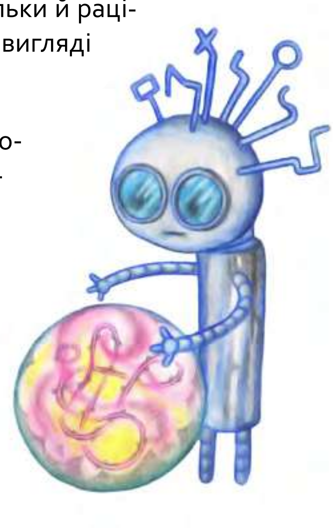
Хорошу гру визначають три риси: вона багатостороння, вона розвиває і дає змогу чомусь навчитися. Іноді про математику також говорять як про гру. І хоча погоджуватися із цим не дуже б то хотілося: з математики набагато більше користі, ніж із деяких ігор, принаймні, усі ці три риси, в усіх відношеннях, вона має.

МАТЕМАТИКА БАГАТОСТОРОННЯ

Математика таїть у собі різні й часто просто-таки полярно протилежні сторони.

У математиці можна знайти точність, строгість і надійність. Щойно ви знайдете одне математично правильне пояснення чи зв'язок, воно залишиться правильним – не те, що кімната, яку прибираєш і прибираєш, а вона знову і знову стає брудною. Отже, кожна людина, яка вивчає математику, будує міцну основу для своїх знань.

Однак монотонне укладання фундаменту буде, безумовно, дратувати. Потрібні також сюрпризи та несподіванки. У математиці це місце порожнім не залишилося – наприклад, виявляється, що на додачу до вже відомих нам фігур, таких як квадрати, кола, трикутники, є такі також фігури, периметр яких безкінечний, однак площа скінченна [с. 377]. Або виявляється, наприклад, що, якщо в приміщенні знаходиться більше 23 людей, то ймовірність того, що двоє з них матимуть день народження в той самий день, більш ніж $50\ \%$ [с. 407]. Або що існує точно така ж кількість натуральних чисел $1, 2, 3, \ldots$, скільки й раціональних чисел, тобто чисел, які можна представити у вигляді звичайного дробу, наприклад, $\frac{3}{4}$ чи $\frac{39}{2}$ і так далі.



Але багатьом подобається творчість, подобається свобода. Це, можливо, навряд чи помітно на початку в математиці – де серед усього цього порядку й точності знайдеться місце для свободи? Але так само, як і у випадку з сонетом чи хайку, точність форми математичного мислення не обмежує творчості. Важливою частиною математики є створення нових зв'язків, нових способів мислення, нових об'єктів. Хіба ж не чудово усвідомлювати, що ми можемо думати про геометрію – форму і кривизну тіл – не тільки в трьох вимірах, а й у двадцятьох, тридцятьох чи навіть у тисячах вимірів? Як може виглядати тридцятивимірна сфера? Спробуйте уявити! Ми, наприклад, не зуміли ...

МАТЕМАТИКА РОЗВИВАЄ МИСЛЕННЯ

Якщо хочеш стати юристом, математика в цьому допоможе. Вибудувати свої аргументи найзрозумілішим чином – якими довгими вони б не були – і найспритніше розгромити аргументи інших – якими б мудрими вони не були – навчить, очевидно, математика. Для математичної дискусії завжди необхідні точні припущення, точні міркування і точні висновки – розсіяні аргументи не спрацюють. Припустимо, прокурор вважає, що поповнення банківського рахунку обвинуваченого та певні крадіжки, вчинені в місті, збігаються в часі. Чи можна це використовувати як доказ проти обвинуваченого? Наприклад, зрозуміло ж, що якщо продажі морозива та сонячного світла співвідносяться в часі, то з цього ще не випливає, що покупка морозива принесе сонячне світло. Що ще нам потрібно знати?

Якщо хочеш стати лікарем, математика – обов'язкова. Статистика допоможе зрозуміти, коли рекламні гасла фармацевтичних компаній мають реальний сенс [с. 398], і що все-таки означає, коли той чи інший ген у ДНК збільшує ризик захворювання.

Якщо хочеш стати архітектором, то з математикою також так просто не розпрощаєшся. Математика вчить строго записувати пропорції та відношення. З такою ж строгістю працюють і всі програми для побудови архітектурних моделей, які іноді хочуть, щоб архітектор також умів описувати їх особливості математично, використовуючи рівняння. Архітектор повинен вміти обчислювати розміри приміщень та поверхонь, повинен знати, як знайти несучу здатність тієї чи іншої балки.

Якщо хочеш стати поетом, математика, знову ж таки, не зашкодить. Французький поет Поль Валері, наприклад, любив математику – його щоденники списані математичними, і особливо геометричними, ідеями. За його словами, математика справила великий вплив і на його поезію. Творці «Аліса в Країні Чудес» і «Вінні-Пуха» так само здобули математичну освіту.

Звичайно, перелічені професії – не єдині, де математика може знадобитися або принести користь; маленька боротьба з математикою є гарним тренуванням на ціле життя.

МАТЕМАТИКА ВЧИТЬ ВІДЧУВАТИ ТА ПЕРЕДБАЧАТИ СВІТ

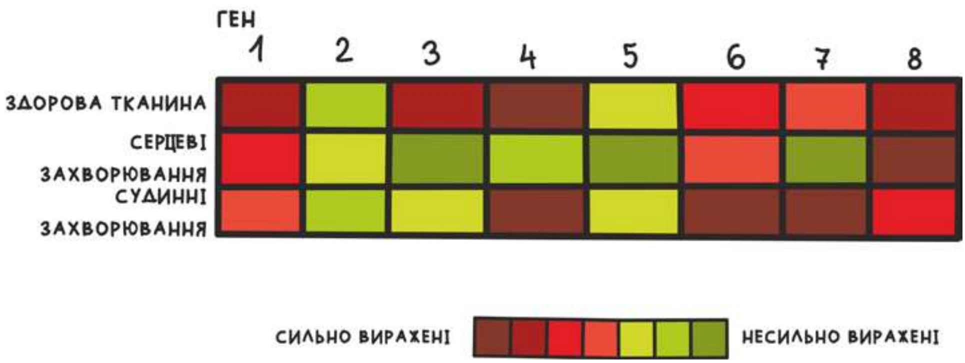
Хоча, можливо, що найбільше користі принесе математика всім тим, хто хоче розуміти чи контролювати живу та неживу природу навколо себе. За словами Річарда Фейнмана, одного з найбільших фізиків XX століття, володіння математикою для опису природи є просто незамінним.

МАТЕМАТИКА ОПИСУЄ

За допомогою математичної фізики рідин ми отримуємо пояснення загадки річок: чому за крижнем, бабусею та швидкісним катером хвилі виникають точно під тим самим кутом?

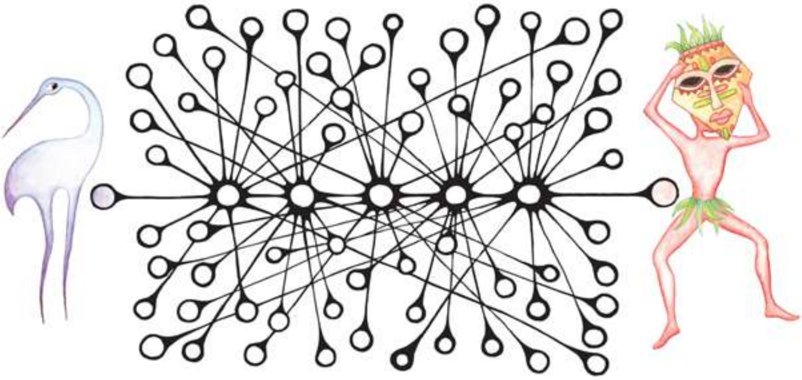
За допомогою математичної біології ми знаходимо зв'язки між генами та хворобами і можемо зрозуміти роботу серцево-судинної системи. Наприклад, математичні описи руху кальцію в клітинах серця дають нам надію на краще контролювання аритмії серця.

У кожній клітині нашого організму є кількадесят тисяч генів, чия експресія або відсутність експресії визначають усе наше існування та здоров'я. Хотілося б прив'язати експресію чи відсутність експресії певних генів до певних захворювань – відтак зможемо знайти шляхи лікування цих захворювань. Пошук таких зв'язків вже за своєю природою – математична робота. Але й результати роботи також можливо представити як гарні графіки, де можна побачити, за якими комбінаціями експресії генів можуть ховатися причини тієї чи іншої хвороби. Такі графіки називаються «тепловими графами»:



Подібний графік ми використаємо і наприкінці розділу про похідну [с. 338].

За допомогою математики ми можемо описати і через опис – зрозуміти, природу соціальних мереж і їх властивості. Часто такі мережі описуються за допомогою матриць [с. 152]. Наприклад, виявляється, що мережа людських знайомств має дуже специфічну структуру – а саме, вона досить тісно пов'язана; кожна людина знаходиться на відстані не більше шести друзів від будь-якої іншої людини в цьому світі. А який у вас зв'язок із королем Тонґа?



МАТЕМАТИКА БУДУЄ

Математичні знання про динамічні процеси і коливання дадуть хороші поради щодо того, як будувати мости, і які мости будувати не слід. Наприклад, не можна будувати мости, які можуть потрапити в резонанс унаслідок сильних вітрів і почати коливатися все сильніше й сильніше. Хоча це і можна було математично передбачити, ми вивчили відповідний урок за допомогою експерименту – у 1940 році Такомський міст в Америці розвалився саме через ці резонансні коливання, спричинені вітром.

Комп'ютер – це також винахід, можливості якого реалізували, та який вперше описали саме математики. Як ми вже згадували, комп'ютери розуміють лише мову алгоритмів, яка базується на математиці, і якщо ми хочемо, щоб комп'ютер щось за нас зробив, ми повинні повідомити йому про це точно й конкретно – математично. Можливо, варто також зазначити, що один із винахідників інтернет-протоколів – американський вчений-інформатик Вінт Серф – також отримав ступінь бакалавра з математики.

МАТЕМАТИКА ПЕРЕДБАЧАЄ

За допомогою дослідів ми можемо дізнатись, що відбулося колись, чи що відбувається зараз, але ніколи ми не зможемо з'ясувати дослідницьким методом, що відбудеться у майбутньому – адже над майбутнім не можна провести досліди. Однак часто нам потрібно саме передбачити, що може трапитися в майбутньому.

За допомогою математики було передбачено існування позитрона – античастинки електрона, і на сьогодні позитрон побачили під час експерименту. Математично було висловлено припущення, що класична механіка Ньютона некоректно описує системи, що рухаються з дуже великими швидкостями, і справді це так. Без знань про це наша GPS-навігація не працювала б.

Економічні теоретики намагаються зрозуміти, як той чи інший людський чи позалюдський чинник може вплинути на економічні показники в майбутньому; азартні гравці повинні хоча б намагатися передбачити, які карти знаходяться в руках у інших або в колоді круп'є; інженери повинні вміти уявляти немислимі чинники, які могли б поставити під загрозу їхній чудовий дизайн, або якось уплинути на нього – і все це можна зробити лише математично. Отже, математика – це наше око в майбутнє.

Звичайно, всі наші прогнози не завжди є правильними, але сумління математики залишається чистим – помилки існують у наших власних припущеннях та моделях, і ці помилки математика також дає змогу оцінити нам самим.

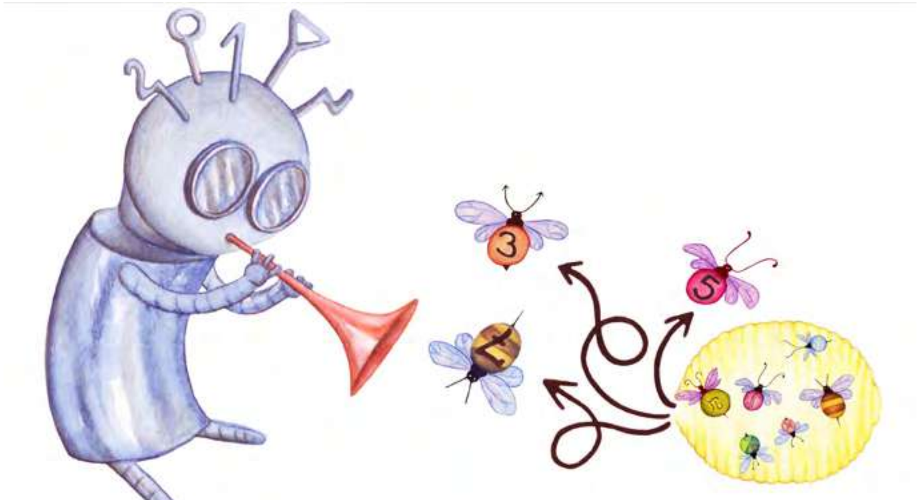
Сьогодні стали популярними також імовірнісні моделі, у яких ми визнаємо, що точні передбачення є неможливими – для нас можливим є лише передбачити те, як часто може трапитися та чи інша подія. Наприклад, якщо чесний друг чесно підкидає монету, то ми могли б передбачити, що приблизно в половині випадків монета випаде угору решкою [с. 392].

МАТЕМАТИКА НЕ ГОТОВА

Як ми побачили, математика дає змогу нам досить багато описати, контролювати і передбачати. Однак є і досить багато того, чого ми ще не розуміємо, і чого математика не розуміє.

Наприклад, сучасна математика, як і раніше, зазнає труднощів із описами складних та багатогранних систем та процесів, таких як робота однієї клітини тіла чи робота нашого мозку, чи світова економіка. Їх розуміння передбачає велику експериментальну роботу, але також, імовірно, і використання нового цікавого математичного апарату.

Також у самій математиці є ще багато невирішених запитань та загадок. Багато з них складно сформулювати, але деякі здаються, на перший погляд, дуже простими. Наприклад, ми навіть не знаємо, скільки існує пар простих чисел (чисел, які діляться лише на себе і на одиницю), різниця між якими дорівнює 2. Числові пари 3 і 5, 5 і 7, 29 і 31 задовольняють цим умовам; вважають, що кількість таких пар нескінченна, але до 2013 року ніхто так і не зміг цього довести. Або ми ще не маємо повного розуміння властивостей рівняння Нав'є-Стокса, яке описує рух рідини. Ніхто не знає, чи існує взагалі точний математичний розв'язок цього рівняння.



ЧИ МАТЕМАТИКА СКЛАДНА?

Багатьом здається, що математика складна – навіть непереборно складна – і що ця складність чимось відрізняється від труднощів запам'ятовування складних імен митців, дат, низки столиць держав, і взагалі, описів живої клітини на уроках біології.

Математику, ймовірно, робить ще складнішим поширене уявлення про те, що комусь математика дається добре, а іншим – ні. Правдою є скоріше те, що деяким математика подобається більше, а іншим – менше, точно так само, як і література, настільний теніс чи хоровий спів. І, звичайно, тим, кому математика подобається більше, займаються нею також більше, і, зрештою, стають більш успішними в ній.

Але те, що нам подобається, може змінитися за одну ніч (хоча частіше це стається з роками), і якщо одного ранку ви виявите, що математика все-таки може бути вам до смаку, боятися немає сенсу: насправді, математиці можна навчитися так само, як і будь-чому іншому.

І все ж математиці притаманні деякі власні труднощі, і ці труднощі корисно розуміти.

ВИВЧИТИ НАПАМ'ЯТЬ НЕ ВДАСТЬСЯ

Одна з особливостей і труднощів математики полягає в тому, що вивчити напам'ять – мало для успіху, і часто це не принесе прямої користі. Якщо ви запам'ятаєте розв'язання одного рівняння, це не допоможе розв'язати інше рівняння; якщо ви запам'ятали формулу площі круга, це не допоможе знайти площу трикутника. І все ж у математиці є різні запитання, які можна поставити; порівнюючи з іншими предметами їх, напевно, найбільше.

Тож, для того, щоб вивчити математику, потрібна якась інша стратегія. Для початку потрібно зрозуміти зв'язки між математичними об'єктами та міркуваннями й засвоїти певні загальні методи, які пояснюють, як знаходити площу чи розв'язувати рівняння. Іноді ці методи – зовсім як кулінарна книга, однак, чим цікавішими стають завдання, тим більше потрібно почати змінювати рецепти під час кухарства – додати дрібку солі, перцю або, частіше за все, нові математичні ідеї.

Однак такої імпровізації можна навчитись лише експериментуючи, і немає зовсім нічого страшного в тому, якщо на початку якесь рішення надумає піти неправильним шляхом, важливішою є сміливість його спробувати.

Але багатьом подобається творчість, подобається свобода. Це, можливо, навряд чи помітно на початку в математиці – де серед усього цього порядку й точності знайдеться місце для свободи? Але так само, як і у випадку з сонетом чи хайку,

МАТЕМАТИКА МАЄ ВЛАСНУ МОВУ

Ми вже звертали увагу на іншу складність математики й у наступному розділі обговоримо це докладніше [с. 42]. Вона криється в математичній мові, в тій обставині, що математичні позначення та термінологія певною мірою відрізняються від мови повсякденної. Ця спрощена мова робить математику простішою та дає їй можливість бути точною та однозначною.

Крім того, краса самої математики частково таїться в тому, що її доведення та позначення можна записати незалежно від того, що їх робить, а ще – стисло та акуратно. Тільки так математичні аргументи набувають своєї здатності описувати одночасно настільки різноманітні та багатопланові ситуації: рівняння, що складається з іксів та ігреків, розповість вам насправді шістсот казок, але кожен повинен їх додумати сам.

Однак мозок повинен трохи призвичаїтися до математичного стилю, математичних символів та мови.

Поки вам доводиться постійно вишукувати, що все-таки означає x, який міститься в рівнянні, чи символ $>$, або що таке похідна, ви взаємодієте з математикою ніби за допомогою словника. Кожен, хто намагався спілкуватися іноземною мовою за кордоном зі словником, знає, наскільки це, виявляється, виснажлива справа – для того, щоб створювати цілі тексти, потрібно володіти іноземними словами навіть уві сні. Інакше початок речення наприкінці речення забудеться, і висловити думку не вдасться.

МАТЕМАТИКИ СКЛАДНО НАВЧАТИ

Третя складність математики полягає, очевидно, в тому, що її важко навчати. З одного боку, вчителі завжди хотіли б робити уроки завжди захопливими – показувати красиві малюнки та пов'язані з ними експерименти. Але водночас є ризик, що прості й зрозумілі математичні аргументи залишаться в тіні цікавих історій та прикрас. Відтак навчання часто починають зі строго математичного змісту, і в тіні залишається, натомість, зв'язок із життям.

Звичайно, в ідеалі навчання мало б відбуватися різнопланово, іноді – життєві історії, іноді – математична ясність, одначе це потребує багато часу. Але в шкільній програмі для математики часу все менше, тоді як знань, які треба передати учням, все більше.

Ось так математичні знання і передаються часто в своєму найбільш компактному вигляді – назви об'єктів, означення, методи обчислення, без довгих пояснень, звідки все ж походять ці імена, означення, методи. Першоджерела рівнянь і теорем залишаються прихованими, і вони не асоціюються з нічим іншим, окрім дошки. Для декотрих це не становить проблеми, і їм достатньо лише математичного змісту, але для декотрих інших життєвий контекст та історія думки конче необхідні. Очевидно, для цього доводиться знаходити час поза школою, і, можливо, тоді ця книга також стане в нагоді.

МАТЕМАТИКА ПОТРЕБУЄ ЧАСУ

Як подолати ці труднощі? Потрібно бути сміливими і потрібно дати трохи часу собі, і математиці. Математика хоче, щоб нею займалися потрохи щодня. З математикою потрібно гратися і у такий спосіб звикати до її стилю та мови. Потрібно виконувати завдання, які дає вчитель, і додумувати завдання для себе самим. Потрібно розв'язувати задачі, які ви розв'язувати вмієте, і намагатися ті, які не вмієте. Потрібно шукати зв'язки та зв'язки між зв'язками. Сторінки потрібно списувати, а не заощаджувати чорнило. І вірите чи ні – все це можна зробити із задоволенням!

В одному можна бути певним: якщо вам самим математика подобається, і ви нею займаєтеся, то незабаром математиці сподобаєтеся і ви. У будь-якому разі вам не обов'язково відразу ставати математиком, щоб насолоджуватися математикою. Так само, як прості, але добре освоєні гітарні акорди додають хорошого настрою біля вогнища, так само трохи простої, але гарної математики, може розвинути навички мислення.

ДЛЯ НАТХНЕННЯ

Видання «Вечірнього підручника» підтримав 451 щедрий прихильник. Найбільш завзятих із них ми попросили також пояснити, чому ж вони так люб’язно нас підтримали. Так ми зібрали деякі особисті роздуми про математику, і сподіваємось, що вони також надихнуть і читача.

МАТЕМАТИКА ДОПОМАГАЄ ЗРОЗУМІТИ МОЗОК

Мозкові процеси – це основа всього, чого ми хочемо, про що думаємо, що відчуваємо. Мозок визначає те, ким ми є, і якими ми є. Але до сьогодні досить незрозуміло, як усі ці психічні процеси виникають у мозку. Тому, якщо ми хочемо зрозуміти самих себе, то мозок є важливим об’єктом дослідження. Математика потрібна для розуміння мозку. Для дослідження показників мозку використовуються математичні методи, і статистичний аналіз цих даних ґрунтується на математичних засадах. Однак, що головне – для розуміння мозку потрібна теорія принципів роботи мозку, яка змогла б пояснити й передбачити наші психічні процеси. Ці теорії базуються на математиці. Тож ця книга, «Вечірній підручник з математики», є не тільки інвестицією у вищу оцінку на іспиті або краще розуміння математики, але вона ще й закладає основи для кращого розуміння багатьох інших, здавалося б, далеких від математики явищ.

Яан Ару,

докторант в Інституті дослідження мозку імені Макса Планка, Франкфурт-на-Майні.

ВСЕСВІТ НАПИСАНИЙ МАТЕМАТИЧНОЮ МОВОЮ

Як фізика, мене надзвичайно радує поява такої книги, як «Вечірній підручник з математики». Безперечно, «чиста математика» також має свої принади, і про них читач, зацікавлений книгою, може скласти уявлення, але важливість математики набагато ширша. Це мова, якою написані сучасні природничі науки, зокрема й особливо – фізика. Не дивно, що один із засновників сучасної фізи-

ки – сер Ісаак Ньютон – був заодно творцем диференціального та інтегрального числення, а без останніх відомі закони Ньютона перетворилися би на метафори без жодної практичної цінності. Математичні моделі та методи знаходять успішне застосування в науках про життя, але суспільні та гуманітарні науки також здобувають нові сили для узагальнень та прогнозувань під час їхнього використанні.

Ґалілео Ґалілей написав майже чотириста років тому: «Філософія записана у велику книгу, яка стоїть постійно відкритою перед нашими очима (я маю на увазі Всесвіт), але ми не можемо її зрозуміти, поки не вивчимо мову та не знатимемо алфавіту, якими її було написано. Вона була написана мовою математики, а замість літер – трикутники, кола та інші геометричні фігури, без яких неможливо зрозуміти по-людськи жодного слова з написаного, без яких ми блукатимемо в темному лабіринті.» (Il Saggiatore, 1623) Приємного навчання! Приємного читання! І підручнику не обов'язково бути нудним, обридливим і важким для розуміння – «Вечірній підручник з математики» точно не такий.

Яак Кікас,

директор Інституту фізики Тартуського університету

МАТЕМАТИКА – ФУНДАМЕНТ СУСПІЛЬСТВА, ЗАСНОВАНОГО НА ЗНАННЯХ

Математика захоплювала мене з дитинства. Хоча в шкільні роки це був один із моїх улюблених предметів, математика супроводжувала мене крізь життя, як супутника в університетському навчанні, так і в повсякденному робочому житті.

Математика є фундаментальною і дуже захопливою, її значення в освіті та знаннях складно переоцінити. Дозволяючи описати явища універсальною та однозначною для кожного мовою, математична грамотність визначає хорошу освіту, і є невід'ємною частиною репертуару розумної людини.

Математика – це основа суспільства загалом, адже її щодня використовують інженери, викладачі, бізнесмени, лікарі тощо. Без математичних навичок неможливо ні систематизувати свої знання, ні регулярно їх розвивати.

Орієнтація у світі чисел важлива настільки, що помилки в математичному мисленні можуть завдати непоправної шкоди. Для ілюстрації цього твердження можна навести як приклад останні події у зв'язку з нібито допінговим звинуваченням проти нашого лижного героя. Хоча помилка допінгового *тесту була, за змістом, біохімічною, її можливо було описати й зробити однозначно зрозумілою лише завдяки математичній грамотності. В історії людства є й інші приклади, коли недостатнє знання математики спричиняло чи то непорозуміння, помилки, а чи й пряму шкоду. Водночас, гарні математичні навички дають інформацію, яку можна використати для створення конкурентної переваги.*

Можна стверджувати, що фундаментом для суспільства, заснованого на знаннях, є ті члени суспільства, які добре знають математику. Тому, взірцева математична грамотність є воротами в розвинуте суспільство.

Варте привітання те, що поруч із традиційними підручниками з математики, з'явилася ця книга з очевидно відмінним підходом, наближаючи тим, хто цікавиться, прекрасний і чарівний світ чисел під невідомим до того кутом.

Сулев Кикс,

професор фізіологічної геноміки та старший науковий співробітник з фізіології медичного факультету Тартуського університету

МАТЕМАТИКА – ЦЕ НЕ ЛИШЕ ЗАКАРЛЮЧКИ

Багатьом математика видається синонімом до тих закарлючок і дивних літер, що їх змушували вчити напам'ять на уроках математики в початковій та середній школі. Що викликає превеликий жаль, адже в цьому є приблизно стільки ж спільного з реальною математикою, скільки у китайських ієрогліфів зі змістом творів, що ними написані.

Зрозуміло, що для того, щоб повною мірою насолодитися письмовим твором, потрібно знати мову, якою його написано, у всіх її нюансах. Однак так само зрозуміло, що більшу частину змістовної та літературної цінності твору, можливо передати через його вмілий переклад.

На жаль, шкільна математика зосереджується саме на викладанні цієї мови, і змістовне значення часто так і залишається для учнів прихованим. На відміну від звичайних підручників, які за змістом часто схожі саме на класичні підручники з іноземної мови, мета цієї книжки – стати скоріше «перекладом», знайомлячи з розвитком математичної думки та її основними ідеями, показуючи мову лише мимохідь.

Я сподіваюся, що через цей переклад читачеві також відкриється картина цього феєричного світу ідей, який ми з авторами книги любимо і знаємо під іменем «справжньої» математики. Якщо повезе, то ця робота, можливо, дасть декому мотивацію так само продовжувати вивчення мови, і нарешті навчитися читати ці твори також і в оригіналі.

Марґус Ніітсоо,

викладач інформатики в Тартуському університеті

МАТЕМАТИЧНЕ ЧУТТЯ СТАНЕ РОЗРОБНИКУ У ПРИГОДІ

Напевно, мене завжди найбільше інтригувало в математиці те, наскільки вона насправді є корисною в інших областях. Обираючи свою спеціальність, я хотів зрозуміти, як все-таки комп'ютери вчать робити щось таке, чого людина хоче за допомогою комп'ютера досягти. Водночас, потрібно було зрозуміти також принципи роботи самого комп'ютера, зокрема – просту математичну логіку, наприклад. На щастя, я математики не боявся і вважав, що якщо інші справилися, то і я мушу.

Пізніше, під час пошуків застосувань для IT у нас на шляху стала біологія, де виникала необхідність обробляти великі на той час масиви даних. Тоді математика знову стала другом, що допомагав вирішувати нові проблеми. І з глибин пам'яті іноді доводилося витягувати навички, які ми колись здобули в гімназії чи університеті.

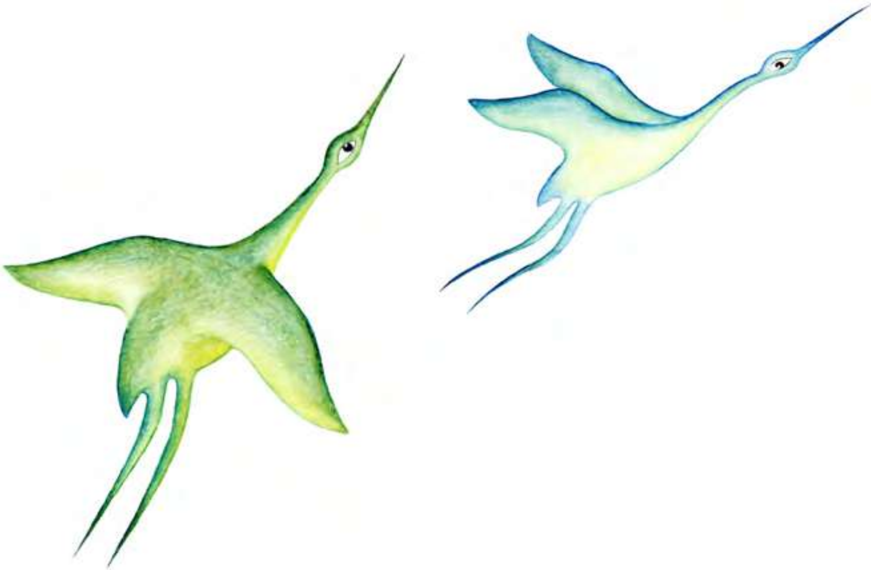
Я вважаю, що в математиці є два чіткі напрями – один, який стосується меж самої математики, та другий, що бере математику на озброєння задля практичного застосування. Може здаватися, що під час навчання враховано лише інтереси самої математики. Однак, насправді, математична інтуїція найбільше допомагає саме різноманітним розробникам, представникам усіх інших дисциплін. Я сподіваюся, що саме їм підручник допоможе знайти у вивченні математики побратима задля ситуацій, коли математика вимагає трохи більше уваги, ніж зазвичай.

Яак Віло,

голова Інституту інформатики Тартуського університету

ЧАСТИНА 1 –

МОВА
ТА ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

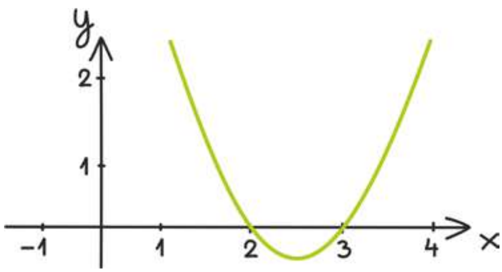


Позбавляючи мозок
від непотрібної роботи,
хороші позначення дають змогу
зосередитися на більш складних
проблемах і отже збільшують
розумові здібності всього людства.

Альфред Норт Вайтгед

МАТЕМАТИЧНА МОВА ТА ЖАНРИ

Перша картина, що постає у якому-небудь розгорнутому підручнику з математики, є досить нерозбірливою: мало слів, багато символів, ліній та схем, а що найгірше – вони всі між собою перемішані. Наприклад, у підручнику з математики може запросто трапитися речення: «Розв'язками рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ є $x = 2$ та $x = 3$», а після нього ще й намальована така кривулька:



Якщо людина не знає, що означає рівняння, що за звір цей x, що його намагаються видати за розв'язок, і яке відношення має до цього всього та дивна лінія, то все це може справити досить неприємне враження, і задля душевного спокою доводиться підручник закрити ще до того, як зміст прочитаного досягне голови.

ТЕРМІНИ

Утім із математикою справи не такі погані. Справді, математика має власні терміни, такі як рівняння, розв'язок, функція або змінна, що позначають певні математичні об'єкти або перетворення. Ці об'єкти не завжди існують у реальній фізичній формі, але їх часто можна цілком природно уявити.

Наприклад, коли вчитель говорить про площину, нам на думку може спасти просто аркуш паперу, поверхня столу або плоский ландшафт, хоча в математиці слово «площина» має точне значення. Так само складно сказати, чим є число три у фізичному світі, але думати про нього не складно – просто покличте в гості своїх трьох друзів!

Здається, що важливим є не тільки знати строгі описи математичних понять, але й уміти послуговуватися спрощеними описами, коли ми мислимо про них, та мати відповідну інтуїцію. У цьому розділі ми знайомимо з основними поняттями математики – змінною, рівнянням, множиною та функцією. Розуміння їх і звикання до них стане у великій нагоді в майбутньому.

ЛІТЕРИ ТА СИМВОЛИ

На додачу до термінів у математиці можна знайти багато літер, таких як a, x, y або n, і багато символів, таких як $=$, $<$, $+$, $-$ і ∞.

Символи доведеться просто вивчити напам'ять, однак значення літер залежить від ситуації. Букви, зазвичай, використовуються для позначення змінних [с. 48]. Звичайно, змінні також можна позначати словами, але використання літер економить час. Крім того, літери допомагають відокремити математичне міркування від початкового життєвого контексту, часто роблячи мислення у такий спосіб простішим і надаючи йому більші можливості для застосування.

Наприклад, якщо нам сказали, що хлопців у класі на три більше, ніж дівчат, то математики записали б це так: $p = t + 3$.

Чому так? Ми можемо перефразувати сказане так: якщо до кількості дівчат додати три, тоді їх буде стільки ж, скільки й хлопців. Словосполучення «стільки ж» математично позначається символом «$=$», а додавання, звісно ж, символом «$+$». Отже, ми отримуємо:

$$\text{число хлопців} = \text{число дівчат} + 3.$$

Проте, як-не-як, записування цього всього завдасть більшого клопоту, ніж запис $p = t + 3$?

До того ж, коротша форма дає зрозуміти, що аналогічно можна описати й ситуацію, коли замість хлопчиків і дівчат – прусаки й таргани.

Виходить, що рівняння з одинарними літерами не лише зменшує клопоти, пов'язані з написанням, але й клопіт із мисленням: рівняння більше не потрібно пов'язувати з будь-якою конкретною життєвою ситуацією, і можна мати справу лише з його математичним змістом і фактами.

МАТЕМАТИЧНІ ЖАНРИ

Математичний текст поділяють та увиразнюють малі математичні жанри: йдеться, наприклад, про означення, твердження, доведення та теорему. Іноді до цього переліку потрапляють ще такі слова, як лема або гіпотеза. Надалі ми опишемо, чого можна очікувати від тих чи інших жанрів.

ОЗНАЧЕННЯ

Під означенням мається на увазі точний математичний опис якого-небудь об'єкта. Але цей точний опис можна дати кількома різними способами, що відрізняються як структурою речень, так і змістом.

Наприклад, додатні парні числа можна визначити так (не варто лякатися суворого звучання слів «означення» або «навести означення»!):

> Означення 1: Додатні парні числа – це числа $2, 4, 6, 8, \ldots$
>
> Означення 2: Додатне парне число – це натуральне число, що ділиться на два.
>
> Означення 3: Ми отримуватимемо додатне парне число кожного разу, коли до числа 0 додаватимемо скінченну кількість разів число 2.

Усі ці три означення є рівнозначними – тобто будь-яке число, яке є парним числом, наприклад, згідно з означенням 2, буде також парним числом, згідно з означенням 1 і 3.

Може виникнути питання, навіщо нам визначати одне й те ж кількома способами? Першою причиною, яку можна навести, є те, що різні означення допомагають нам розмірковувати про один і той самий об'єкт по-різному, і отже ми зможемо отримати краще уявлення про його сутність.

Наприклад, у розділі про числа, ми взагалі визначаємо коло п'ятьма різними способами й кожен новий спосіб містить також дещо інше значення [с. 96]. Крім того, різні означення можуть привести до різних математичних міркувань або доведень: доведення, що ґрунтуються на одних означеннях, є простішими, ніж коли вони ґрунтуються на інших. Нарешті, різні означення можуть узагалі привести до різних тверджень. Наприклад, інтеграл [с. 340] можна визначити кількома математичними способами, і залежно від означення інтеграли різних функцій можуть також відрізнятися! Добре дібрані означення неабияк полегшують математичну дискусію та є основою прекрасного математичного світу.

ТВЕРДЖЕННЯ

Твердження в математиці означає те саме, що й у звичайній мові. Твердженням, наприклад, може бути: «4 – це парне число» або «5 – це парне число». Але, на відміну від тверджень у повсякденному житті, нескінченно сперечатися про правильність математичних тверджень неможливо – кожне математичне твердження є в кінцевому результаті або істинним або хибним.

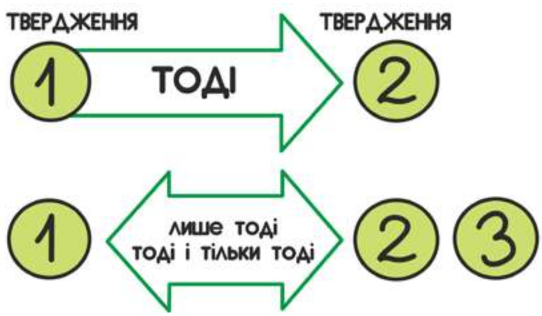
У зв’язку з твердженнями, можна також звернути увагу на те, наскільки різнобічно математики поводяться зі словом «тоді». Вживаються вирази «тоді» і «тоді і тільки тоді» (тобто «лише тоді»). Вони позначають те, як певні твердження пов’язані між собою.

Наприклад, поглянемо на три твердження:

1. Абу – найвищий у класі хлопець.
2. Абу – хлопець.
3. Усі хлопці, що є однокласниками Абу, від нього нижчі.

Якщо перше твердження є істинним, ТОДІ друге твердження також істинне – якщо Абу – найвищий у класі хлопець, тоді Абу – безсумнівно хлопець. Водночас, якщо істинним є друге твердження, то перше твердження не обов’язково є таким: якщо Абу є хлопцем, то це ще не означає, що він – найвищий хлопець, хай там що. Отже, ТОДІ дає змогу зробити односторонній висновок.

Однак, якщо до другого твердження додати ще й третє, то разом вони будуть рівносильними першому. У цьому випадку ми говоримо, що перше твердження є істинним ЛИШЕ ТОДІ (або, що є тим самим, ТОДІ І ТІЛЬКИ ТОДІ), якщо друге та третє твердження є істинними одночасно. Отже, «лише тоді» дозволяє зробити двосторонній висновок і показує, що твердження є рівносильними.



ДОВЕДЕННЯ

Як ми вже згадували, математичні твердження є або правдивими, або хибними. Математично переконливий аргумент, що обґрунтовує істинність або хибність твердження, називається доведенням. Слово «доведення» використовують у тому ж значенні щодня, але все ж інші дисципліни не можуть протистояти рівню строгості математиків. Однак, суворість стандартів самих математиків згодом змінилася.

Наприклад, аргументи, які математики 18 століття вважали строгим математичним доведенням, точно не отримають максимальних балів на іспитах із математики в наш час.

Взагалі повинна існувати можливість записати доведення точною і лаконічною мовою математичної логіки, тобто як мішанину довгого ланцюжка символів. Про це ми ще трохи поговоримо в розділі про множину [с. 61]. Але, на щастя, справи, переважно, не доходять до такої суворості, й математичні доведення – це, передусім, словесні міркування, що виходять із певних аксіом, означень та істинних тверджень та закінчуються кількома висновками.

Незважаючи на те, що слово «доведення» має відтінок суворості, пошук доведень – це дуже творчий процес. Іноді шлях доведення веде дуже далеко від початкових тверджень і припущень, перш ніж знову повернутися по колу до кінцевого твердження. Різні доведення допомагають краще зрозуміти математичний світ, але вони сприяють мисленню також і там, де математика тісно пов'язана з життям. Доведення можна між собою порівнювати та оцінювати; їх можна створювати, вдосконалювати і критикувати, як і було прийнято завжди під час створення творів мистецтва.

У цій книзі також можна знайти багато доведень, іноді вони більш строгі математично, іноді менш строгі. Наприклад, ми обговоримо, чому число $\sqrt{2}$ не можна виразити відношенням двох цілих чисел у вигляді $\frac{a}{b}$ [с. 87], або чому певні великі математичні твердження, тобто теореми, є істинними: у розділі про тригонометрію ми дійдемо до обговорення як теореми синусів [с. 222], так і до теореми косинусів [с. 224]. Однак, перше доведення буде наведено вже в наступному підрозділі.

ТЕОРЕМА

Теорема – це чи не найшанованіший математичний жанр. Теоремою називають твердження разом із математично точним доведенням. Насправді, більшість людей наважується називати теоремами лише достатньо сильні твердженнями разом зі складними доведеннями. Теореми також часто називають на честь їх відкривачів, хоча слід визнати, що багато теорем мають дуже мало спільного з людьми, на честь яких їх назвали.

Одна відома теорема виглядає так:

> Теорема: існує нескінченна кількість простих чисел. (Евклід)

Слово «Евклід» у дужках вказує на автора доведення, і часто цю теорему так і називають – теоремою Евкліда.

Нагадаємо, що прості числа – це натуральні числа, які діляться без остачі лише на себе та на одиницю – як, наприклад, 2, 3 і 5. Але, числа 4 і 6 не є простими числами, оскільки $4 = 2 \cdot 2$ і $6 = 2 \cdot 3$. Прості числа є, в певному сенсі, основою для всіх інших чисел. Їх самих не можна розкласти на прості співмножники, але всі інші числа можна подати у вигляді добутку простих чисел. Наприклад, як добуток простих чисел ми можемо записати $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ і $21 = 7 \cdot 3$.

Надалі ми намагатимемося переконати в цій теоремі також читача. Нагадаємо, що міркування, яке переконає навіть найбільш скептичного математика, називається доведенням, і, фактично, ми тут наведемо доведення.

Доведення:

для початку зазначимо, що прості числа, безсумнівно, існують – наприклад, 2, 3 і 5 є простими числами і так само існує багато інших. Припустимо, що ми вже знайшли n різних простих чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$. Чи існують інші? Як їх знайти?

Нове просте число точно не повинно ділитися на жодне з уже відомих чисел. Найпростіше було б тоді розглянути число A, яке є більшим на одиницю від добутку всіх дотепер знайдених простих чисел:

$$A = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Отже, це число, безумовно, не може бути поділене на жодне з уже знайдених простих чисел, адже при діленні на них воно дає в остачі 1.

Якщо це число більше не ділиться на будь-яке інше число, окрім одиниці та себе самого, то йдеться про нове просте число. У разі, якщо не йдеться про просте число, то, як ми зазначили, його можна записати як добуток різних простих чисел. Але жодне з цих простих чисел усе ще не є нам відомим!

Отже, ми знайшли принаймні одне нове просте число. Більше того, скільки простих чисел ми б не знали, ми можемо щоразу використовувати одні й ті ж самі міркування, щоб знайти принаймні ще одне. Отож, простих чисел існує нескінченна кількість.

Це твердження й доведення надав Евклід, відомий давньогрецький математик, який любив геометрію та числа. На сьогодні в цієї теореми є вже десятки доведень, і насправді тепер ми знаємо про прості числа набагато більше. Для прикладу, ми досить точно знаємо, скільки існує простих чисел, менших певного числа, наприклад, тисячі. Однак, багато питань залишаються без відповіді, як і раніше.

ЗМІННА

Як би вам сподобалося, якби у вас була банкнота, чию вартість ви могли б увесь час змінювати? Сподобалося б? Тоді вам також сподобається поняття змінної в математиці.

Змінна – це просто математичний об'єкт, значення якого може змінюватися, і чиє значення можемо змінити ми. Вона часто з'являється з якимось дивним коротким ім'ям, наприклад x, y, z або n – математики просто так чорнила не марнують.

ЗМІННА В РІЗНИХ РОЛЯХ

Змінні використовуються в дуже різних ролях. Йдеться про досить поширене поняття, що часто вводиться з метою спрощення. Саме те, як і у зв'язку з чим, змінна змінюється, залежить від конкретного контексту, й іноді її називають якимось зовсім іншим іменем.

ЗМІННА, РІВНОСТІ ТА РІВНЯННЯ

Змінні можна зустріти, займаючись рівностями та рівняннями. Водночас, в рівнянні величина, яка нам ще невідома, пов'язана з іншими, добре відомими нам величинами. Наприклад, щодо «$x + 2 = 5$» ми можемо сказати другові, що йдеться про рівняння стосовно змінної x або про рівність, якщо значення змінної x дорівнює 3.

У контексті рівняння, змінна є об'єктом, який ми шукаємо, – це те число, до якого додавши два, ми отримаємо п'ять. Його значення нам спочатку невідоме, і тому його можна було б так і назвати, «невідомим».

У випадку більш складних, так би мовити, загальних рівнянь, введення змінної як об'єкта допомагає уникнути плутанини.

Загальним рівнянням є, наприклад $x + a = b$. Коли хтось каже, що x – змінна в цьому рівнянні, то ми знаємо, що шукатимемо ті значення, які підійдуть саме

x-ві, а інші букви позначають лише певні коефіцієнти. У цьому випадку, щоб знайти невідоме x, ми можемо відняти число a від обох частин рівняння і побачити, що $x = b - a$. Це – розв'язок загального рівняння.

Навіщо нам узагалі рівняння в загальній формі? Вони полегшують життя, допомагаючи розв'язати багато різних рівнянь за один раз.

Наприклад, за допомогою вищезазначеного загального рівняння, ми за раз розв'язали всі три наступні рівняння:

$$x + 2 = 4$$
$$x + 3 = 6$$
$$x + 9 = 14$$

У першому випадку нам просто потрібно вибрати, що $a = 2$, $b = 4$, і отримаємо розв'язок $x = 2$. У другому випадку ми виберемо $a = 3$, $b = 6$ і відповіддю буде $x = 3$, а в третьому випадку вибір $a = 9$, $b = 14$ дає розв'язок $x = 5$.

Звичайно, ми могли б позначити невідоме в рівнянні також і буквою a, а коефіцієнти, натомість – буквами x і y. Але, в цьому випадку, ми щоразу повинні зазначати в рівнянні, чим є невідоме.

Домовленість про те, що саме x-ві належить роль невідомого, просто робить математичне читання простішим і швидшим. Наприклад, чи приємно читати квадратне рівняння та формулу його розв'язків у такому вигляді?

$$y = a^2 \cdot x + \tilde{o} \cdot a + z$$

$$a_{1,2} = \frac{-\tilde{o} \pm \sqrt{\tilde{o}^2 - 4xz}}{2x}$$

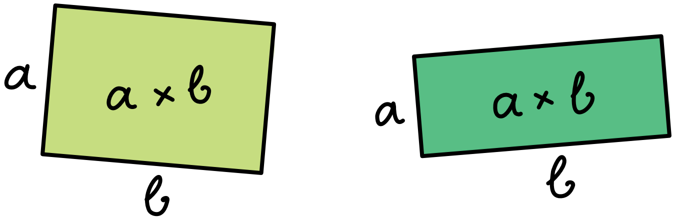
Оскільки такі позначення лякають і породжують достатньо плутанини, в нашій книзі ми, за можливості, спробуємо позначати все найпоширенішими символами.

ЗМІННА ТА ФУНКЦІЇ

Змінні даються взнаки й тоді, коли йдеться про функції. У розділі про функції ми опишемо, що функцію можна розглядати як певну машину, що бере змінну і проводить з нею яку-небудь операцію або перетворення. Іноді змінну також називають аргументом функції [с. 64].

Кажуть, наприклад, що квадратична функція – це функція однієї змінної або машина, яка бере змінну й множить її на неї саму. Якщо ми дамо змінній значення 3, то отримаємо відповідь 9; даючи змінній значення 5, отримаємо відповідь 25.

Однак, формула площі прямокутника $S = ab$ є вже функцією двох змінних: адже ми можемо змінювати обидві сторони прямокутника, і площа також буде постійно змінюватися.



ЗМІННА ТА СУМИ

Змінна може з'явитися також у довгих складних сумах або в монстрові, що називається інтегралом [с. 340], допомагаючи математику виразити себе більш компактно і точно.

Якщо математик хоче додати числа від одного до десяти, він запише це так:

$$n = \sum_{i=1}^{10} i,$$

що ми прочитаємо так: додамо всі числа, починаючи від 1 до 10:

$$n = \sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

Цієї страшної закарлючки зовсім не варто боятися. Ми маємо справу з великою грецькою сигмою, тобто з нашою буквою S, що виглядає, наче безневинний метелик. Але для нас вона є просто умовним позначенням додавання.

Наприклад,

$$\sum_{n=1}^{3} n = 1 + 2 + 3$$

або

$$\sum_{n=0}^{2} n^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2$$

Для тих, хто має хоч якийсь досвід у програмуванні, все це буде цілком зрозумілим – комп'ютерам також подобаються змінні. Замість того, щоб виписувати суму $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$, ви просто кажете комп'ютеру: додай усі числа i, що знаходяться в діапазоні від $1, \ldots, 10$, і при додаванні використай допоміжну змінну n, початковим значенням якої є 0. Інформатик, наприклад, записав би це мовою програмування Python так:

```
n = 0
for i in range(0,11):
        n = n + i
print(n)
```

Змінними тут будуть як « i », так і « n ». У першому рядку змінній n дано значення 0. Наступний рядок говорить про те, що замість змінної i потрібно підставляти числа від 1 до 10 (числа 0 і 11 не враховуються). Третій рядок говорить про те, що до змінної n потрібно щоразу додавати значення i. Отже, на початку значення n дорівнює 0, тоді до n додається 1, і значення n стає 1. Наступного разу i має значення 2, воно додається до n, і нове значення становить $1 + 2 = 3$. Зрештою, n отримує значення 55, і воно відображається на екрані.

РІВНЯННЯ ТА РІВНІСТЬ

Рівність – це повсякденне поняття. Говорять про рівний вибір, рівні можливості, рівні обміни. Тому й не дивно, що рівність також належить до основних математичних понять. Однак, математика хоче точності. Тож, якщо бути точними, що саме ми маємо на увазі під словом «рівність»?

Іншими словами, якщо ми скажемо, що два дерева мають рівну товщину, або, що дві команди мають рівне положення у таблиці, або, що обох вчителів слухали з рівним інтересом, то, що об'єднує слово «рівний» у всіх цих словосполученнях?

Поміркувавши трохи, здається, що майже в кожному контексті ми розглядаємо певні властивості або об'єкти як рівні таким чином, що, якби їх можна було між собою поміняти, то нікому цей обмін відстежити не вдасться.

Звичайно, взаємозамінність у реальному житті залежить від безлічі деталей, що їх ми враховуємо: двоє хороших викладачів є взаємозамінними, якщо нас цікавить лише те, скільки учнів їх слухає з цікавістю. Однак, якщо врахувати також зміст лекції або колір їхнього волосся, то очевидно, що їх можливо відрізнити у всьому.

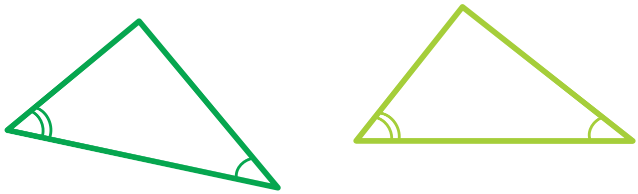
Математична рівність – дуже подібна. Ми вважаємо рівними ті об'єкти, чия заміна одне на інше, хоч у чомусь, нічого б не змінила. Але знову ж таки, ми повинні бути обережними і точно визначати, які характеристики маємо на увазі. Математично отаку рівність чисел записують за допомогою математичного знака рівності.

Наприклад, ми можемо вважати два числа рівними, якщо у всіх взаєминах з іншими числами й у всіх математичних діях, вони поводяться абсолютно однаково.

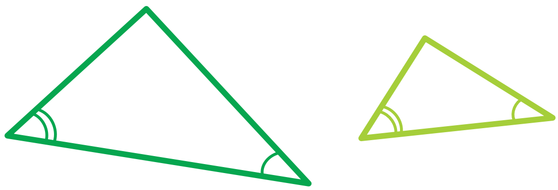
Наприклад, числа $\frac{2}{3}$ і $\frac{6}{9}$ рівні, хоча виглядають вони по-різному. Також рівними в математиці є число 1 і нескінченний періодичний дріб $0{,}999$ ..., однак їх десяткові подання різні! Це можна пояснити собі кількома способами. Якби числа 1 і $0{,}999$ ... були різними, тоді різницею між цими числами було б якесь число, відмінне від нуля. Але неважливо, наскільки маленьким є число, до якого ми додамо $0{,}999$ ..., в результаті все одно отримаємо число, більше від одиниці. Також можуть здатися слушними такі міркування:

$$0{,}999\ldots = 0{,}333\ldots + 0{,}333\ldots + 0{,}333\ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Також у випадку багатьох інших об'єктів, їх рівність отримала окрему назву. Наприклад, два трикутники, які ми можемо накласти один на другий так, що вони сумістяться, і таким чином будуть рівними відносно будь-якого геометричного перетворення, називаються конгруентними трикутниками. У них абсолютно рівні сторони і кути.



Але інколи нас цікавить лише форма трикутників, а не їх точний розмір. Трикутники, які ми можемо перетворити один в інший, збільшуючи чи зменшуючи їх, називаються подібними трикутниками.



Однією з цілей математики є пошук простих умов, за яких два об'єкти будуть рівними. Як ми побачили у випадку чисел, ані десяткове подання, ані подання у вигляді звичайного дробу, не є прийнятними критеріями. У випадку трикутників, наприклад, виявляється, що для рівності двох трикутників, вистачає рівності трьох відповідних сторін, а для їх подібності – рівності трьох відповідних кутів.

МАТЕМАТИЧНА РІВНІСТЬ

Як ми вже згадували, ми можемо записати рівність чисел за допомогою математичного знака рівності. Для позначення математичної рівності використовується знак «дорівнює», що виглядає як дві короткі рейки: «=». Наприклад, обговорену раніше числову рівність ми можемо записати в такій формі:

$$1 = 0{,}9999 \ldots = 0,(9).$$

Застосування математичної рівності є, звичайно, ширшим, ніж лише для чисел: замість чисел можуть також бути, наприклад, числові вирази. Числовий вираз не є чимось складним – крім чисел, там теж можуть бути деякі літери, які можуть позначати різні числа, а ще – розділові знаки.

Наприклад, числовим виразом є $1 + 1$, і він підходить для рівності $1 + 1 = 2$.

Більш складним числовим виразом є, наприклад, $a + 3b$, де a і b можуть позначати довільні числа. Отже, вони грають ролі змінних [с. 48] – їх значення може змінюватися на наш розсуд.

Якщо a позначає число 1, а b – число 2, ми можемо записати рівність $a + 3b = 7$. Роблячи це, ми повинні пам'ятати, якими є значення чисел a і b на даний момент. Після зміни їх значень, рівність може більше не бути правильною!

Числа чи вирази, пов'язані з істинною рівністю, є взаємозамінними відносно будь-якого обчислення: що б ми не зробили з двома числами або виразами, які пов'язані знаком «дорівнює», доти, доки ми будемо обходитися з ними абсолютно однаково, результати завжди залишатимуться однаковими.

Наприклад, ми можемо піднести до квадрату обидві частини наведеної вище рівності: $(1 + 1)^2 = 2^2$ або до кожної частини додати число 5: $1 + 1 + 5 = 2 + 5$. Рівність, як і раніше, залишиться правильною, і в першому, і в другому випадку.

Сучасний знак «дорівнює» був уведений валлійським математиком Робертом Рекордом у 16-му столітті – йому просто набридло виписувати словосполучення «є рівним». Цей же знак рівності використовується для позначення рівності багатьох інших математичних об'єктів, наприклад ми зустрінемо його вже в наступному розділі, де він позначатиме рівність множин.

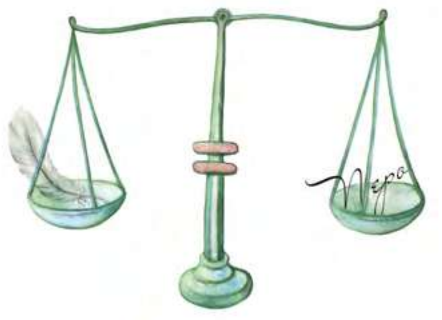
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ РІВНОСТЕЙ

Як ми побачили, рівність – це математичне поняття, що допомагає нам конкретизувати перебіг думок.

Рівності, як правило, полегшують життя. Вирази, числа або інші математичні об'єкти, пов'язані знаком рівності, є абсолютно однаковими. Тож, у будь-якій ситуації ми можемо використовувати зручніше для нас, простіше подання.

Наприклад, якщо ми знаємо, що $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$, то це дає нам непоганий хитрий прийом для множення певних чисел: Скільки буде $8 \cdot 12$? В іншому випадку це потребувало б, щоб ми немало поламали голову, але, якщо ми запишемо $8 = 10 - 2$ і $12 = 10 + 2$, то побачимо, що $8 \cdot 12 = (10 - 2) \cdot (10 + 2)$. Але, виходячи з наведеної рівності, це дорівнює числу $10^2 - 2^2$. Однак, $10 \cdot 10 = 100$ і $2 \cdot 2 = 4$, отже $8 \cdot 12 = 96$!

Як на уроці літератури від вас хочуть, щоб ви шукали синоніми до одного слова для того, щоб краще висловатись, так само завжди варто також шукати для математичного об'єкта інші об'єкти, що є рівними з ним, а також рівноцінні описи. Це часто робить математичну діяльність простішою: наприклад, інколи ми бажаємо бачити те саме число як 823543, але іноді – як 7^7 – а вам яке подання подобається більше?



Рівності також корисні для передачі більш вузьких математичних знань.

ЗАКОНИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ДІЙ ТА ТОТОЖНОСТІ

За допомогою рівностей можна стисло висловити різноманітні властивості дій над числами, які іноді називають ще тотожностями для того, щоб підкреслити їх вічну і позачасову чинність.

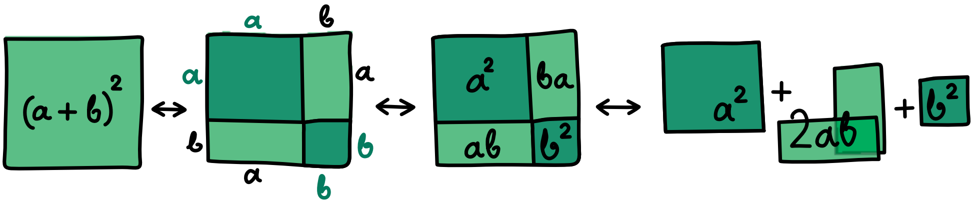
Наприклад, $a + b = b + a$ виражає, що сума будь-яких двох чисел не залежить від порядку доданків.

У математиці, це називається комутативністю. Дійсно, якщо $a = 2,\ b = 4$ …, ми повторимо вищенаведений закон: $2 + 4 = 4 + 2$.

Відомий трюк-перетворення:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2$$

показує, що ми можемо знайти квадрат суми будь-яких двох чисел, якщо додамо разом квадрати цих самих чисел і додамо до них ще подвійний добуток чисел. Хіба ж ця формула не коротша від попереднього речення? Чи натомість наступний геометричний опис є вдалішим?

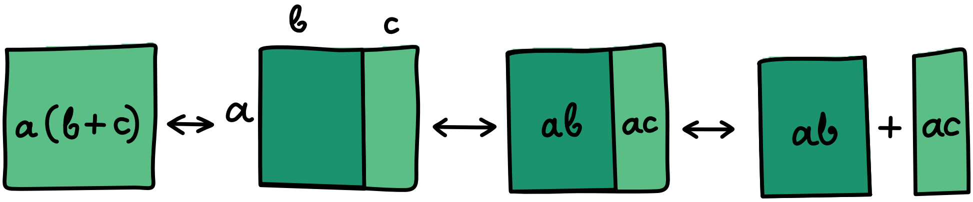


Середній відтинок останнього малюнка показує, що ab і ba – рівні, і при додаванні, вони дають $2ab$.

Оскільки попередній малюнок – просто чудовий, то ми також доведемо й розподільний закон (або дистрибутивність множення відносно додавання)

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

використовуючи такий самий графічний метод:



МНОЖИНА

Як і в повсякденній мові, для математиків множина також означає набір якихось предметів. Наприклад, вся картопля в каструлі, всі учні в класі або всі коти в бабусиному підвалі утворюють множини.

Для множини є обов’язковою лише одна умова – жодні два елементи множини не можуть бути рівними.

Множини, що цікавлять математиків, включають, наприклад, усі натуральні числа, від’ємні дійсні числа, числа, що задовольняють яке-небудь рівняння, або навіть множина прямокутних трикутників.

Множини в середній школі дуже докладно не обговорюються – адже йдеться про такі прості об’єкти! Однак, ми вирішили поговорити про них тут, бо, навіть хоча вони й прості множини є основою всієї математики.

ОПИСУВАННЯ МНОЖИН

Множину часто описують, перераховуючи її елементи в фігурних дужках. Наприклад, усі цифри утворюють множину

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Оскільки виписувати цілу множину в кожному абзаці не має сенсу, множинам часто даються імена. Здебільшого їх позначають великими літерами: наприклад, можна сказати, що

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

В елементів множини відсутні будь-які амбіції (чи то зобов'язання) впорядковувати самих себе – всі вони є рівноцінними членами множини. Тому, ми могли б також перерахувати елементи множини A в будь-якому іншому порядку, наприклад:

$$A = \{9; 3; 2; 1; 4; 5; 7; 6; 0; 8\}.$$

Множину також можна описати за допомогою деяких умов. Множину, згадану раніше, ми могли б описати, наприклад, так:

$$A = \{\text{невід'ємні цілі числа, що є меншими від } 10\}.$$

або просто

$$A = \{\text{всі цифри}\}.$$

Парні числа в такому разі ми можемо описати так:

$$P = \{\text{всі числа, що діляться на два}\}.$$

Скорочений опис може прийняти таку форму:

$$P = \{\text{ціле число } n\text{: } n \text{ ділиться на два}\}.$$

або в руках досвідченого фаната математики він може взагалі перетворитися на мінімалізм:

$$P = \{n \in Z\colon 2|n\}.$$

Цей вираз слід читати так: P – це множина, що складається з таких цілих чисел n, що діляться на два.

Даючи множині A низку різних описів, ми вже використали одну просту, але важливу властивість множин: дві множини є рівними лише тоді, якщо їх елементи – абсолютно однакові. Іншими словами, множини рівні тільки тоді, коли всі елементи, що належать одній множині, належать також й іншій, і навпаки.

ВАЖЛИВІСТЬ МНОЖИН

Надалі ми спробуємо відповісти на питання важливості цього розділу: яка ж користь із такого простого зібрання предметів, як множина, і чому вона потрапила сюди під виглядом одного з основних понять? Більше того, чому ми так розлого про неї розповідаємо?

ОБ’ЄДНУВАННЯ ЧАСТИН

По-перше, майже будь-яка річ складається з менших частин. Отже, майже все можна розбити на шматочки, і за допомогою цих шматочків описати. Наприклад, футбольна команда складається з гравців, речення – зі слів, повітря – із різних молекул, ядро атома – із протонів та нейтронів тощо. Вже за такими описами можна впізнати множини.

Так само множини допомагають і при описі математичних об’єктів: наприклад, коло можна описати як множину всіх точок, що знаходяться на однаковій відстані від однієї конкретної точки – центра кола.

Саме цей альтернативний опис пояснює, чому циркуль дає змогу нам малювати красиві кола. Коли ми поміщаємо одну ніжку циркуля в точку, що є центром кола, то, рухаючи іншу ніжку, малюємо підряд точки, що лежать на однаковій відстані від тієї центральної точки.

ОДНОЧАСНА ОБРОБКА

По-друге, у нас часто з’являється необхідність зробити що-небудь із багатьма об’єктами одночасно.

Наприклад, вчитель хоче поставити оцінки всім учням у класі, або бджола хоче запилити всі квіткові пуп’янки в околиці. Тож ми можемо говорити про оцінювання або запилення як про операцію, яку можна зробити з усіма учнями або з усіма квітковими пуп’янками.

У математиці важливо вміти встановлювати відповідність між кожним трикутником і його площею або знаходити значення квадратів всіх дійсних чисел. Такі міркування ми можемо точно і математично записати саме за допомогою множин, визначаючи якусь дію – або, точніше, функцію – для всіх елементів множини.

Наприклад, піднесення числа до квадрату – це операція, що вибирає з-поміж усіх дійсних чисел будь-яке число і встановлює відповідність між цим числом і його добутком на себе самого. Це все тісно пов'язане з функціями та їх так званими областями значення та визначення [с. 67].

МНОЖИНИ Є ОСНОВОЮ МАТЕМАТИКИ

По-третє – і це, можливо, видасться найнесподіванішим – множини, виявляється, в певному сенсі є основою всієї математики.

Якщо проявити багато послідовності і достатньо хитрості, то за допомогою множин можна описати всі математичні об'єкти та операції. Так і виходить, що найпоширеніший до цього часу фундамент математики побудований саме на множинах. Теоретично повинна існувати можливість перекласти всі математичні результати на мову, в якій єдиними об'єктами є множини, й існує близько десятка точних правил поводження з ними. Це важливо, оскільки правильність аргументів, написаних цією мовою, крім вчителя, може перевірити також комп'ютер – а отже, прощайте, різноманітні суперечки, комп'ютер знає краще! Насправді, комп'ютер вже може навіть сам придумувати найпростіші аргументи такою дуже точною та формальною мовою. Однак, переклад окремих найскладніших міркувань на мову множин є копіткою працею, і на початку математики проявляють більшу винахідливість у доведенні нових результатів, ніж комп'ютери. Надалі ми покажемо, як за допомогою множин можна описати певний математичний об'єкт. У межах нашої книги ці описи дуже важливого значення не мають, але, можливо, їх буде просто цікаво почитати.

Наприклад, з допомогою множин можна описати всі функції [с. 64]. Квадратичну функцію – машину, що встановлює відповідність між кожним дійсним числом та його квадратом – ми можемо описати як множину впорядкованих числових пар:

$$\{(x;\, x2)\colon x \text{ є дійсним числом}\}.$$

Ідея тут полягає в тому, щоб вважати, що перший член кожної пари чисел відповідає другому члену.

Якби ми розглянули функцію $y = x^2$ лише щодо цілих чисел від нуля до семи, то могли б також виписати цю функцію елемент за елементом:

$$\{(0;\, 0);\, (1;\, 1);\, (2;\, 4);\, (3;\, 9);\, (4;\, 16);\, (5;\, 25);\, (6;\, 36);\, (7;\, 49)\}.$$

Смішно, але для опису якогось простішого математичного об'єкта, треба, однак, подумати довше. Наприклад, як описати число 4, використовуючи лише множини й не згадуючи про числа? Існує кілька способів, як це зробити. Тут ми опишемо один із можливих способів.

Встановлюється відповідність між числом 1 та порожньою множиною, що не має жодного елемента: $\emptyset$. Порожню множину можна розглядати як порожній пластиковий пакет.

Встановлюється відповідність між числом 2 та множиною, єдиним елементом якої є множина, що відповідає числу 1, тобто порожня множина. Отож, ми можемо описати цю множину символами як $\{\emptyset\}$. Ми загорнули наш порожній пластиковий пакет у ще один пакет – усього два пакети.

Встановлюється відповідність між числом 3 та множиною, єдиним елементом якої є встановлена в попередньому пункті множина, що відповідає числу 2. $\{\{\emptyset\}\}$ є її описом. Пакет всередині пакета всередині ще одного пакета – всього три пакети.

Встановлюється відповідність між числом 4 та множиною, єдиним елементом якої є множина, що відповідає числу 3, з математичним позначенням $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, тобто чотири пластикові пакети.

Отже, можна, звичайно, продовжувати й описати всі натуральні числа з допомогою множин або й справді $1, 2, 3, 4, \ldots$ з допомогою поліетиленових пакетів. Додавання кожного нового поліетиленового пакета, тобто створення нової множини, містить ідею додавання до числа одиниці.

Це лише два обраних приклади, але й ще складніші об’єкти можна представити як множини. Якщо подумати про них так, множини й справді є досить крутими: вони мали б уможливити опис всього, що ми знаємо в математиці.

Можливо, буде також приємно дізнатися, що множини – вже не єдиний спосіб закладання основ математики, який використовується сьогодні. Також можна використовувати й іншого типу, трохи потужніші зібрання об’єктів – категорії. Категорія не лише складається з різних об’єктів, але також містить зв’язки між цими об’єктами.

МНОЖИНИ ТА ГОЛОВНИЙ БІЛЬ

Множини принесли математикам багато головного болю у вигляді парадоксів.

Клопоту завдав на початку 20 століття англійський філософ і математик Бертран Рассел таким простим запитанням: чи може яка-небудь множина бути елементом самої себе?

Можливо, він роздумував так:

> *Якщо в мене вільні руки при утворенні множини, то я маю право вимагати, щоб елементом моєї божевільної множини була кожна множина, що не є елементом самої себе.*
>
> *У такому разі, чи є моя божевільна множина елементом самої себе?*
>
> *Якби вона була своїм власним елементом, тоді вона мала би бути множиною, що не є елементом самої себе – ой-ой, досить суперечливо!*
>
> *Але, якщо вона є такою множиною, яка не є елементом самої себе, то вона, навпаки, повинна належати саме до божевільної множини, тобто бути своїм власним елементом! Також суперечливо!*
>
> *Я не можу відповісти на це запитання, катастрофа!*

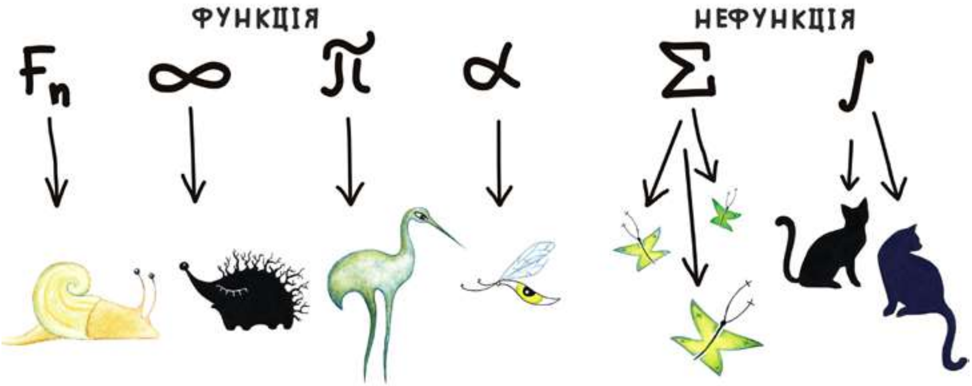
Катастрофа чи ні, але цей парадокс багатьом запропонував поживу для роздумів. Нарешті було знайдено також і рішення – щоб уникнути всіляких дивних парадоксів, ми просто не повинні дозволяти, щоб у когось були повністю вільні руки при утворенні множин.

Загалом, однак, вам про це турбуватися не доведеться – всі множини, про яких говорять на уроках математики, є дійсно математичними множинами відповідно до всіх найсуворіших вимог. А, може, варто просто запам'ятати, що навіть дуже прості і зрозумілі на початку поняття можуть приховувати в собі різноманітні каверзи.

ФУНКЦІЯ

Що робити, коли у вас двадцять сім друзів, і ви мусите пам’ятати день народження кожного з них? З цим особливо нічого не поробиш – потрібно просто відкрити комп’ютер або календар якої-небудь соціальної мережі і ввести всі дні народження там. Отже, десь глибоко всередині комп’ютера буде встановлена відповідність між кожною людиною та датою її дня народження.

Тільки що ми на словах застосували одну функцію! А саме, функція пов’язує кожен об’єкт відповідністю з якимось іншим об’єктом, з одним і лише одним об’єктом – і не більше й не менше – а ми прив’язали кожного друга до дня його народження.

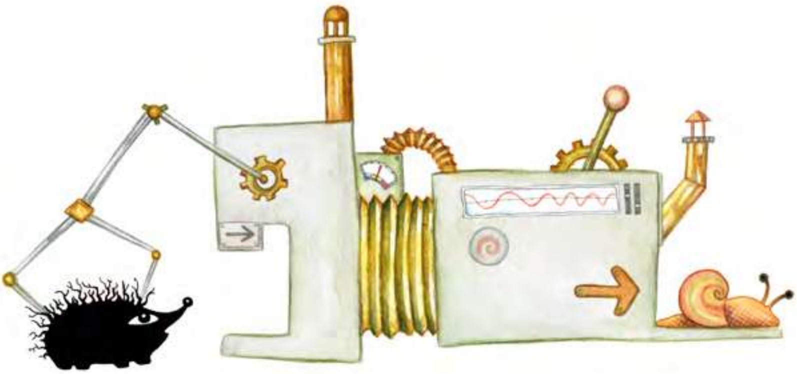


Так само ми можемо вважати, що календар сам по собі є функцією – встановлює відповідність між кожною датою та правильним днем тижня!

Звичайно, існує багато ситуацій, коли негайно слідувати такому правилу не вийде – наприклад, неможливо встановити відповідність між кожною датою та лише однією людиною, адже на одну і ту саму дату припадають дні народження багатьох різних людей. У таких випадках нічого страшного не станеться, але функція як математичний опис сюди просто відразу не підійде. Пізніше ми побачимо, що, трохи схитрувавши, ми зможемо користуватися функціями також і в цій ситуації.

ФУНКЦІЯ ЯК МАШИНА

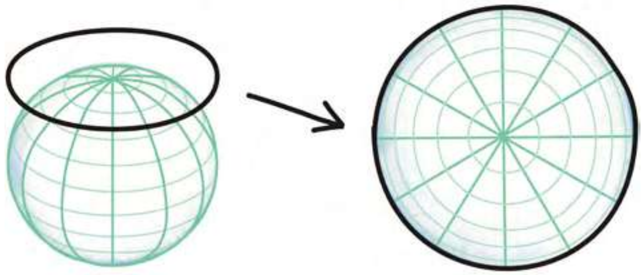
Функцію можна розглядати багатьма різними способами. Ми вже описали, що на неї можна дивитися як на список певного визначеного типу. Можливо, ще простіше буде уявити, що функція – це певний тип машини, що один за одним затягує в себе різні об'єкти, робить з ними абракадабру, а потім випускає їх знову ж таки, один за одним, іноді в зовсім невідомій формі.



Чудовим, взятим із життя прикладом функції, є таксометр, що справедливо рахує вартість поїздки. Якщо стартовий тариф становить 2,5 євро, а кожен кілометр коштує 0,5 євро, то таксометр – це прилад, що множить кількість проїханих кілометрів на 0,5, а потім додає до 2,5 євро.

Одна з ключових функцій у математиці – це, наприклад, квадратична функція: ви вводите в машину одне число, там за допомогою фокуса це число множиться саме на себе, і виводиться результат. Зверху на цій машині можна написати «квадратична функція», щоб не переплутати її з іншими машинами.

Декотра геометрична машина могла б, наприклад, узяти при введенні трикутник і вивести його площу або периметр. Машині, яка бере тривимірні фігури, розплющує їх великим молотком і виводить двовимірне зображення початкової фігури, ми можемо дати горду назву «проєкція». Це – прилад, що створює, наприклад, карти, витискаючи нашу гарну круглу земну кулю на двовимірний папір.



СТРОГЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ПОНЯТТЯ

Аналогія між функцією та машиною є хорошою та інтуїтивною, але в математиці необхідно також укладати поняття в межі точної форми.

Для цього нам просто потрібно уточнити, які об’єкти наша машина може приймати при вході і які – видавати на виході. Якщо зараз пригадується, що загальний набір об’єктів у математиці називається множиною, то й функції можна дати точне визначення.

Функцією множини A в множину B є правило, за яким кожен елемент множини A зв’язується відповідністю з одним визначеним елементом множини B.

Часто функції позначають, наприклад, буквою f.

Наприклад, піднесення числа до квадрату є функцією, оскільки воно пов’язує відповідністю кожен елемент множини дійсних чисел r з іншим елементом множини дійсних чисел r^2. Математично ми б записали це так: $f(r) = r^2$.

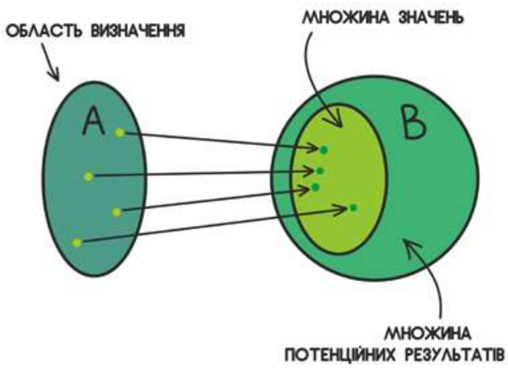
ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕННЯ

Множину A також називають областю визначення, адже функція є визначеною для всіх елементів множини A. Вона об’єднує в собі всі можливі для введення в машину об’єкти.

У нашому означенні кожен елемент множини B не має насправді бути об’єктом, що його нам машина видасть за результат – множина B формує множину потенційних результатів. Наприклад, квадрати чисел ніколи не є від’ємними, однак у нашому визначенні множина дійсних чисел також підходить на роль множини B. Просто часто буває важко визначити, що саме машина вирішить видати за результат, навіть якщо ми знаємо, до якого приблизного типу ці об’єкти належать.

Наприклад, якщо наша функція пов’язує відповідністю кожен будинок світу з його річним споживанням тепла, то всі відповіді, безумовно, будуть невід’ємними дійсними числами, однак важко передбачити, які саме числові значення ми отримаємо як результати.

Проте, іноді ми можемо точно визначити всі можливі об’єкти, які нам насправді може видати машина. Підмножина такої множини B називається множиною значень.



Наприклад, область визначення функції площі трикутника складають усі можливі трикутники, а множина значень – додатні дійсні числа.

Областю визначення згаданої у вступі функції днів народження будуть усі друзі, а областю значень – всі можливі дати.

У вступі ми також згадували, що, просто пов’язуючи відповідністю дати та людей, ми функції не отримаємо. Це – правда, однак лише за умови, що ми хочемо, щоб нашою областю значення були люди – у такому разі, функція, справді, не є чітко визначеною, адже на ту саму дату припадають дні народження багатьох.

Але водночас, якщо в нас виникне велике бажання використати для такого опису функцію, то ми можемо, натомість, зв'язати відповідністю кожну дату з усіма людьми, у яких на цей день припадає день народження. Іншими словами, ми змінили б область значень функції: елементами області значень більше не будуть люди загалом, а, натомість, всі можливі підмножини людей. Таким чином, ми й чудову функцію отримаємо, і душа може бути спокійна.

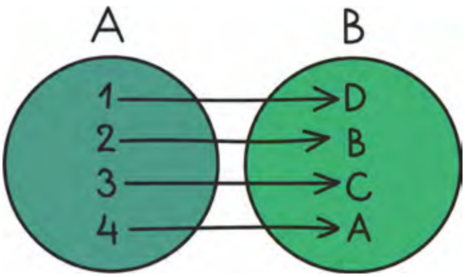
Це також справедливо в більш загальному сенсі: часто, розширивши область значень, ми можемо перетворити невірну функцію на вірну.

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

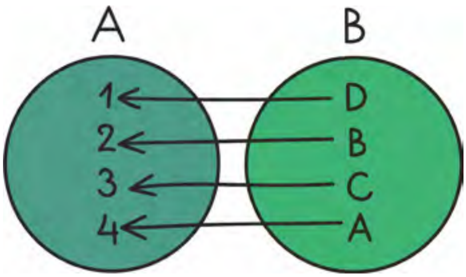
Так само, як існують різні види машин із надзвичайно різноманітними характеристиками, існують і функції з різними характеристиками. Загалом функцій дуже багато, і з ними всіма не можна однаково поводитися. Але, з огляду на певні характеристики, функції можна трохи впорядкувати та розподілити на класи – так само, як, наприклад, людей класифікують за статтю або віком для того, щоб знати, яку рекламу їм варто показувати, чи який одяг їм можна продати. Не варто лякатися, якщо іноді різного типу функції називають досить складними іменами.

ВЗАЄМНА ОДНОЗНАЧНІСТЬ ТА ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ

Наприклад, важливими вважаються функції, в яких кожному об'єктові області визначення відповідає рівно один об'єкт області значення. Такі функції також називають взаємно однозначними.



Ці функції робить чудовими та обставина, що в їх випадку ми можемо функцію перевернути й зв'язати також кожен об'єкт множини значень відповідністю з рівно одним об'єктом області визначення.



Таке зворотна відповідність і носить ім'я оберненої функції. Ми можемо побачити, що символічно це означає:

$$\text{обернена функція (функція(значення))} = \text{значення.}$$

Простим прикладом є функція $f(r) = 2r$, що множить кожне дійсне число на два. Обернена їй функція повинна кожне дійсне число на два ділити.

Для прикладу годиться й наша функція таксометра, адже у разі, якщо оплата не є погодинною, то, з огляду на сплачену суму, ми можемо точно розрахувати також і кількість проїханих кілометрів.

Звичайно, потрібно бути пильними, щоб виплачена сума була більшою за стартовий тариф, тобто знаходилася в межах множини значень функції таксометра.

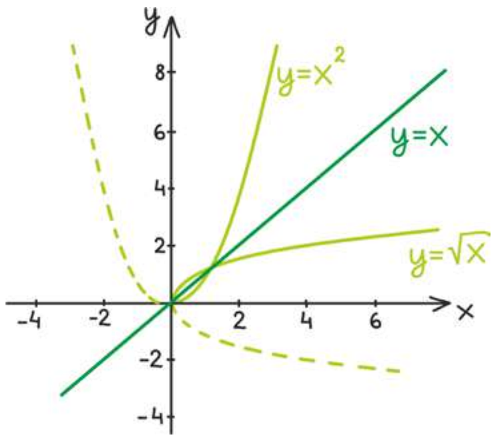
І все-таки більша частина функцій не є взаємно однозначними. Наприклад функція, яка після введення даних людини, видає її день народження, не є взаємно однозначною, тому що, знову ж таки, на один день припадає день народження в багатьох людей. Переважно, перешкода для взаємної однозначності полягає в тому, що різним об'єктам в області визначення відповідає один і той самий об'єкт в області значень.

Отже, квадратична функція також не є взаємно однозначною, оскільки вона відображає в одне й те саме число два різні числа, що відрізняються знаком. Також не є взаємно однозначною функція площі трикутника, адже кілька різних трикутників можуть мати точно таку саму площу.

Проте, ми часто можемо визначити обернені функції, якщо звузимо діапазон значень, або, іншими словами, зробимо певний вибір.

Наприклад, ми могли б визначити функцію, обернену квадратичній, як таку, для якої завжди обираємо додатний квадратний корінь. У цьому разі ми б дивилися на квадратичну функцію так, неначе вона визначена лише на множині додатних дійсних чисел. Щоб знайти обернену їй функцію, нам необхідно ніби поміняти ролі осей x та y. Тепер аргумент функції проходить вздовж осі y, а значення функції – уздовж додатної частини осі x.

Хитрий спосіб міркувати про це так: ми знайдемо обернену функцію саме тоді, коли віддзеркалимо графік функції відносно прямої $x = y$.



Ми зустрінемося з оберненими функціями на триваліший час, наприклад, під час вивчення тригонометричних функцій, де з'явиться той самий клопіт із однозначністю [с. 205].

СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ

Існує багато різних способів задання функцій, і, залежно від ситуації, зручніше користуватися одним, другим чи третім, а іноді – кількома відразу.

Таблицею чи списком

Один із найпростіших варіантів – це задати функцію як список чи таблицю: ми просто вказуємо кожному вихідному значенню відповідний результат. Це – досить компактний спосіб, якщо область визначення функції є крихітною, і водночас, значення не мають складної структури. Прикладом може стати наведений у вступі рисунок або, наприклад, таблиця частот, у яку ми запишемо, скільки днів червня цього року були сонячними, дощовими чи ні такими, ні іншими.

Погода	Кількість днів
Дощова	6
Сонячна	22
Середня	2

Формулою

Ще один поширений спосіб – задавати функцію формулою. Наприклад, так визначають переважну більшість функцій дійсних чисел. Простий приклад – це квадратична функція: $f(x) = x^2$.

Алгоритмом

Функції також можна представити алгоритмічно, що особливо важливо при роботі з комп'ютерами.

На наступній сторінці ми покажемо, як алгоритмом записати факторіал, тобто добуток чисел, починаючи від одиниці [ст. 382].

Словами

Іноді функцію найпростіше взагалі представити усно. Наприклад, ми могли б узяти функцію, яка встановлює відповідність між кожним трикутником та його площею, або функцію, яка встановлює відповідність між кожною людиною та її зростом.

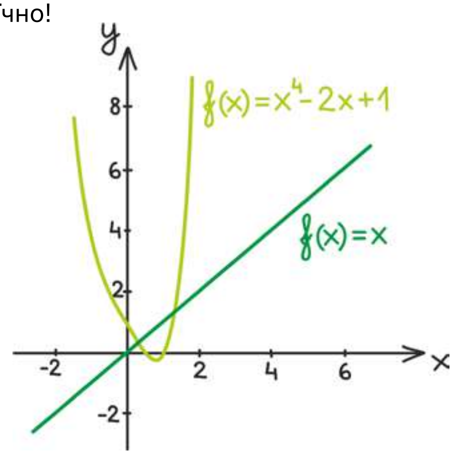
Графіком

Часто, функції корисно представляти графічно. Передусім, це стосується функцій дійсних чисел, чиї області визначення та значень – дійсні числа.

Нерідко дослідження функцій дійсних чисел можна звести до дослідження їх графіків. І хоча отримати точні відповіді за допомогою транспортира та лінійки не вийде, від геометричних аргументів та інтуїції можна отримати досить багато зиску.

У цій книзі ми побачимо, як геометрично можливо знайти формулу розв'язків квадратного рівняння [с. 275], або запам'ятати тригонометричні перетворення [с. 242], або навіть розв'язувати систему лінійних рівнянь [с. 187]. Існують також прекрасні геометричні інтерпретації для таких складних операцій, як узяття похідної чи інтегралу [с. 326].

У цьому місці ми наведемо як приклад графіки функцій $f(x) = x^4 - 2x + 1$ та $f(x) = x$, і побачимо, що вони перетинаються рівно у двох точках. Спробуйте показати це алгебраїчно!



Функції, які залежать від кількох вхідних значень, уже складніше зобразити графічно. Але в розділі 7, наприклад, ми використаємо рисунок, що покаже, як при киданні з розмаху водяної бомби, оптимальний кут кидка одночасно залежить від швидкості кидка та від швидкості розмаху [с. 338].

ФУНКЦІЯ У СВІТІ ІНФОРМАТИКИ

Для програмістів функції – це повсякденні інструменти. Комп'ютерні програми, насправді, і є наборами різних малих функцій, що виконують чітко визначені процедури з чітко визначеними вхідними даними.

Мабуть, найпростішими функціями є програми електронних таблиць, найвідоміша з яких – це Microsoft Excel. Там, у якій-небудь клітинці можна написати «$= \mathrm{A1} + \mathrm{B1}$», що скаже комп'ютеру, що значенням цієї клітинки є сума чисел, які наведені у клітинках $\mathrm{A1}$ і $\mathrm{B1}$. Йдеться про функцію, вихідним значенням якої є пара чисел, а результуючим – одне число.

Наведемо також один приклад функції, яка обчислює факторіал $n!$ [с. 382]. Нагадуємо, що факторіалом є всього-на-всього такий добуток: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$. Комп'ютер можна змусити обчислювати факторіали чисел за допомогою мови програмування Python приблизно так:

```
def factorial (n) :
    f = 1
    while (n > 0) :
        f = f * n
        n = n - 1
    return f
```

Ввівши цю функцію в дію за допомогою команди `factorial(5)`, ми отримаємо такий результат: 120.

Щоб розуміти мову комп'ютерів і давати їм команди, потрібно знати й відчувати їх мову.

У цьому разі ми визначаємо, що робить функція з назвою *factorial*, а потім даємо команду запустити цю функцію із вихідним значенням 5. В ідеалі, після цього функція повинна просто перемножити числа $5, 4, 3, 2, 1$.

Цю функцію записуємо так:

У першому рядку функції змінній f присвоюється значення 1. Сюди ми будемо записувати значення факторіалу. Наступною командою ми попросимо комп'ютер приводити в дію наступні два рядки доти, допоки значення змінної n перевищує 0.

По-перше, f множиться на значення змінної n.

По-друге, значення змінної n зменшується на одиницю.

Це означає, що спочатку ми множимо f на значення n, потім – на $n-1$, потім – на $n-2$ і продовжуємо це аж доти, доки не помножимо f на одиницю – завдяки третьому рядку коду, ми не дозволимо змінній n стати ще меншою.

Нарешті, останній рядок просто говорить про те, що функція повинна видати програмістові знайдене значення.

Іноді в мовах програмування з'являються також такі функції, що не видають результатів, а лише вносять деякі невеликі зміни. Можливо, щоб уникнути плутанини, їх буде простіше називати «процедурами».

ЧАСТИНА 2 –

ЧИСЛА

Бог створив натуральні числа,
все решта – справа рук людей.

Леопольд Кронекер

МНОЖИНИ ЧИСЕЛ

НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА

Натуральні числа – це ті числа, якими ми вночі рахуємо овечок: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Їх усіх разом, тобто їхню множину, позначають символом $\mathbb{N}$.

Натуральні числа – це, мабуть, найбільш природні математичні об'єкти, прості, але важливі. Оскільки вони даються взнаки відразу ж, щойно ми починаємо рахувати, то в описі світу без них не обійдешся, як не старайся.

Завдяки своїй природності вони також є одним із центральних об'єктів математики, а їх дослідженням ще далеко до кінця!

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Натуральні числа можна створювати на основі одного числа – числа 1 – і однієї математичної операції – додавання числа 1. Кожне натуральне число ми можемо отримати, якщо додамо одиницю до неї ж самої достатню кількість разів. Наприклад, щоб отримати число 10, нам потрібно до числа 1 додати 1 ще 9 разів.

$$\overbrace{1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1}^{12}$$

Отже, для кожного натурального числа існує ще одне натуральне число, що є більшим від нього на одиницю. Наприклад, навіть якщо у нас вже є 1000 друзів, ми можемо знайти ще одного доброзичливого хлопчину в горах Тибету, і тоді в нас буде вже 1001 друг – і ми мусимо вміти враховувати його також!

Отже, найбільше натуральне число знайти неможливо. Таке розуміння спочатку може здатися трохи несподіваним, але з іншого боку – чи є яка-небудь причина, чому найбільшому числу слід існувати? Отак ми вперше стикаємося із нескінченністю – загальна кількість натуральних чисел повинна бути нескінченною.

Натуральні числа можна описати та визначити також кількома іншими способами. Наприклад, у розділі про множини ви можете прочитати про те, як описати натуральне число, використовуючи лише множини [с. 61].

Напевно також варто зазначити, що 0 іноді також уважають натуральним числом, щоб позначити ситуацію, коли ще нічого не пораховано. Але це більше питання смаку, тому читач абсолютно вільний вирішувати сам, чи є 0 натуральним числом, чи ні. Однак наша позиція є зрозумілою: адже ми розпочали рахувати частини книги саме з нуля.

ПОЗНАЧЕННЯ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Натуральні числа існують у природі, їх незалежно використовували в різних культурних просторах, де були розроблені для них різні позначення. Далі ми представимо декілька найпоширеніших.

Десяткова система

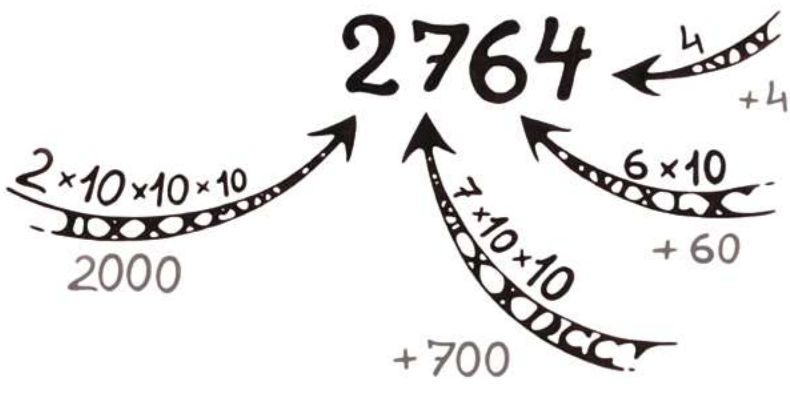
Ми звикли позначати натуральні числа за допомогою десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 і 9.

Оскільки ми використовуємо рівно десять різних символів, то таке позначення називається десятковою системою. У десятковій системі ми будуємо всі числа із одиниць, десятків, сотень (десять разів по десять), тисяч (десять разів по десять разів по десять) і так далі – гори десяток.

Наприклад розгорнутий запис числа 128 виглядатиме так:

$1 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 8$

а числа 9301 – $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 1$.



У розділі про степінь числа [с. 110] ми побачимо, що можемо одиниці, десятки, сотні і так далі записати за допомогою степеня десяти – вгорі праворуч дописуємо до 10 показник степеня, що каже, скільки разів ми маємо число помножити на 10:

$$1 = 10^0,\ 10 = 10^1,\ 100 = 10^2,\ 1000 = 10^3,\ 10000 = 10^4\ldots$$

Отже, ми можемо записати число 9301 ще більш компактно

$$9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1.$$

Двійкова система

Однак у світі комп'ютерів обчислення здійснюються у двійковій системі – всі числа записуються за допомогою двох цифр 0 і 1, і число підраховується не по десятках, а по двійках. Наприклад, число 3 у двійковій системі має вигляд 11, оскільки $3 = 1 \cdot 2 + 1$, число 5 має вигляд 101, оскільки $5 = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1$, а число 8 має вигляд 1000, оскільки $8 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Отже, подібно до десяткової системи ми можемо записати в загальному вигляді кожне натуральне число за допомогою числа 2, піднесеного до степеня.

Так, розглянуте раніше число 9301, ми можемо записати у двійковій системі трохи розлогіше:

$$9301 = 2^{13} + 2^{10} + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0.$$

Інакше кажучи, у двійковій системі число 9301 матиме вигляд 10010001010101.

Обов'язково треба запитати: чому, все-таки, в комп'ютерах все відбувається у двійковій системі? Причина дуже прозаїчна – у двійковій системі у нас найменше різноманітних символів, що їх потрібно якось позначати всередині приладу. Адже найпростіше побудувати комп'ютер з маленьких «вимикачів», які мають рівно два стани – або увімкнено, або вимкнено. Тож вони відповідають значенням 1 і 0. Отже, у двійковій системі простіше зберігати числа та виконувати операції. Подумайте самі, адже ж простіше додати між собою два, один і нуль, ніж, наприклад, сім і п'ять.

Єдиною складністю порівняно з десятковою системою є читання чисел – цифри біжать швидко й страшенно довго. Це могло б стати проблемою у повсякденному житті, але комп'ютер може відображати на екрані щось зручніше для нас.

Римські цифри

Римляни, натомість, для позначення натуральних чисел виводили дивні палички: наприклад нашу одиницю паличками позначали як I, наше 12 – XII, а наше 49 – IL.

Спробуйте знайти правила для додавання римських цифр або, ще гірше, – множення. Наприклад римляни додали б числа 69 і 145 так:

LXIX + CXLV

1. Треба замінити всі «відставні члени»:

LXVIIII + CXXXXV

2. Зібрати разом:

LXVIIIICXXXXV

3. Розсортувати:

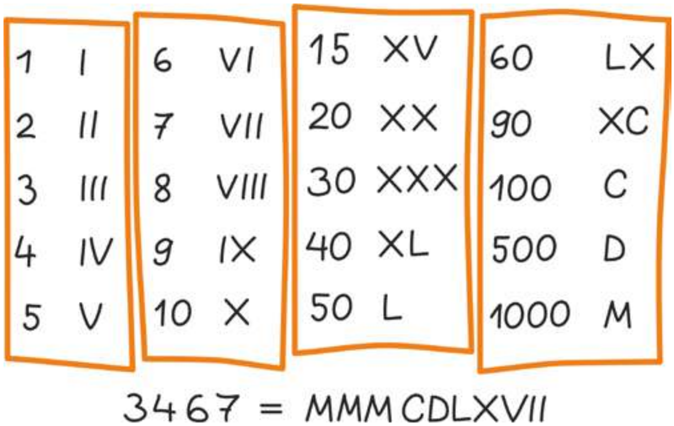
CLXXXXXVVIIII

4. Об'єднати в групи:

CCXIIII

5. Знову використати «відставні члени»:

CCXIV



Очевидно, ви досить швидко впевнитеся, що з такою системою числення майже неможливо займатися арифметикою. І справді, римляни своїми математичними знаннями чи діяннями в історії дуже не вирізняються.

Перетворення

Припустимо, що ваш не особливо хороший друг уперто вирішив використовувати двійкову систему й стверджує, що ви йому винні рівно 101010 євро. Прочитана в десятковій системі, ця сума була б досить вагомою, тому, очевидно, варто спробувати перевести число з двійкової в десяткову систему. Як це зробити?

Насправді, все вже було наведено раніше. Передусім давайте випишемо, що у двійковій системі означає $101010 : 101010 = 2^5 + 2^3 + 2$. Далі ми просто запишемо всі дані степені числа 2 у десятковій системі: $2^5 = 32$, $2^3 = 8$, $2 = 2$. Нарешті, ми мусимо додати отримані числа (тепер у десятковій системі), використовуючи свої звичні трюки з додаванням: отримаємо відповідь 42.

ЦІЛІ ЧИСЛА

Натуральні числа – просто чудові, але з ними також виникають деякі проблеми.

Ми можемо додавати натуральні числа і в сумі завжди отримуватимемо натуральне число: наприклад $3 + 4 = 7$ або $2 + 10 = 12$. Про додавання під час лічби можна думати дуже вільно: хтось дає вам ще чотири яблука на додачу до трьох або, наприклад, на додачу до вас та касира, у магазин раптом заходять ще 10 танцюристів.

Було б добре, якби ми також могли якось описати ситуацію, коли чотири яблука знову просять назад, або, де 10 танцюристів виходять із магазину. Ви одразу скажете, що, звісно ж, для цього є віднімання: $7 - 4 = 3$ або $12 - 10 = 2$.

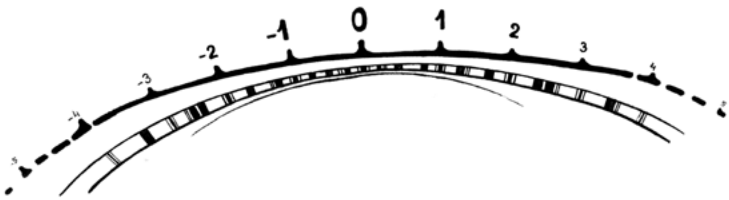
Однак виникає проблема: якщо в мене тільки 3 яблука, то в мене не можуть чотири яблука забрати, і, якщо в магазині всього 2 людей, то звідти не можуть вийти 10. Тому виходить, неначе частину чисел не можна між собою віднімати.

Дивно! Що це за числа, які можуть позначати щось, що є меншим, ніж нічого?

І хоча вже давно було запропоновано, що насправді можуть існувати також і числа $3 - 4$ та $2 - 10$, з ними довго не хотіли погоджуватися. Їх вважали неприродними. Що має означати це -1, що його дехто вважає різницею $3 - 4$, або -8, що його запропонували як значення виразу $2 - 10$? Якщо щось існує, то його має бути принаймні одна штука? Як може існувати кількість, ще менша за нічого?

На жаль, сьогодні деякі люди занадто добре знають, що можуть означати від'ємні числа – наприклад, борг! Перевірте в інтернеті свій банківський рахунок, він може запросто «піти в мінус», якщо занадто ревно витрачати гроші. Наприклад, можна думати про число -1 як про борг в одне яблуко перед старшим братом ...

Однак те, що від'ємні числа є цілком умотивованими та навіть природними, було погоджено лише в 19 столітті. До цього їх називали абсурдними, непотрібними і часто відмовлялися їх використовувати. Проте із від'ємними числами, насправді, цікавіше й красивіше – завдяки їм числова вісь не обривається на половині, а красиво тягнеться без початку й кінця.

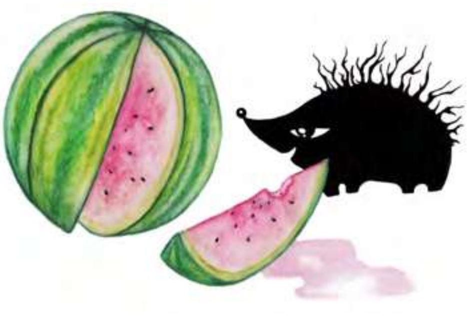


Про додавання та віднімання чисел ми можемо думати як про переміщення числовою віссю праворуч або ліворуч – додаючи чотири, ми робимо чотири кроки праворуч; віднімаючи сім – сім кроків ліворуч. Ми можемо додавати і віднімати всі цілі числа і завжди отримуватимемо, знову ж таки, ціле число у відповідь.

Множину цілих чисел позначають сиволом $\mathbb{Z}$.

РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

Проте цілих чисел для нас все ще не достатньо! Дійсно, порівну поділити шість яблук між трьома друзями легко – кожному даєте два. Але як порівну поділити між трьома друзями один великий кавун?

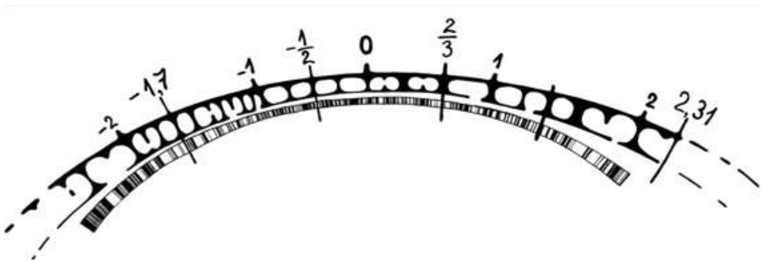


Звісно ж, у нас є відповідь: кожному другові треба дати третину кавуна. Однак проблема полягає в тому, що третина не є цілим числом – для ділення ми мусимо залучити ще й інші числа.

Вистачить того, якщо ми покличемо на допомогу всі числа, які отримаємо внаслідок ділення цілих чисел на інші цілі числа, крім нуля.

Такі числа називаються раціональними числами – вони мають вигляд $\frac{p}{q}$, де p і q є цілими числами. Раціональними числам є, наприклад, $\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{231}{100}$, але також і всі цілі числа, наприклад, $2 = \frac{2}{1}$.
Число, що стоїть над рискою дробу, називається чисельником, а число під рискою дробу – знаменником дробу. Множину раціональних чисел позначають символом $\mathbb{Q}$.

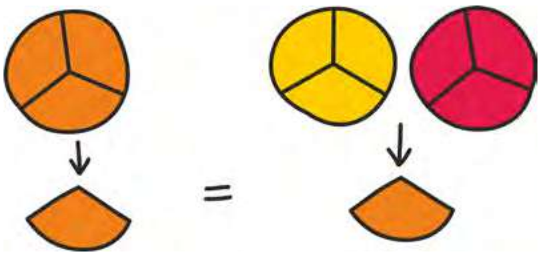
Якщо ми почнемо старанно відмічати раціональні числа на числовій осі, то помітимо, що їх є дуже багато, і на числовій осі вони можуть розміщуються як завгодно близько одне до одного. Справді, між кожними двома раціональними числами завжди знаходиться ще одне раціональне число: наприклад, між числами -2 і -1 знаходиться число $-1{,}7$, між числами 2 і $2{,}4$ – число $2{,}31$. Більш загально, між кожними двома довільними раціональними числами a та b знаходиться, зрештою, їх середнє арифметичне $\frac{a+b}{2}$.



НЕСКОРОТНІ ДРОБИ ТА МАТЕМАТИЧНІ ОПЕРАЦІЇ

Ми говорили, що будь-яке раціональне число отримаємо внаслідок ділення цілого числа на ціле число, відмінне від нуля. Отже, ми, насправді, отримаємо занадто багато чисел – багато з них будуть дорівнювати одне одному. Це дуже проста, але важливе зауваження.

І справді, оскільки внаслідок поділу двох кавунів на шість рівних шматків, шматки матимуть той же розмір, що й внаслідок поділу одного кавуна на три рівні частини, не всі числа, отримані через ділення цілих чисел, будуть відрізнятися, наприклад, $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$



Оскільки багато дробів є рівними між собою, то непогано було б знайти для них усіх одного найкращого представника. Для цього існує скорочення дробу. Для отримання нескоротного дробу ми поділимо знаменник і чисельник дробу на усі спільні для них дільники: наприклад, у нескоротному вигляді раціональні числа $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ і $\frac{4}{12}$ стануть $\frac{1}{3}$.

Обходитися з раціональними числами навіть безпечніше та легше, ніж із цілими. А саме: на додачу до додавання і віднімання ми можемо всі раціональні числа також і множити одне на одне, й ділити (утім, не на нуль!), і в результаті, завжди отримуватимемо знову-таки раціональні числа.

ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ

Раціональні числа також мають власне представлення в десятковій системі, потрібно просто взяти на озброєння кому та цифри після неї.

Наприклад $\frac{1}{2}=0{,}5$, $\frac{13}{8}=1{,}625$ і $\frac{1}{3}=0,(3)$, де три в дужках вказує на те, що цифра 3 повторюється нескінченну кількість разів.

Виявляється, що кожне раціональне число можна представити в десятковій системі або зі скінченною кількістю знаків дробової частини як $\frac{1}{8}=0{,}125$, або з дробовою частиною, що повторюється нескінченно: наприклад $\frac{1}{7} = 0,(142857)$ і $\frac{1}{12} = 0{,}08(3)$. Десяткові дроби другого типу називаються періодичними.

Надалі ми пояснимо трохи детальніше, чому раціональні числа мають саме скінченне або періодичне десяткове подання. Спочатку ми покажемо, що кожне число зі скінченним або періодичним десятковим поданням є раціональним числом:

Припустимо, що в нас є скінченний періодичний дріб.

У цьому випадку ми можемо позбутися цифр після коми, кілька разів помноживши число на 10. Наприклад, якщо число має два знаки після коми, як $0{,}25$, для отримання цілого числа нам потрібно помножити його на 10 рівно двічі – в такому випадку отримаємо ціле число 25. І далі ми можемо вже просто виразити число $0{,}25$ як частку двох цілих чисел, поділивши обидві частини рівності на 100.

$$0{,}25 \cdot 100 = 25 \qquad 0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Припустимо тепер, що наше число – нескінченний періодичний дріб.

Тепер, помноживши його кілька разів на десять, ми можемо перемістити кому настільки, щоб після коми залишився лише період. Наприклад, якщо період починається через одну цифру після коми, то ми маємо помножити число на десять один раз. Наприклад, у випадку числа $0{,}8\,(32)$ отримаємо число $8,(32)$.

Однак далі ми можемо продовжувати множити на десять доти, доки не почнеться другий цикл періоду. Якщо довжина періоду дорівнює двом, то вже отримане число ми маємо помножити ще на 100. У нашому конкретному випадку отримаємо число $832,(32)$.

Тепер, якщо відняти від другого числа перше, у нас залишиться ціле число – адже періодичні частини після коми взаємно знищаться. І далі ми вже можемо досить просто записати число $0{,}8\,(32)$ у вигляді звичайного дробу.

$$\begin{array}{rl} & 0{,}8(32)\cdot 10^3 = 832{,}(32) \\ - & 0{,}8(32)\cdot 10 = 8{,}(32) \\ \hline & (10^3-10)\cdot 0{,}8(32) = 824 \end{array}$$

$$0{,}8(32) = \frac{824}{990}$$

Відповідь на запитання, чому, навпаки, в кожного раціонального числа повинно існувати щойно описане десяткове подання, є вже трохи хитрішою і залишиться тут недоведеною.

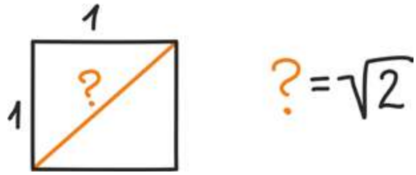
Важливо також зазначити, що десяткове подання не завжди є однозначним. Наприклад, у розділі про математичні рівності [с. 52] ми показуємо, що $1 = 0,(9)$.

ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА ТА ДІЙСНІ ЧИСЛА

За допомогою раціональних чисел ми можемо рахувати, додавати й віднімати, множити й ділити. Здається, що цього й так вже достатньо багато. Однак, як не дивно, все ще нам можуть спасти на думку геометричні конструкції, для опису яких раціональних чисел не вистачить.

ДОВЖИНА ДІАГОНАЛІ ОДИНИЧНОГО КВАДРАТА НЕ Є РАЦІОНАЛЬНИМ ЧИСЛОМ!

Намалюємо красивий одиничний квадрат та знайдемо довжину його діагоналі.



Позначаючи його діагональ через d, ми знаємо, наприклад, що відповідно до теореми Піфагора, $d^2 = 2$. Природне запитання: чи справді d – раціональне число?

Припустимо, що d є раціональним числом: у цьому випадку ми можемо записати d у вигляді нескоротного дробу $\frac{p}{q}$, де p і q є цілими числами, і в них немає спільного дільника. Виходить, що $p^2 = 2\ q^2$.

Але тепер справа від знака рівності – парне число, тому й зліва повинно бути парне число. Якщо p^2 є парним числом, то p не може бути непарним, бо непарне число в квадраті дає непарне число. Отже, p є парним, і ми можемо p записати у вигляді $p = 2a$.

Отож ми можемо p^2 записати як $(2a)^2 = 4a^2$. Підставивши це в початкову формулу, отримаємо $4a^2 = 2q^2$. Розділивши це на два, отримаємо $2a^2 = q^2$.

Але тепер ліва частина парна, а отже й q має також ділитись на два. Однак, це суперечить нашому припущенню, що $\frac{p}{q}$ – це нескоротний дріб. Тому d ніяк не може бути раціональним числом, бо інакше ми прийдемо до логічного протиріччя. Тому, натомість, воно є так званим ірраціональним числом!

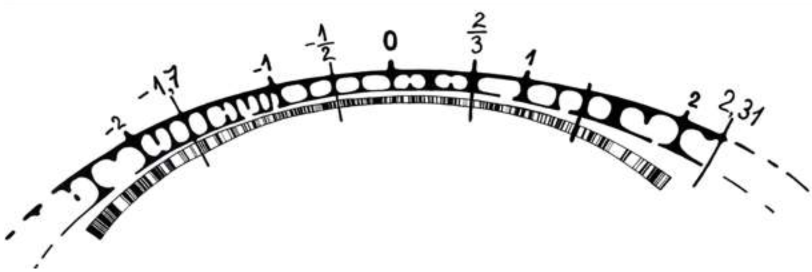
ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

Ох і мороки ж було, коли в Стародавній Греції виявили цю каверзу! Для них пропорції , тобто відношення цілих чисел, були однією з основ природи, і тому вони не хотіли погодитися з тим, що існують геометричні об'єкти, довжину яких не можна описати відношеннями цілих чисел. Кажуть, що одному математикові довелося взагалі через це відкриття з життям розпрощатися. Проте вірність математиці було збережено, і сьогодні в цих ірраціональних числах уже не вбачають великої загрози для здоров'я чи суспільства. Насправді, з ними змирилися ще навіть раніше, ніж з від'ємними числами – вони й справді здавалися дивними, але все ж їм було можливо знайти відповідники в природі та в геометричній уяві.

Ірраціональними числами називають усі числа на числовій осі, які неможливо подати у вигляді $\frac{p}{q}$. Багато з них можна представити як корені з цілих або раціональних чисел [с. 111], наприклад $d = \sqrt{2}$, а також $\sqrt[3]{7}$ є ірраціональними числами. Однак ірраціональні числа включають ще наприклад π і e. Однак довести ці факти досить складно, і досі невідомо, наприклад, чи належить π^e до раціональних, чи до ірраціональних чисел.

Ірраціональні числа мають також подання і в десятковій системі. Єдина проблема полягає в тому, що в такому вигляді їх ніяк не можливо представити точно – десяткове подання ірраціональних чисел є нескінечно довгим. Наприклад перші 20 знаків числа – це $3{,}1415926535897932384 6$..., але далі йдуть абсолютно непередбачувані числа, і навіть гірше – їх існує нескінченна кількість.

Позначивши всі раціональні та ірраціональні числа на числовій осі, ми нарешті отримаємо всю вісь разом – жодна точка не буде пропущена, жодної не бракуватиме. Усі числа разом на числовій осі утворюють множину дійсних чисел, яку позначають символом $\mathbb{R}$.



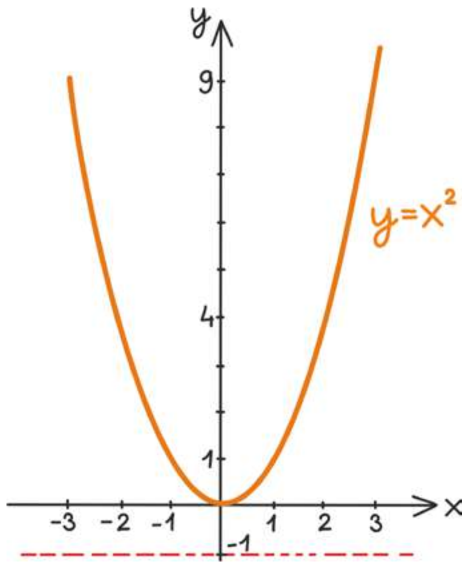
Якщо раціональні числа ми могли побудувати з цілих чисел, то точне математичне конструювання всіх ірраціональних чисел буде вже трохи складнішим. Ми можемо думати про ірраціональні числа як про числа, які можна записати за допомогою нескінченних неперіодичних десяткових дробів, але як їх додавати чи множити? Насправді прийнятного строгого опису математики досягли лише в 19 столітті, і для цієї мети можна використовувати поняття границі [с. 319].

А поки що про введення ірраціональних чисел приємно думати геометрично: ірраціональні числа заповнюють на числовій осі пропуски, залишені раціональними числами, а їх додавання просто означає переміщення числовою віссю – як і у випадку з додавання раціональних чисел.

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА*

Із дійсними числами можна привести в порядок усі повсякденні справи,... якщо тільки ви не збираєтеся кожного вечора шукати розв'язки квадратного рівняння $x^2 = -1$.

І справді, адже квадрат жодного дійсного числа не є від'ємним. Наприклад, $1 \cdot 1 = 1$ і $(-1) \cdot (-1) = 1$, тобто ні 1, ні -1 для розв'язку нашого квадратного рівняння не підходять. Можливо це буде навіть простіше побачити на графіку квадратичної функції:



Отож, якщо ми справді хочемо мати змогу записати розв'язки квадратного рівняння $x^2 = -1$, або квадратного рівняння $x^2 + x + 1 = 0$, або, наприклад, рівняння четвертого степеня $x^4 + x^2 = -3$, тоді ми, безумовно, повинні ще раз розширити нашу числову систему і ввести ще більше чисел.

Сказане раніше можна також переформулювати так: ми побачили, що з допомогою дійсних чисел можемо знайти всі числа x такі, що $x^2 = a$ для кожного невід'ємного a. Якщо тепер ми хочемо позбутися умови «невід'ємності», то мусимо-таки привнести сюди комплексні числа.

Якщо дозволити невеликий політ думки, то доречно для рівняння

$$x^2 = -1$$

запропонувати розв'язок $x = \sqrt{-1}$. І справді, оскільки добування квадратного кореня і піднесення до квадрату взаємно знищують одне одного, ми можемо записати

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1.$$

Отже, дозволивши новому винаходу $\sqrt{-1}$ стати розв'язком квадратного рівняння, ми розширили числову систему. Дивно, але цього розширення вистачить, щоб знайти розв'язки не лише рівнянь, наведених на початку розділу, але, насправді, й абсолютно всіх алгебраїчних рівнянь [с. 266]!

УЯВНЕ ЧИСЛО i ТА КОМПЛЕКСНА ПЛОЩИНА

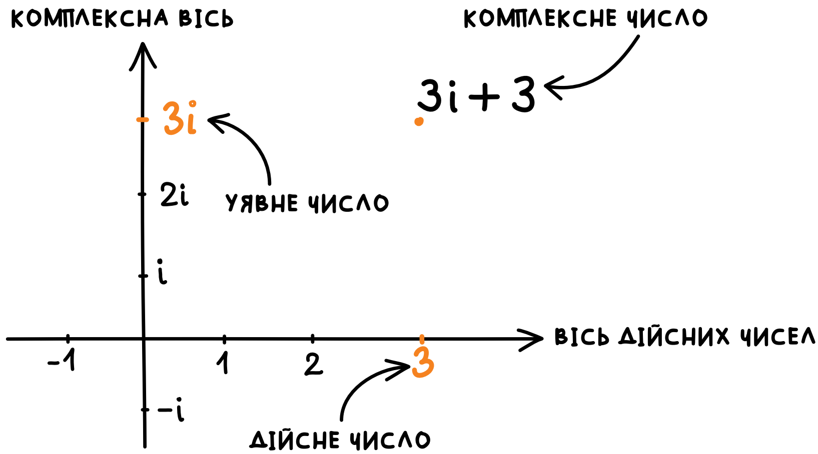
Після додавання ірраціональних чисел ми заповнили на дійсній осі всі пропуски. Куди ж тоді могли б поміститися ось ці комплексні числа?

Зазначимо, що, навіть якщо ми накреслимо на суцільну пряму лінію, на папері все одно залишиться ще ой як багато місця – і над, і під прямою залишиться незаповнений простір. Комплексні числа заповнюють увесь цей простір, вони заповнюють собою цілий аркуш паперу.

Отже, комплексні числа є в певному сенсі двовимірними числами: можна сказати, що вони мають дійсний вимір і уявний, тобто комплексний, вимір, появу якого спричинило введення нового числа $\sqrt{-1}$, Давайте зараз же пояснимо це!

Це число так і називається – уявним числом, і оскільки його нудно виписувати кожного разу, ми дамо йому назву i. Назва «уявне число» випливає саме з того, що, принаймні спочатку, здавалося, що i існує лише в уяві самих математиків, а не в зовнішньому світі.

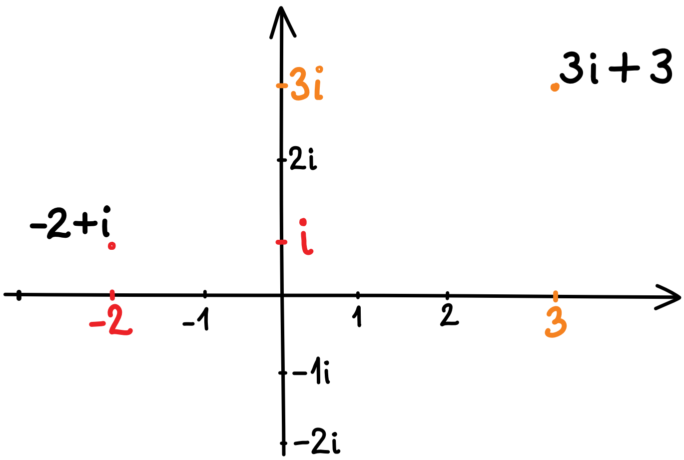
Нагадаємо, що число 1 можна розглядати як одиницю дійсного виміру – додаючи або збільшуючи-зменшуючи її, ми рухаємося по горизонтальній осі. «Уявне число» i є одиницею комплексного виміру, додаючи або збільшуючи її, ми рухаємося по вертикальній осі. Вона знаходиться на такій самій відстані від нульової точки, що й одиниця осі дійсних чисел.



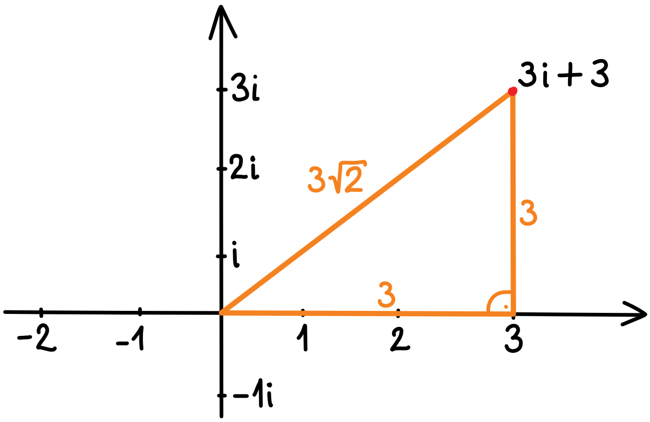
Отже, інші точки комплексної осі подаються у формі $2i$; $0{,}3i$; $14i$ і так далі.

Ми отримаємо всі можливі комплексні числа, якщо розглянемо числа, записані у вигляді $c = a + bi$, де a та b є дійсними числами. Дійсне число a називається дійсною частиною комплексного числа, а b – його уявною частиною.

Намалюємо на комплексній площині, наприклад, точки, що відповідають числам 3, $3i$, $3 + 3i$, $-2 + i$.



Для кожного дійсного числа, ми можемо говорити про його абсолютну величину, тобто модуль – ми маємо на увазі відстань між відповідною йому точкою на числовій осі й нульовою точкою [с. 120]. Так само можна і в випадку кожного комплексного числа говорити про його модуль – відстань між відповідною йому точкою на комплексній площині й нульовою точкою. Цю відстань, звісно ж, можна знайти за допомогою теореми Піфагора.



АЛЕ Ж КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ НЕ ІСНУЄ!

Як ми говорили раніше, у математиків та всього людства були великі труднощі з від'ємними числами – лише кілька сотень років тому було погоджено, що йдеться про абсолютно вмотивовані та природні числа, займатися якими аж ніяк не означає творити богохульство.

У цьому світлі сумніви щодо доцільності та природності комплексних чисел є у всіх відношеннях зрозумілими. Проте, подана нижче таблиця, де ми порівнюємо від'ємні та уявні числа, може переконати, що і комплексних чисел немає сенсу боятися.

На питання, чи існує число $4 + 5i$, звичайно, відповісти важко, але так само важко сказати, чи існує число 4 або 5. І все ж, сьогодні комплексні числа, поряд із дійсними числами, знайшли своє певне місце в описі світу та природи.

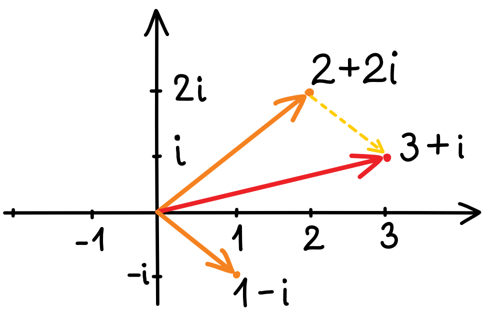
	Від’ємні числа	Уявні числа
Надати зміст	числу $3-4$?	числу $\sqrt{-1}$
Дуже дивні, бо ...	як що-небудь може бути меншим, ніж нічого?	зазвичай корінь числа є додатним
Утворюють частину	дійсних чисел	комплексних чисел
Візуально	точка на числовій осі зліва від нульової точки	точка на осі, що перпендикулярна до числової осі у нульовій точці
Вважалися абсурдом	до 18-того століття	до сьогодні
Простий приклад множення числа на себе та візуальна інтерпретація	З числом -1: $1-1; 1; -1...$ Віддзеркалення точки, що відповідає числу, від нульової точки	З числом i: $1; i; -1; -i; 1; i...$ Поворот точки, що відповідає числу, на 90° на комплексній площині
«Величина»	відстань від нульової точки	відстань від нульової точки
Дають про себе знати в таких речах	борги, рух у протилежну сторону, низькі температури	квантова механіка, аналіз сигналів

ОПЕРАЦІЇ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Виявляється, що комплексні числа – просто чудові, і з ними можна робити все те саме, що й з дійсними числами, й навіть більше.

Додавання та віднімання

Комплексні числа можна додавати і віднімати, потрібно просто окремо додати чи відняти дійсну та уявну частину: наприклад $(1-i)+(2+2i)=3+i$. Так само, як про додавання дійсних чисел можна думати як про рух по осі дійсних чисел в одну чи іншу сторону, додавання комплексних чисел також можна розглядати геометрично. Цього разу ми просто рухаємося по комплексній площині, відповідну кількість кроків вздовж дійсної осі, і відповідну кількість – вздовж уявної осі.



Множення та ділення

Комплексні числа можна теж успішно множити одне на інше й навіть ділити. Як і раніше, результатом буде завжди комплексне число, наприклад

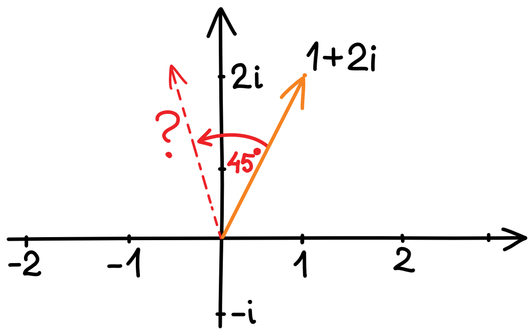
$$(1+i)\cdot(1+i) = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$$

та

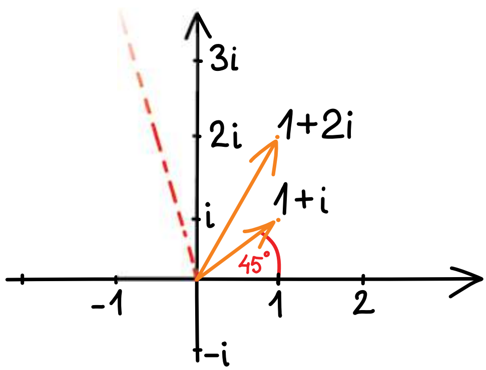
$$\frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{1-i^2} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i.$$

Множення комплексних чисел має також красиву геометричну інтерпретацію – поворот на площині.

Припустимо, що нам дано комплексне число $1+2i$, і ми хочемо знайти нове комплексне число, що відносно даного числа знаходиться під кутом 45° проти годинникової стрілки.



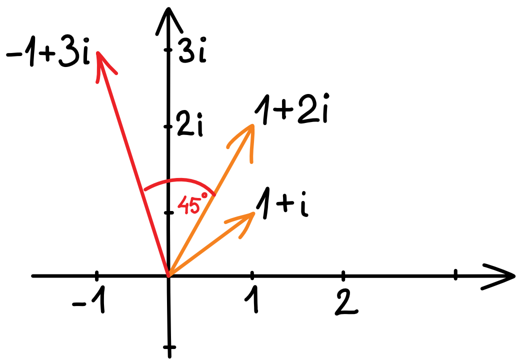
Виявляється, що для знаходження цього комплексного числа, ми можемо просто помножити дане число на яке завгодно комплексне число, що знаходиться під кутом 45° відносно дійсної осі: наприклад на число $1+i$.



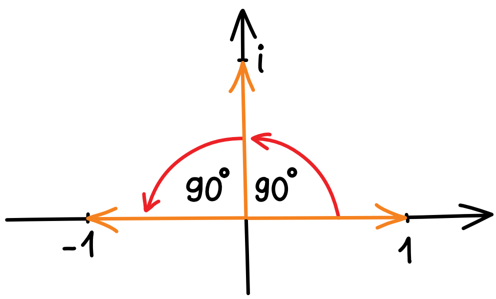
Звісно ж, ми не мусимо вірити в усе це, посилаючись лише на малюнок. (І не варто вірити!). На щастя, алгебра чудово підтверджує наші твердження. І фактично, добуток ми можемо записати так:

$$(1 + 2i)(1 + i) = 1 + i + 2i + 2i^2 = -1 + 3i.$$

І, як бачимо на малюнку, $-1 + 3i$ знаходиться рівно під кутом 45° відносно $1 + 2i$, хоч справді досить далеко від нульової точки. Це через те, що для множення недостатньо лише додати кути, а потрібно перемножити ще й модулі.



Отже, для множення на уявне число i, йдеться лише про поворот на 90° – адже відстань від точки, що зображує це число, до нуля дорівнює точно 1. Отже, число 1 внаслдок множення на i переходить точно i, а число $1 + i$ внаслідок множення на i переходить в число $-1 + i$. Це також пропонує нову інтерпретацію множення на число -1: на дійсній осі, множення на число -1 трактувалося як віддзеркалення від нульової точки, але тепер, знаючи, що $-1 = i^2$, ми можемо на комплексній площині множення на -1 також вважати поворотом на 180°.



ВІДОМІ ЧИСЛА: π ТА e

Деякі числа відіграють у математиці досить своєрідну роль. Як перший приклад, на думку спадають числа нуль та одиниця.

Нуль впадає в око тим, що внаслідок множення та додавання поводиться по-різному: помноживши будь-яке число на нуль, в результаті отримаємо нуль, а, додаючи нуль до будь-якого числа, отримаємо те ж саме число, що й раніше. Такою же своєрідною є й одиниця, адже після множення на одиницю, будь-яке число залишиться таким самим, а всі степені одиниці – рівні між собою.

Серед чисел в історії, безумовно, варте згадки $\sqrt{2}$, яке показало, що самих раціональних чисел для опису світу аж ніяк не достатньо [с. 87].

Чому б не назвати також уявне число i, за допомогою якого ми розширили поле дійсних чисел, увівши комплексні числа [с. 89] або число золотого перетину $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, що вважається ідеалом краси [с. 135].

Однак у цій главі ми детальніше поговоримо про ще два захоплюючі та відомі числа, без яких у шкільній математиці не обійтись, як не намагайся. Представляємо наших героїв: π та e.

π

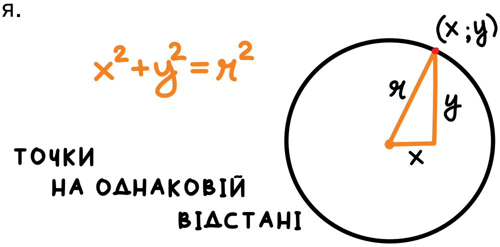
Число π в нас усіх, імовірно, асоціюється з колом. Тож почнемо знайомство з числом π з невеликих роздумів про коло.

ЯК ДУМАТИ ПРО КОЛО?

Коло – це красивий математичний об'єкт, якому, звісно ж, не важко знайти відповідники в реальному світі. Подібно до того, як у повсякденному житті ми стикаємося з круглими предметами в дуже різних ситуаціях, математично про коло також можна думати багатьма способами.

За допомогою циркуля

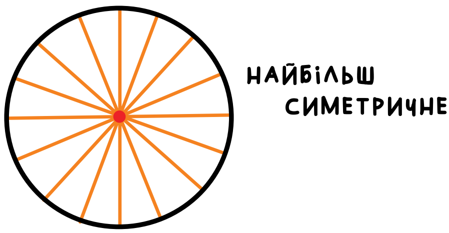
Бесідуючи про множини [с. 60], ми вже згадували один спосіб опису кола: коло можна описати як множину усіх точок площини, рівновіддалених від однієї даної точки (центра кола). Це пояснює, чому ми можемо побудувати коло саме за допомогою циркуля.



Найкругліше

Проте опис, наведений вище, мабуть, не буде першим, до якого передусім мала б прийти людина-нематематик. Щодо кола, в пам'яті відкладається, передусім, його округлість та симетрія. Наприклад, колесо піднятого в повітря велосипеда можна нескінченно обертати навколо його осі, і ми помічатимемо лише рух спиць – саме колесо здаватиметься немовби нерухомим.

Виявляється, що з огляду на це спостереження, коло також можливо чітко і математично правильно означити: коло – це єдина плоска замкнута лінія, положення якої неможливо змінити, скільки ми б її не обертали навколо певної точки. Більш математично: коло – це лінія з найбільшою кількістю поворотних симетрій.



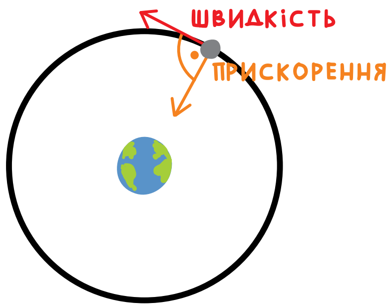
Співвідношення площі та периметра

Якщо чабану потрібно побудувати огорожу для овець так, щоб за певної кількості матеріалу (тобто маючи лінію певної довжини) було можливо використати якомога більше пасовища (тобто охопити найбільшу площу), тоді він знову ж таки отримає цілком пристойне коло.

Погляд фізиків

Зате фізики, напевно, сказали б, що коло – це єдина траєкторія на площині, при русі по якій прискорення і швидкість завжди будуть взаємно перпендикулярними. У цьому випадку прискорення змінює лише напрям швидкості, а не її величину. Відбувається плавний красивий рух по колу.

Наприклад, більшість супутників рухається навколо Землі по колу. Утім, для створення ідеально круглої орбіти, потрібно ретельно підібрати швидкість. Фізики добре з цим справляються. Але комети, наприклад, цього не вміють і кружляють навколо Сонця по дуже розтягнутій еліпсоподібній орбіті.

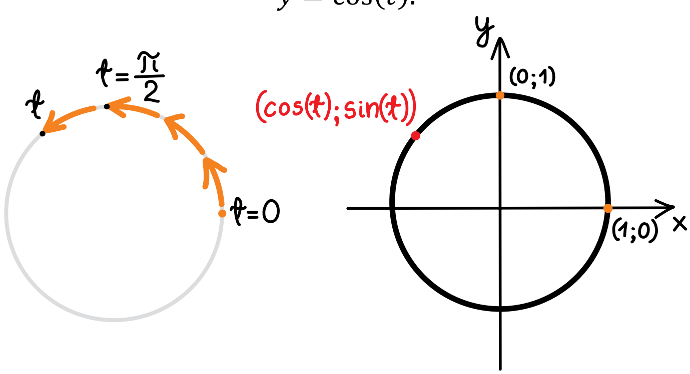


Параметричні рівняння

Однак, якщо стикнутися з математикою в університеті, то можна зустріти ще одне зовсім нове означення кола. А саме: кожну криву на площині можна задавати значеннями певних функцій. Правильно підібрані функції точно описують коло, а аргумент функцій вказує наше місцезнаходження на колі. Для опису кола ми можемо використати функції синус та косинус, про які йдеться також в розділі про тригонометрію [с. 230].

Ми отримаємо параметричні рівняння, що описують всі точки $(x;\ y)$ кола, коли t змінюється від 0 до 2π, а x та y такі:

$$x = \sin(t)$$
$$y = \cos(t).$$

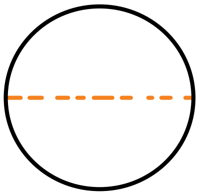


Отриманий так опис називається рівнянням кола в параметричній формі.

Усі п'ять наведених вище означень кола є математично еквівалентними. Тому, мабуть, буде зовсім не зайвим сказати, що коло – це універсальний і красивий математичний об'єкт. Коло створює у математиці зв'язки, а в описі всієї природи йому відведено центральне місце. Рух по колу ще у стародавніх греків вважався ідеальним, а тому, звісно ж, є досить чудовим те, що навіть планувальники дорожнього руху вирішили, що найбезпечнішими перехрестями є саме кругові перехрестя.

КОЛО ТА π

Ми знаємо, що, якщо, наприклад, збільшити сторони квадрата в десять разів, то у стільки ж разів збільшиться і його периметр. Інакше кажучи, відношення його периметра до довжини однієї з його сторін завжди буде одним і тим самим числом – числом чотири. Те саме правило діє і у випадку всіх інших правильних многокутників. Мова йде про більш загальне правило – прості елементи в сумі збільшуються або зменшуються рівно таку ж кількість разів. Виявляється, що відношення довжини кола до його діаметра, також – завжди одне й те саме число. Саме це число ми й називаємо числом π.



$\bigcirc : — = 3{,}14159265\ldots = \pi$

Як ми вже зазначали, розповідаючи про ірраціональні числа, π є ірраціональним числом, тобто, інакше кажучи, усі десяткові знаки його дробової частини ніколи не буде можливо виписати до кінця, адже їх нескінченно багато, і вони ніколи не будуть періодично повторюватися. Якщо придивитись до дробової частини π дещо ближче, то відчувається, що у них немає жодного шаблону чи закономірності – схоже, що усі цифри зустрічаються однаково часто і перемішані вони абсолютно випадково.

ЗНАХОДЖЕННЯ ЗНАЧЕННЯ ЧИСЛА π

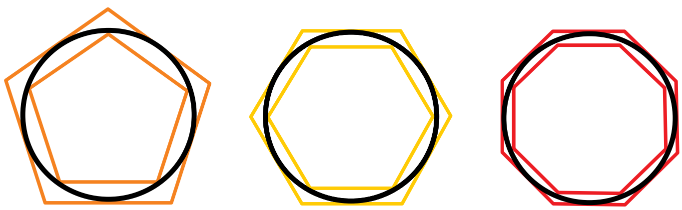
Точне значення числа π не так вже й просто обчислити. Вавилоняни вже у 19 столітті до нашої ери використовували для π значення $\frac{25}{8}$, що лише на $0{,}5\%$ відрізняється від істинного значення. Подібні приблизні значення використовували усі стародавні цивілізації.

Усі ці наближення досить близькі до точного значення, і такої точності було достатньо, скажімо, для розрахунку будівельних конструкцій. Для практичного застосування у нашій школі ми використовуємо для π наближене значення $3{,}14$, а в Сполучених Штатах, наприклад, використовують наближення, що дорівнює $\frac{22}{7}$. Відразу ж може виникнути запитання: яке наближення точніше?

Однак залишається ще цікавіше запитання: як, все-таки, обчислити точне значення π? Чи, правильніше, як знайти все більшу і більшу кількість десяткових знаків числа π?

Оскільки π дорівнює відношенню довжини будь-якого кола до його діаметра, то ми можемо вибрати коло, діаметр якого дорівнює одиниці. У цьому випадку для обчислення π нам необхідно дізнатись лише довжину кола. У школі, звісно ж, навчають, як знаходити довжину кола за допомогою π, однак це нам аж ніяк не допоможе, якщо ми й значення π все ще не знаємо.

Загальновідомо, що Архімед був першим, хто в 250 році до н. е. відкрив хороший спосіб знаходження довжини кола, а отже і значення числа π. Поважний мислитель просто почав будувати описані навколо кола та вписані в коло правильні многокутники з усе більшою і більшою кількістю кутів. Як видно на малюнку, поступово ці многокутники стають все більше схожими на саме коло. Однак, знайти периметр правильних многокутників легко, і отже, значення π можна також обчислити все точніше й точніше.



Сам Архімед спромігся визначити лише те, що π знаходиться між числами $3{,}14084$ і $3{,}142857$. Утім, теоретично ми могли б використати його метод для обчислення π з бажаною точністю.

Більше 600 років тому індійський математик Мадхава Сангамаграма знайшов на диво просту формулу, якою π можна визначити зовсім по-іншому:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

Оскільки доданки в цій сумі стають все меншими й меншими, то за цією формулою ми також можемо встановлювати значення π все точніше й точніше.

Ми також можемо оцінити значення числа π за допомогою геометричної ймовірності, однак докладніше про це – у розділі про ймовірність [с. 402].

Сьогодні, звісно ж, для обчислення десяткових знаків π використовують комп'ютери, і на цей момент відомо більше $10\ 000\ 000\ 000\ 000$ десяткових знаків числа π. Для цього використовуються аналоги формули, відкритої Джоном Мечином у 1706 році:

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

Запам'ятовування числа π

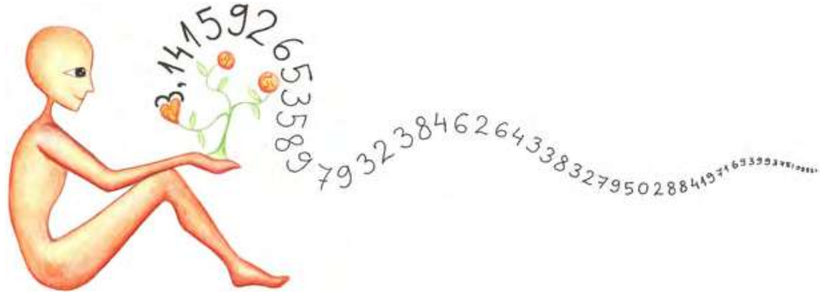
Багатьом число π здавалося магічним, і тому впродовж історії бували такі, хто вчив напам'ять десяткові знаки числа π. Наприклад, за легендою навіть Ісаак Ньютон завчив 16 десяткових знаків. Однак пізніше він вибачився перед народом за те, що змарнував час на таку нісенітницю. На сьогодні деякі люди (як зі шпаргалками, так і без них) можуть назвати вже понад 100 000 десяткових знаків.

Чи правильно означено π?

Зі всією цією манією здається іронічним те, що, можливо, можна було б означити трохи по-іншому. Замість того, щоб ділити довжину кола на діаметр, можна було б поділити довжину кола на, скажімо, радіус.

Значення означеного у такий спосіб числа π_1 буде дорівнювати подвоєному π. У деякому сенсі це було б навіть красивіше: наприклад, тоді чверть одиничного кола була б дугою з довжиною $\frac{1}{4}\pi_1$, а не дивним $\frac{1}{2}\pi$, а періодом синуса й косинуса [с. 214] було б гарне π_1, а не 2π. Більше того, тоді нова формула площі круга $\frac{1}{2}\pi_1 r^2$ нагадує відомі фізичні формули для знаходження, наприклад, кінетичної енергії або пройденої відстані внаслідок постійного прискорення.

І звісно ж, бідні знавці десяткових знаків числа π мусили б знову починати все з нуля ...



e

Як і число π, e позначає одне певне число –

$$2{,}71828182845904523602874713526624977572470936999 5\ldots$$

На жаль, записати його тут у всій величі не вийде, оскільки йдеться про ірраціональне число [с. 87].

Правду кажучи, це також не та визначена послідовність цифр, у якій математики мали б побачити велику красу. Важливість та краса числа e полягає в його універсальності. Воно визирає з кількох різних розділів математики і створює між ними несподівані зв’язки.

ДАЄТЬСЯ ВЗНАКИ?

Число e найчастіше дається взнаки у зв’язку з показниковою функцією та логарифмами. А саме: найзручніше мати справу з показниковою функцією тоді, коли основою степеня виступає саме число e [с. 284], а ще найбільш природно розглядати логарифми за основою e [с. 295].

Воно також відоме тим, що ховається у багатьох формулах. Вже в цьому розділі ми побачимо багато з них, наприклад, як визначити e за допомогою лише множення та додавання.

Число e трапляється і в інших місцях. Наприклад, виявляється, що за допомогою e комплексні числа можна представити в набагато зручнішій формі, і що в аналізі сигналів тригонометричні функції також корисно представляти, саме спираючись на e. На додачу, число e несподівано з'являється, наприклад, у теорії імовірності. Мабуть, можна сказати, що e – це хлопак із досить широким амплуа,і тому займає в математиці важливе місце.

КІЛЬКА СПОСОБІВ ОПИСУ ТА ОЗНАЧЕНЬ ЧИСЛА

Ми розпочали розділ про число π з кількох різних математичних описів кола. Виявляється, що число e також має чимало різних описів. Надалі ми виділимо два з них і спробуємо їх також інтуїтивно поєднати.

Число е через складні відсотки

Припустимо, що з'явилася можливість розмістити кошти у банку щедрих людей. Договір банківського депозиту може передбачати такі відсоткові ставки:

100% річних, або

50% за пів року, або

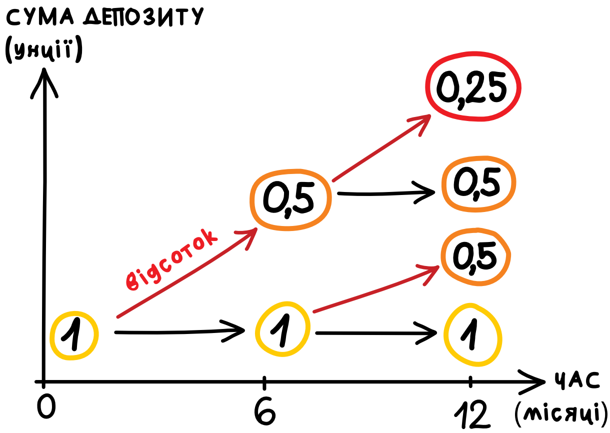
25% за квартал.

Який із цих варіантів був би найбільш вигідним, якщо нараховані відсотки кожного разу додаються до банківського вкладу? Чи, натомість, було б вигідно ще більше позловживати добротою щедрої людини й попросити $\frac{1}{365} \cdot 100\%$ кожного дня?

Щоб зрозуміти ситуацію точніше, зручно припустити, що початковий депозит – це, наприклад, одна унція золота.

100% річних означає, що в кінці року в нас буде рівно 2 унції золота.

50% за пів року означає, що, коли мине пів року, депозит становитиме вже $1{,}5$ унції золота. За наступні пів року буде додано ще 50% від з уже нарощеної суми, і всього в кінці року в нас буде вже $2{,}25$ унції золота.



25% річних за квартал означає, що в кінці кварталу сума депозиту становитиме 1,25 унції золота. У кінці півріччя буде додано ще 25% від нарощеної суми, тобто всього на той момент у нас було б 1,5625 унції золота. У кінці третього кварталу накопичиться вже 1,953125 унції золота, а в кінці року, ми зможемо мати 2,44140625 унції золота.

Схоже, що хоча у всіх трьох випадках сума відсотків за весь період є однаковою, набагато вигідніше отримувати відсотки частіше.

Чи є в цієї прибутковості яка-небудь межа, чи можна за рік стати мільйонером?

У році приблизно $3{,}154 \cdot 10^7$ секунд. Якщо поділити рік на секундні періоди, і щосекунди отримувати відсотки, то під кінець року накопичиться

$$\left(1 + \frac{1}{3{,}154 \cdot 10^7}\right)^{3{,}154 \cdot 10^7} \approx 2{,}718281785366436$$

унції золота.

Уважний читач помітить, що отримана сума є вже дуже близькою до значення числа e, наведеного у вступі – перші шість десяткових знаків збігаються.

От і виявляється, що, незалежно від того, як часто нараховуються відсотки, існує верхня межа прибутковості, яка досягається тоді, коли відсотки виплачуються безперервно [с. 317], тобто ще частіше, ніж кожної наносекунди. Саме ця верхня межа й дорівнює e! Якраз із нашої попередньої дискусії витікає також компактна формула, що її можна зустріти на уроці математики:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

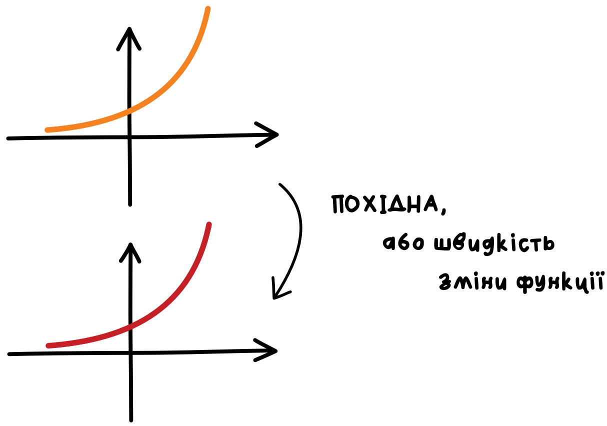
Справді, припустимо, що рік поділений на n періодів. У кінці кожного періоду купа золота зростатиме в $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ разів, порівняно з попереднім періодом. Отже, у кінці першого періоду, матимемо $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ унцій золота, в кінці другого періоду – $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ унцій, а в кінці року – $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ унцій. У граничному переході, коли n прямує до нескінченності, величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ в точності стає числом e.

Число *e* через функції

З'ясувалося, що цей процес зростання суми депозиту з постійною процентною ставкою описується показниковою функцією e^x [с. 280], де x-ом ми незвично позначаємо час. Серед інших функцій ця функція є особливою, оскільки в будь-який момент швидкість її росту, тобто похідна, дорівнює значенню самої функції. Інакше кажучи, похідною функції e^x є та ж сама функція, тобто e^x.

Виявляється, що всі функції, які задовольняють дану умову, мають вигляд Ae^x, де A – будь-яке дійсне число. Якщо A не дорівнює нулю, то для кожної такої функції, її відносний приріст на одну одиницю, тобто відношення $\frac{f(1)}{f(0)}$, дорівнює точно e. І справді, ми можемо записати $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{Ae}{A} = e$.

За допомогою цього спостереження ми також можемо визначити e: нехай $f(x)$ – функція , похідна якої є, знову-ж таки, сама $f(x)$, і тоді ми визначаємо e як відносний приріст цієї функції на одну одиницю: $e = \frac{f(1)}{f(0)}$.



ФАКТОРІАЛ ТА e*

З попереднім описом також пов'язане означення числа лише за допомогою додавання та множення у вигляді:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

Якщо ми використаємо факторіал [с. 382] і напишемо, наприклад, що $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, а на додачу поставимо ще й кривульку на позначення суми [с. 50], то ця формула виглядатиме досить красиво й компактно:

$$e \; = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Хіба ж це не дивно? Як це пояснити?

Точне пояснення є досить технічним і передбачає розуміння понять похідної [с. 320] та многочлена [с. 266].

Для початку згадаймо одну прекрасну властивість многочленів [с. 268]. Ми бачили, що в певному сенсі кожну функцію можна дуже точно описати добре підібраним многочленом.

Чи можливо ж знайти многочлен, похідна якого майже в кожній точці дорівнює йому самому?

Ми знаємо, що похідною кожної степеневої функції x^n є nx^{n-1}. Отже, якщо многочлен має член ax^n, то він також повинен мати член nax^{n-1}, адже в іншому випадку початковий многочлен і многочлен, отриманий чрез знаходження похідної, не були б рівними. І навпаки, якщо у многочлена є член ax^{n-1}, то повинен бути також член $a\frac{x^n}{n}$.

Тепер припустимо, що у многочлена є вільний член рівний 1. Тоді обов'язково повинен існувати також член x, а ще члени $\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{2 \cdot 3}$ і так далі.

$$1$$

$$1 + x$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$$

ПОХІДНА

Як бачимо, ми ніколи не можемо зупинитися, бо інакше похідна не дорівнювала б самій функції. Проте ми можемо виписати суму всіх цих членів

$$\sum \frac{x^n}{n!}.$$

Ця сума більше не є многочленом, і не зрозуміло, чи це взагалі розумний об'єкт (наприклад, чи не може для будь-якого x значення суми бути нескінченно великим). У будь-якому випадку, суто формально, застосувавши операцію знаходження похідної, отримаємо точно таку само суму.

На щастя, математика – прекрасна, і виявляється, що ця сума – цілком обґрунтована. Вона справді має певне значення для будь-якого дійсного числа x, і це значення дорівнює значенню функції e^x, про яку ми згадували раніше. Отже, можемо записати

$$e = e^1 = \sum \frac{1}{n!}.$$

НАРОДНА ТВОРЧІСТЬ

Найпоширенішою літерою в естонській мові є літера a, однак в англійській, німецькій та французькій, такою літерою є e. І хоча це вряд чи можна вважати ознакою більшої любові до математики серед цих народів, e є найулюбленішою літерою саме для математиків.

Ми теж настільки її любимо, що не могли не створити маленьку народну пісню:

Ти ступаєш по полю, і навколо роздається клич птахів:

«Ле-ло-ле
Найкрутішою в математиці є e!»

Ти сидиш у класі, вчитель та крейда,
створюються рівняння «Ле-ло-ле»,–
із дошки до тебе співає e!

Ти в банку, і тобі тихо шепочуть: «Ле-ло-ле
твої гроші виростуть, дякуй e!»

Ти ступаєш по місту,
і навколо роздаються кличі городян:
«Ле-ло-ле
Чому я вчити мушу e?»

НАЙКРАСИВІША ФОРМУЛА В МАТЕМАТИЦІ

У цьому розділі ми згадували про нейтральний елемент щодо операції множення – число один, нейтральний елемент відносно операції додавання – число нуль, e, пов'язане з експоненціальним зростанням, π, пов'язане з колом та геометрією, і уявне число i, що привело нас від дійсних до комплексних чисел.

Чи пов'язані ці числа між собою яким-небудь чином? На перший погляд здається, що це – зовсім не обов'язково. Проте наступна формула демонструє здатність математики наділяти красою й несподіванками:

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Цю формулу багато хто вважає (цілком справедливо!) найкрасивішою формулою математики. Наприклад, найвидатніший фізик 20 століття, Нобелівський лауреат Річард Фейнман назвав її «нашою дорогоцінністю» і «однією з найвидатніших формул усієї математики».

СТЕПІНЬ ЧИСЛА

До степеня числа добре підходити крадькома, за аналогією із множенням. Що означає множення? Ось два приклади:

$$3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3$$
$$5 \cdot 6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5.$$

Отож, принаймні в цих простих випадках множення не є нічим кращим за одноманітне багаторазове додавання.

Але що станеться, якщо ми поміняємо знак « $+$ » на знак « $\cdot$ »? Отримаємо

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$
$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

що є відповідно ... одноманітним багаторазовим множенням.

Це одноманітне багаторазове множення і називається піднесенням до степеня. Для того, щоб позбутися мороки з написанням, ми позначаємо

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$
$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$$

і кажемо, що підносимо число 3 до четвертого степеня, а число 5 – до шостого степеня. У такому випадку числа чотири і шість називають показниками степеня, а три і п'ять – основами степеня.

Це все?

Звісно, що ні, можуть виникнути деякі запитання.

1. Чи існує обернена операція до операції піднесення до степеня, подібно до того, як, наприклад, додавання є оберненою операцією до віднімання?
2. Що буде, якщо піднести до степеня дробові числа, такі як $0{,}5$ або $\frac{1}{3}$?
3. Чи можемо ми також піднести до степеня від'ємне число або нуль?

До цих питань ми й намагатимемось підійти по черзі. Оскільки запитань багато, а роздуми над ними доволі добре показують розвиток математики, то пояснення вистачить на декілька сторінок: приємного читання!

ДОБУВАННЯ КОРЕНЯ ЯК ОПЕРАЦІЯ, ОБЕРНЕНА ДО ОПЕРАЦІЇ ПІДНЕСЕННЯ ДО СТЕПЕНЯ

Подібно до того, як операцією, оберненою до множення, є ділення, операцією, оберненою до піднесення до степеня, є операція добування кореня.

І справді, ділення числа 12 на 3 можемо розглядати як пошук відповіді на питання: якщо сума трьох однакових чисел дорівнює 12, то чому дорівнює кожне з цих чисел?

І звісно ж, відповіддю буде 4, тому що $4 + 4 + 4 = 12$.

Якщо візьмемо корінь четвертого степеня із числа 81, то аналогічним питанням буде: якщо добуток чотирьох однакових чисел дорівнює 81, то чому дорівнює кожне з цих чисел?

Відповіддю буде 3, тому що $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Добування кореня позначається у кількох різних форматах. Наприклад корінь четвертого степеня із числа 81 можна позначити двома такими способами: $\sqrt[4]{81}$ і $81^{\frac{1}{4}}$.

Якщо поглянути суто формально, ці два вирази можуть викликати дуже різні емоції, хоча їх значенням в обох випадках буде, звісно ж, 3.

Друге позначення, мабуть, є більш інформативним, оскільки воно натякає на наступну аналогію з множенням: так само, як ділення на три ми можемо вважати множенням на $\frac{1}{3}$, корінь четвертого степеня можна розглядати як степінь з показником $\frac{1}{4}$.

У випадку зі знаходженням кореня також слід бути обережним: як ми вже бачили в розділі про числа, не існує жодного дійсного числа, яке внаслідок множення на себе самого дало б у результаті яке-небудь від'ємне дійсне число, таке як -1, або -4, або -100. Отже, знайти квадратний корінь, або корінь будь-якого іншого парного степеня, із від'ємного числа неможливо.

Якщо ж звернутися до комплексних чисел [с. 89], то такої мороки більше не буде – можна спокійно та радісно знаходити корінь із будь-чого.

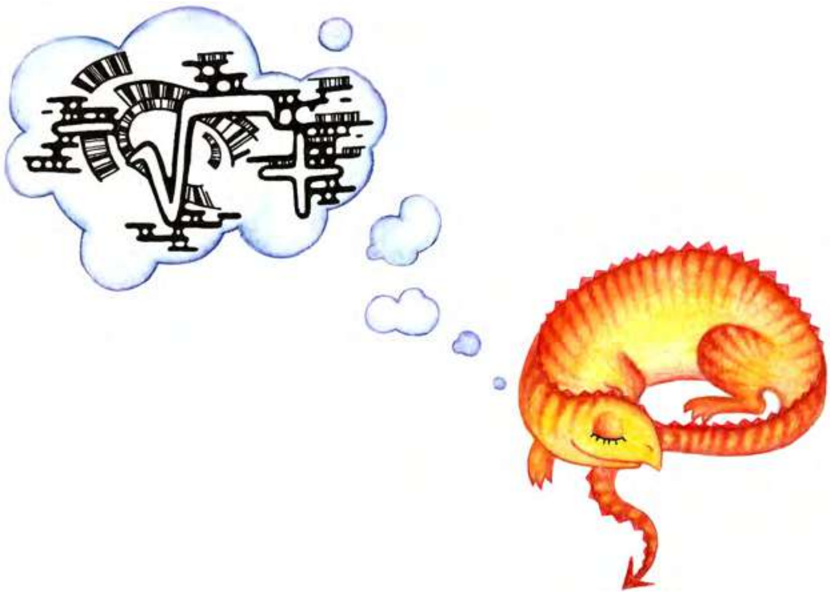
ТРОХИ ІСТОРІЇ

Математичними задачами, пов'язаними з добуванням квадратного кореня, займалися ще 3700 років тому у Вавилоні. Однак у Стародавній Греції ситуація для математиків зробилася життєнебезпечною.

А саме, як ми вже згадували з приводу ірраціональних чисел [с. 87], наступники Піфагора виявили, що довжину діагоналі одиничного квадрата неможливо записати як відношення двох цілих чисел, тобто інакше кажучи, $\sqrt{2}$ є не раціональним, а є ірраціональним числом.

Також ніхто точно не знає, як саме це все сталося, але кажуть, що першим помітив ірраціональність діагоналі квадрата якийсь добродій на ім'я Гіппас Метапонтський. За однією легендою ця знахідка взагалі стала грецькою державною таємницею, і коли міркування бідного Гіппаса більше не могли заперечувати, його втопили в морі.

Наш сучасний символ для позначення кореня $\sqrt{}$ був винайдений у 1525 році Крістофом Рудольфом, який також є автором символів $+$ і $-$. Чи можете ви побачити яку-небудь хорошу причину, чому використовувати почали саме ці, а не інші, символи?



СТЕПІНЬ ІЗ РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Знайомство з раціональним показником степеня, знову ж таки, добре розпочати з аналогії із множенням і подумати, що означає множення на раціональне число. Важливо пам'ятати, що у множенні послідовність дій не має значення.

Наприклад помножити число 12 на число $\frac{3}{4}$, як ми знаємо, можна кількома способами.

Ми можемо спочатку поділити 12 на 4, а потім отриманий результат помножити на 3:

$$\frac{12}{4} \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9,$$

або помножити 12 на 3, і тільки потім поділити отриманий результат на 4:

$$\frac{12 \cdot 3}{4} = \frac{36}{4} = 9.$$

Отож множення на раціональні числа ми можемо вважати просто послідовним множенням та діленням на цілі числа.

Точно так само ми можемо осмислити й степінь із раціональним показником – йдеться про послідовне піднесення до степеня та обчислення кореня з цілими показниками. У цьому випадку їх послідовність теж не є важливою.

Наприклад знайти значення числового виразу $81^{\frac{3}{4}}$ ми можемо так:

по-перше, добудемо корінь четвертого степеня із 81, а потім отримане число піднесемо до третього степеня:

$$\left(81^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 3^3 = 27,$$

або спочатку піднесемо число 81 до третього степеня, і тільки потім запитаємо, яким є корінь четвертого степеня із цього великого числа:

$$(81^3)^{\frac{1}{4}} = 531441^{\frac{1}{4}} = 27.$$

Відповідь, звісно ж, буде тією самою, але знайти її в першому випадку (принаймні обчислюючи в голові), набагато простіше – спробуйте лише піднести число 81 до третього степеня.

Звісно ж, було б краще, якби ми не мусили кожного разу так довго й надокучливо над цим думати, але такий процес мислення досить швидко стає автоматичним – потрібно лише потихеньку обчислювати й практикуватися.

СТЕПІНЬ ІЗ ВІД'ЄМНИМ ПОКАЗНИКОМ

Далі спробуємо подумати про те, чи від'ємний показник степеня теж дасть що-небудь путнє. Тобто, інакше кажучи, що може означати, наприклад, 4^{-3}? Як про це міркувати?

Насправді тут немає нічого складного: якщо додатний показник степеня означав багаторазове множення, то від'ємний показник означає, у певному сенсі, багаторазове ділення.

Наприклад,

$$4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right).$$

Тобто, інакше кажучи, ми підносимо до третього степеня число, обернене до 4, а ним є $\frac{1}{4}$. Тепер, зауваживши, що число, обернене до даного числа, ми можемо розглядати як дане число, піднесене до степеня -1, і,пригадавши, що послідовність дій у нашому випадку не має значення, ми можемо просто вважати, що 4^{-3} є нічим іншим, як просто числом, оберненим до числа 4^3.

СТЕПІНЬ З НУЛЬОВИМ ПОКАЗНИКОМ

Степінь з ненульовим показником ми розглядаємо як багаторазове множення або багаторазове ділення. Однак, що означає нульовий показник? Він може означати, що в нас немає жодних чисел, які ми могли б помножити або поділити. Що ми можемо отримати в результаті такої порожньої дії?

Можна припустити, що піднесення до нульового степеня має бути дуже схожим на використання якогось дуже малого показника степеня: наприклад числа $0{,}000001$, або $\frac{1}{1\,000\,000}$. Однак із раціональним показником степеня ми вже можемо взаємодіяти, й можемо, наприклад, знайти, що,

$$2^{\frac{1}{1\,000\,000}} = 1{,}0000006931.$$

Підозріло близько до числа 1, чи не так?

Виходить, що незалежно від того, яке число ми піднесемо до нульового степеня, в результаті отримаємо 1. Звісно ж, за цим всім стоїть і красиве математичне обґрунтування, про яке ви можете прочитати в додатковому розділі [ст. 117].

СТЕПІНЬ ІЗ ІРРАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Для степенів з ірраціональним показником інтуїція поки що не приносить багато користі – наприклад досить важко відповісти на питання, скільки разів мені доведеться помножити 2 на 2, аби отримати число 2^π або число e^e.

Утім думати про них точно і строго можливо теж, потрібно лише змінити свій погляд. Детальніше про це можна прочитати вже в розділі про показникову функцію [с. 280]. У певному сенсі, йдеться про точно таке саме заповнення дірок, як у переході від раціональних до дійсних чисел – і цього разу дірки знаходяться не лише на числовій осі, але й на графіку показникової функції. Важливо зазначити, що це можна зробити лише у випадку додатної основи степеня – у випадку від'ємної основи, ми вже маємо проблеми з раціональними показниками степеня, не кажучи вже про ірраціональні.

На практиці ми можемо поводитися з ірраціональними показниками степеня так само, як і у випадку степеня з нульовим показником – просто підшукати який-небудь достатньо близький до нашого ірраціонального числа раціональний показник. Саме так поводяться комп'ютери – ірраціональні числа вони все одно записувати не вміють.

ЕФЕКТИВНЕ ПІДНЕСЕННЯ ДО СТЕПЕНЯ

Піднесення до степеня з натуральним показником – це, певною мірою, щоденна діяльність (якщо не особисто для вас, то, безумовно, для деяких вчених, а також для комп'ютерів).

Наприклад для обчислення 3^3 потрібно виконати дві операції множення: $3 \cdot 3 = 9$ і $9 \cdot 3 = 27$.

Однак, скільки операцій потрібно, аби обчислити 3^{100}? Чи справді для цього знадобиться 99 операцій, чи можливо знайти якийсь швидший спосіб?

Виявляється, швидший спосіб теж існує. Для того, щоб осягнути цей швидший спосіб, слід зазначити, що, послідовно підносячи квадрати чисел до квадрату, ми досить швидко досягнемо великих степенів:

$$
\begin{aligned}
3^2 &= 9 \\
(3^2)^2 &= 3^4 = 81 \\
(3^4)^2 &= 3^8 = 6561 \\
(3^8)^2 &= 3^{16} = 43\,046\,721 \\
(3^{16})^2 &= 3^{32} = 1\,853\,020\,188\,851\,841 \\
(3^{32})^2 &= 3^{64} = 3\,433\,683\,820\,292\,512\,484\,657\,849\,089\,281
\end{aligned}
$$

Тепер ідея полягає в тому, щоб записати 100 як суму тих степенів, які ми змогли знайти за допомогою піднесення до квадрату: $100 = 62 + 32 + 4$. Отож можемо обчислити 3^{100}:

$$3^{64} \cdot 3^{32} \cdot 3^{4} = 3^{100} = 515\,377\,520\,732\,011\,331\,036\,461$$
$$129\,765\,621\,272\,702\,107\,522\,001.$$

Підрахувавши, бачимо, що нам вистачило лише 8 операцій множення замість 99.

Уважний читач помітить, що показники степенів, які ми можемо швидко обчислити, мають вигляд 2^m. Інакше кажучи, для швидкого піднесення до степеня, нам просто потрібно записати показник у двійковій системі числення: наприклад, $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$. Про двійкову систему числення ми трохи детальніше згадували в розмові про множини [с. 80].

СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ДОДАТНОГО ЧИСЛА

Маса Сонця приблизно становить $1989000000000000000000000000000$ кг, а маса електрона – приблизно $0{,}0000000000000000000000000000009109$ кг.

Ці числа доволі важко прочитати, а ще страшніше – коли потрібно обчислити, наприклад, у скільки разів маса Сонця більша за масу електрона. Оскільки нам часто доводиться мати справу з дуже великими і дуже маленькими числами, то простіше їх представляти в стандартному вигляді: $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$. Показник степеня – число n, називають порядком числа.

Наприклад, маса Сонця в стандартному вигляді – $1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг, а маса електрона – $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ кг. Тепер знайти, у скільки разів Сонце важче за електрон, значно легше:

$$\begin{aligned}\frac{1{,}989 \cdot 10^{30}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}} &= \frac{1{,}989}{9{,}109} \cdot 10^{30-(-31)} \\ &\approx 0{,}22 \cdot 10^{61} \\ &= 2{,}2 \cdot 10^{60}\end{aligned}$$

або на 60 порядків!

ОБҐРУНТУВАННЯ СТЕПЕНЯ З НУЛЬОВИМ ПОКАЗНИКОМ ДЛЯ РОЗУМНИКІВ*

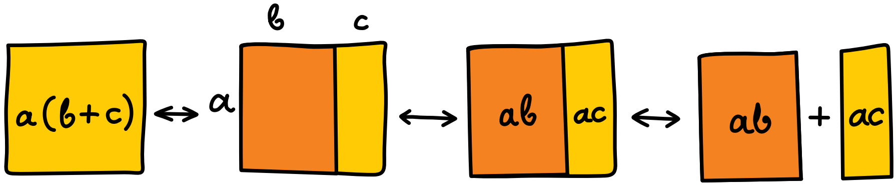
Надалі спробуємо також трохи математично аргументувати, чому всі числа в нульовому степені як-не-як повинні дорівнювати одиниці.

Подумаймо про множення ще раз – згадаймо, що множення якого завгодно числа на нуль у результаті дає нуль. Існує кілька способів зрозуміти те, чому множення на нуль повинно давати нуль.

Ось один із способів. Нам сподобалося б, якби множення та додавання добре один із одним ладнали. Ми хотіли б, наприклад, мати змогу зручно розкривати дужки й записувати:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Це поєднання множення та додавання також гордо називається дистрибутивністю множення відносно додавання. Насправді ви використовуєте його щодня, наприклад $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 5 = 50$.



Якщо ж тепер ми вважатимемо, що число x дорівнює нулю, а число y, наприклад, двом, то отримаємо, що

$$2 \cdot z = (0 + 2) \cdot z = 0 \cdot \overset{x}{z} + 2 \cdot z.$$

Оскільки обидві чистини рівності мають член $2 \cdot z$, то і доданок $0 \cdot z$, що стоїть у правій частині, дорівнює нулю. Однак ми вибрали число два абсолютно випадково, так, що дійсно, результат множення будь-якого числа на нуль повинен дорівнювати нулю.

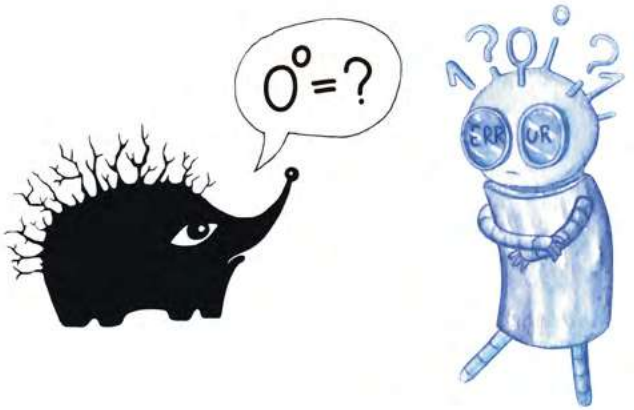
Якої ж корисної властивості ми хочемо від степеня? Ми хотіли б, щоб він добре ладнав із множенням. Якщо ми помножимо добуток n однакових чисел на добуток m таких самих чисел, то результат повинен дорівнювати числу, яке ми отримаємо, коли відразу перемножимо $m + n$ таких чисел. Інакше кажучи, ми хочемо, щоб $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$. Але якщо зараз вважатимемо, що m дорівнює нулю, а z дорівнює 2, то отримаємо $2^0 \cdot 2^n = 2^{0+n} = 2^n$.

Отже, оскільки при множенні ненульового числа лише на одиницю ми отримаємо точно таке ж число, то 2^0 має дорівнювати одиниці! І, звичайно, знову ж таки, ми могли б узяти (майже) що завгодно замість числа два – так, піднісши довільне число до нульового степеня, у результаті отримаємо одиницю.

НУЛЬ У НУЛЬОВОМУ СТЕПЕНІ

І все ж попереднє міркування є не зовсім коректним – ось це «майже», що ховається в дужках у попередньому абзаці, стосується числа 0. А саме: якби в попередньому міркуванні ми прирівняли число z до нуля, то отримали б: $0^0 \cdot 0^n = 0^n$. Але оскільки 0^n дорівнює нулю принаймні для кожного $n > 0$ (адже ми просто множимо нуль на нуль додатну кількість разів), то про значення виразу 0^0 ми нічого не можемо сказати.

Виявляється, історично 0^0 приніс математикам багато неприємностей, у поглядах розходилися також і досить великі математики. На сьогодні все ще існують два протилежні табори: одні кажуть, що 0^0 є невизначеним, а інші впевнені, він повинен дорівнювати одиниці. В чому проблема?



З одного боку, 0^0 повинен дорівнювати числу, яке ми отримаємо, якщо у виразі 0^x додатне число x братимемо все меншим і меншим. Оскільки для кожного додатного n, 0^n дорівнює нулю, то 0^0 також повинен дорівнювати нулю.

З іншого боку, 0^0 також повинен дорівнювати числу, яке ми отримаємо, якщо у виразі x^0 додатне число x братимемо все меншим. З огляду на вищесказане, ми знаємо, що x^0 дорівнює одиниці для кожного x, що не є нулем. Отже, 0^0 повинен також дорівнювати одиниці.

Оскільки у нас є два різні шляхи математичного означення 0^0, які між собою аж ніяк не перетинаються, вважати його невизначеним зовсім не здається несправедливим. Утім, є й такі, хто вважає, що в нас є достатньо підстав, аби вірити, що $0^0 = 1$.

Втім, всі сходяться принаймні на тому, що, якщо 0^0 взагалі визначати як число, то його значенням повинно бути 1, а не, наприклад, 0 або яке-небудь інше число.

Передусім, як ми вже згадували, ми хотіли б дотримуватися вже знайомих нам операцій та формул. Якби ми вибрали будь-яке інше значення, то могли б знайти якусь формулу – таку як, скажімо, раніше використану $a^{(m+n)} = a^m \cdot a^n$, яка у випадку нашого вибору, на жаль, більше не була б істинною.

Якщо у цю саму формулу ми підставимо $a = 0$, $\mathrm{m} = 0$, $n = 0$, то отримаємо, що $0^0 \cdot 0^0 = 0^0$. Отже, якщо ми вирішили визначити число 0^0, то його квадрат повинен дорівнювати самому собі. Тобто це не має бути жодне інше число, окрім 1 і 0, які ми зустріли в ролі можливих варіантів ще в попередньому міркуванні.

Однак, вибравши далі формулу $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, яка є істинною завжди, якщо $a > 0$, ми побачимо, що на значення виразу 0^0 не може претендувати навіть число 0. Інакше в одній частині формули був би 0, а в іншій – ми б намагалися на нуль поділити, а нам це, звісно ж, не подобається. Тому, якщо 0^0 є числом, то нехай це буде число 1.

На додачу, домовленість, що $0^0 = 1$ здається дещо кращою з погляду інтерпретації. Наприклад, ми й самі розглядали степінь з нульовим показником як порожню дію, і в цьому випадку не має значення, що є основою степеня – порожня дія завжди залишається порожньою дією і повинна мати також те саме значення. Однак усі інші числа в нульовому степені дорівнюють 1.

У висновку, ми так і не знаємо,що краще – чи залишити вираз 0^0 невизначеним, щоб уникнути плутанини, чи все-таки, для зручності, дати йому значення 1?

МОДУЛЬ ЧИСЛА

Намалюємо числову вісь, приб'ємо туди посередині цвяхом нуль, візьмемо шматок мотузки й позначимо два числа a і $-a$. Ці числа знаходяться на однаковій відстані від нульової точки. Ця відстань від нульової точки і називається модулем або абсолютною величиною числа.

Отже, модулі чисел 1 і -1 дорівнюють 1, оскільки вони обидва розташовані на відстані рівно однієї одиниці від нульової точки, і так π є модулем чисел π і $-\pi$.

Оскільки модуль числа дорівнює відстані, то він, звісно ж, не може бути від'ємним.

Модуль числа позначають, розміщуючи число між вертикальними рисками. Наприклад $|1| = 1$ і $|-1| = 1$. Можна вважати, що риски сплющують мінус.

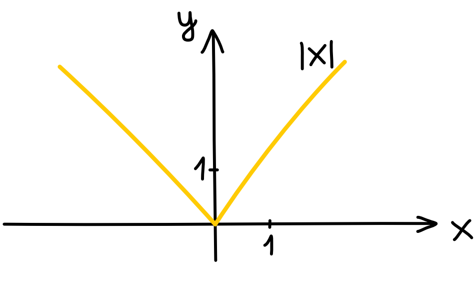
Математично модуль числа можна визначити так:

якщо x додатне, то $|x| = x$

якщо x від'ємне, то $|x| = -x$

якщо x дорівнює нулю, то $|0| = 0$.

Якщо ми знайдемо модуль кожного дійсного числа, то отримаємо такий графік – графік функції $|x|$.

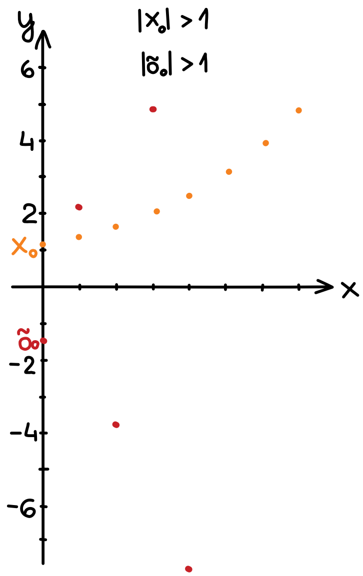


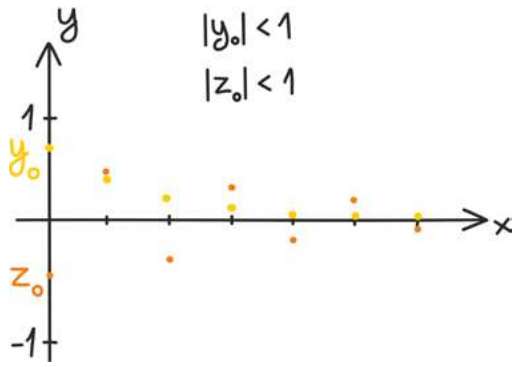
Мабуть, важливо також зазначити, що, хоча ми визначили модуль числа як його відстань від нуля, за допомогою модуля ми насправді можемо описати всі відстані між числами. Адже відстань між числами x і y дорівнює модулю їх різниці $x - y$ (або чому б не $y - x$).

НАВІЩО НАМ МОДУЛЬ ЧИСЛА?

Виявляється, що час від часу поведінка чисел залежить більше від їхньої абсолютної величини, ніж від їхнього точного розташування на числовій осі.

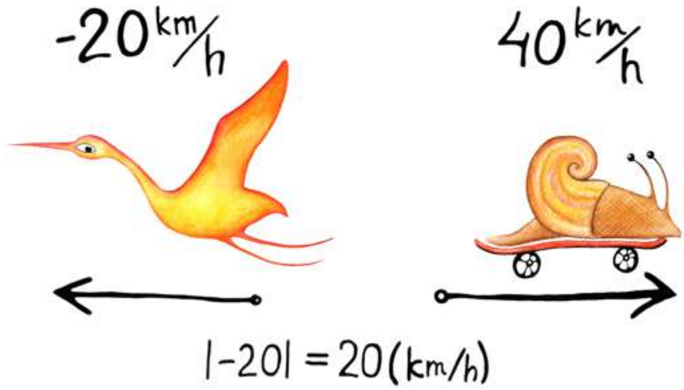
Припустимо, що ми починаємо багаторазово множити якесь число на це саме число. Якщо абсолютна величина цього числа більша за одиницю, ми віддаляємося від нуля все далі і далі, але якщо абсолютна величина числа менша за одиницю, то ми до нуля будемо весь час наближатися. На наступних графіках ми взяли чотири числа x_0, $\tilde{o}_0$, y_0 і z_0 і почали множити їх на них самих. Модулі перших двох чисел є більшими від одиниці, і таким чином, числа, отримані при множенні на самих себе, прямують все далі й далі від нуля. Модулі останніх двох чисел є меншим від одиниці, а їхні добутки прямують до нуля.





Отримані послідовності чисел називають геометричними прогресіями, і з ними ми ще познайомимося ближче [с. 131]!

Модуль числа дає про себе знати й у фізиці, де нас часто цікавить не положення того чи іншого об'єкта, а, натомість, відстань між об'єктами. Так само ми можемо думати й про швидкість. Наприклад, якщо ми самі знаходимося посеред довгого прямолінійного відрізку дороги і вважаємо себе нульовою точкою, то предмети, що рухаються в напрямку, протилежному напрямку числової осі, матимуть від'ємну швидкість. Величина цієї швидкості дорівнює її модулю.



Рівняння також можуть містити модулі [с. 168].

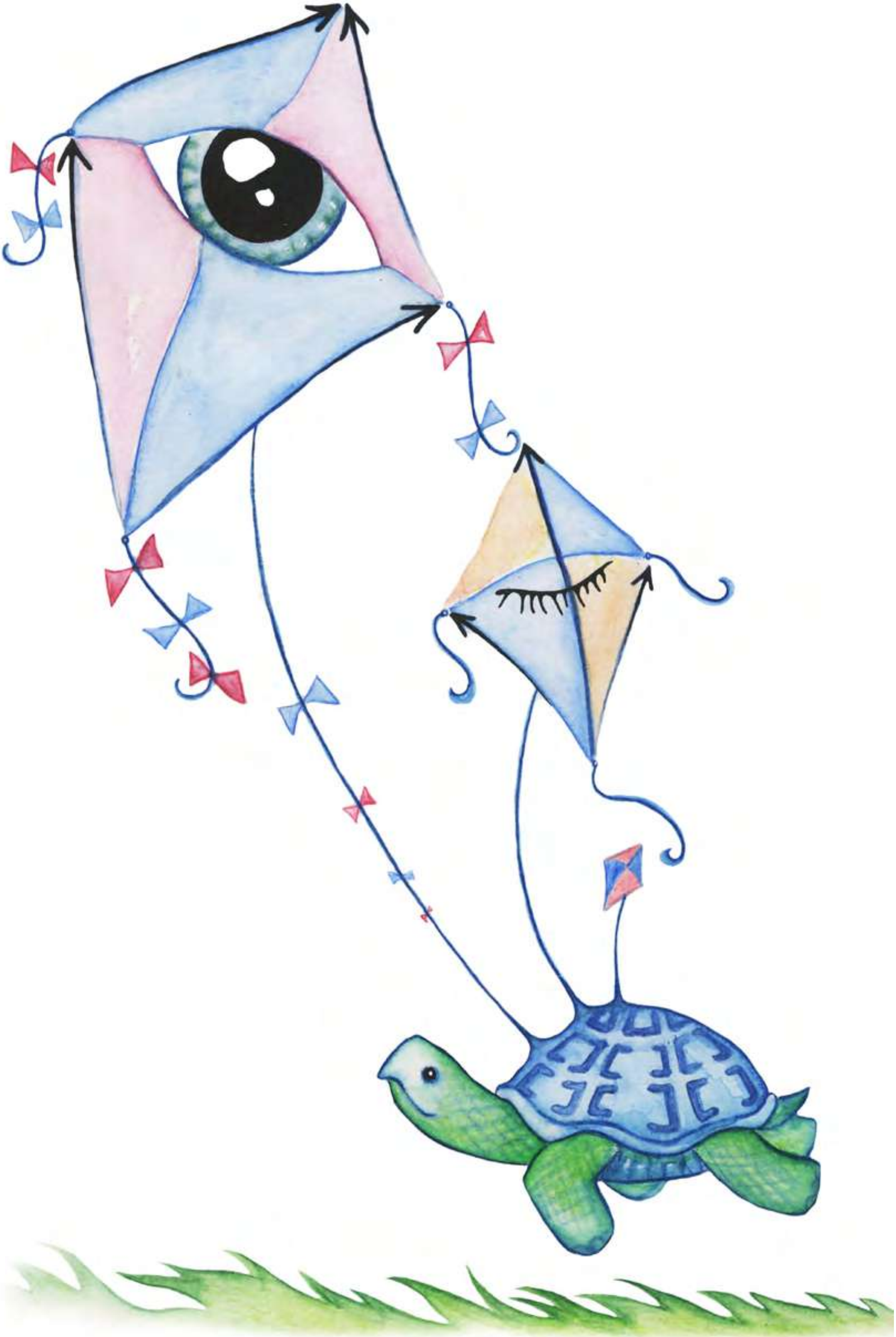
Наприклад, щоб розв’язати рівняння

$$|x - 1| = 2$$

потрібно знайти ті значення, які знаходяться на відстані 2 від числа 1. Рівняння з модулями ми розглянемо трохи докладніше вже в четвертій частині книги [с. 202].

ЧАСТИНА 3 –

ДРУЗІ ТА РОДИЧІ ЧИСЕЛ



Ефективність роботи,
якщо її ніщо не перериває,
зростає у геометричній
прогресії.

Андре Моруа

ПОСЛІДОВНІСТЬ

Поняття числової послідовності можна довго пояснювати словами, але почнемо краще з прикладів.

$2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; \dots$
послідовність парних чисел або арифметична прогресія з різницею два

$1; 1; 3; 3; 32; -1;0; -9; 2$
довільна скінченна послідовність із дев'яти цілих чисел

$2; 2; 2; 2;\dots$
нескінченна стала послідовність

$3; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415; \dots$
послідовність раціональних чисел, що наближаються до π

$3; 9; 27; 81; 243; 729; 2187; \dots$
геометрична прогресія зі знаменником три

$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \dots$
послідовність чисел Фібоначчі

Послідовність – це звичайне чергування чисел, вона може складатися або зі скінченної кількості чисел, або бути навіть нескінченною. Якщо ви просто поскладаєте числа в ряд, то в результаті й отримаєте числову послідовність. Звісно, кожен може записати свою улюблену послідовність і подарувати її своїй другій половинці на день народження, і навіть, якщо це трапляється нечасто, все одно, послідовності є поширеними та важливими об'єктами як у реальному житті, так і в математиці.

Наприклад, щомісячні платежі для погашення студентської позики можна розглядати як числову послідовність, а також числову послідовність утворює кількість дощових днів кожного року.

Про послідовності можна ставити різні математичні запитання, і виявляється, що ці питання мають також цілком життєві значення. Чим є десятий член послідовності, або, яким буде розмір десятого платежа за позикою? Чому дорівнює сума перших шістдесяти членів послідовності, або, скільки дощових днів було впродовж перших шістдесяти років? Чи можна сказати, чому дорівнює сума всіх членів послідовності?

Загалом, ці запитання можуть виявитися досить складними. Отож, математиків спочатку цікавлять простіші випадки, щодо яких вони можуть відповісти на всі питання. Це також захоплююче, адже

- по-перше, так можна знайти ідеї також для складніших ситуацій;
- а по-друге, виявляється, що часто всі ті послідовності, які трапляються нам у житті, з математичного погляду є насправді досить простими.

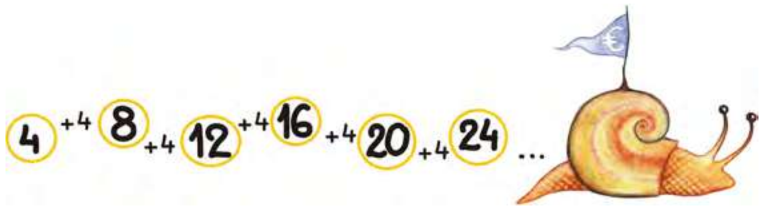
Ці простіші послідовності з'являються в шкільній програмі, і надалі ми їх коротко представимо.

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Найпростіші послідовності – це сталі та скінченні послідовності. Далі йдуть арифметичні прогресії. У цих послідовностях різниця кожних двох сусідніх членів – однакова. У наступному прикладі такою різницею є число -3. Ми називаємо цю різницю різницею арифметичної прогресії і часто позначаємо її як d.

$$3; 0;\ -3;\ -6;\ -9;\ \dots$$

Дехто з арифметичною прогресією починає взаємодіяти ще в початковій школі – щотижня відкладаючи всі отримані кишенькові гроші. Так їхні щотижневі суми грошей утворюють арифметичну прогресію, і в школі вони вчаться передбачати, коли ж зможуть стати мільйонерами. На жаль, слід визнати, що для цієї мети арифметична прогресія зростає трішечки повільно.



Для арифметичної прогресії знайти відповіді на вищезазначені запитання легко.

Наприклад, знаючи перший член прогресії, ми можемо запросто записати і другий член, додавши до першого члена різницю. Отже, виходить, що ми можемо знайти сотий член на основі першого, просто додавши до нього різницю 99 разів, тобто математично це виглядатиме так: $a_{100} = a_1 + 99 \cdot d$. Тут слід зазначити, що ми тишком-нишком почали користуватися новим позначенням: під ми маємо на увазі сотий a_{100} член прогресії.

У загальному вигляді ми можемо записати n-ий член прогресії a_n так:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Щодо знаходження формули суми прогресії, то слід зазначити, що між собою легко додати такі дві прогресії, члени однієї з яких збільшується, а іншої – зменшується на те саме число. Наприклад, якщо ми хочемо знайти суму прогресії, членами якої є числа від одного до ста, ми можемо просто додати цю прогресію до її зворотної версії, де членами є числа від ста до одного.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 97 & 98 & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & 97 & \dots & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 101 & 101 & 101 & 101 & \dots & 101 & 101 & 101 & 101 \end{array}$$

У результаті отримаємо сталу послідовність, у якій є рівно сто членів, кожен із яких дорівнює 101. Оскільки сума членів зворотної прогресії дорівнює сумі членів початкової прогресії, зі зробленого спостереження витікає також сума перших ста натуральних чисел:

$$1 + 2 + \dots + 100 = \frac{1}{2}(100 \cdot 101) = 5050.$$

Щоб знайти формулу суми перших членів арифметичної прогресії $a_1, a_1 + \mathrm{d}, a_1 + 2\mathrm{d}, a_1 + 3\mathrm{d}, \dots$, нам потрібно додати до неї прогресію $a_\mathrm{n}, a_\mathrm{n} - \mathrm{d}, a_\mathrm{n} - 2\mathrm{d}, a_\mathrm{n} - 3\mathrm{d}, \dots$

Після цього, застосувавши попереднє міркування, в результаті ми отримаємо:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d).$$

Якщо ви хочете, щоб формула була коротшою, то виписувати останній член у розгорнутому вигляді не потрібно:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

НАЗВА

Під кінець цікаво дізнатися, звідки ж походить назва «арифметична прогресія»? Точної відповіді для читача у нас немає. Один із варіантів – сказати, що арифметична прогресія є пов'язаною із середнім арифметичним: із трьох послідовних членів арифметичної прогресії, середній член є середнім арифметичним двох крайніх [с. 198].

Ще один варіант – подумати про арифметику ширше. А саме: можна вважати, що у своїй найпростішій формі арифметика має справу з додаванням, множенням, і, якщо можливо – також із відніманням та діленням. Якщо зараз ми розглянемо нескінченно довгу арифметичну прогресію, перший член якої дорівнює нулю, а різниця – d, то отримаємо послідовність чисел $0;\ d;\ 2d;\ 3d;\ 4d;$ ... Неважко помітити, що, додаючи або перемножуючи члени такої арифметичної прогресії, у результаті завжди отримаємо число, що є членом знову ж таки, тієї самої арифметичної прогресії. Тож у певному сенсі, із членами арифметичної прогресії ми можемо займатися арифметикою! Звісно ж, це й не дивно, враховуючи, що задана арифметична прогресія є майже копією натуральних чисел, лише помножених на число d.

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Якщо взяти традиційну шахівницю, що складається із 64 квадратів, і покласти на перший квадрат одну зернинку рису, на другий квадрат – вже дві зернинки рису, і на кожний наступний квадрат – удвічі більше рисових зернят, ніж на попередній, то врешті-решт, скільки всього зернят буде на шахівниці?

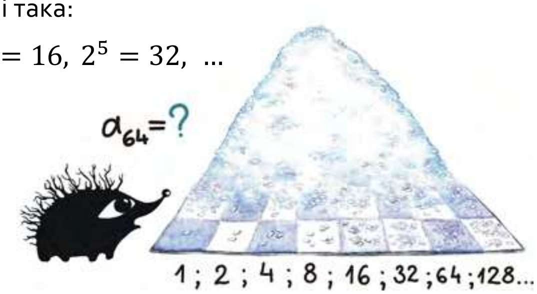
За легендою винахідник шахів представив свою нову гру місцевому правителю. Правитель був новою грою дуже задоволений і дозволив винахіднику самому обрати собі гідну винагороду. Чоловік, якому мудрості не бракувало, мовив до короля: «Ваша Величносте, я б попросив стільки рисових зерен, скільки їх буде на шаховій дошці всього, якщо розмістити одне на першому квадраті шахової дошки, два – на другому, чотири – на третьому, і на кожному наступному – ще вдвічі більше рисових зерен». Правитель, що не був із математикою чи математичними дивацтвами на «ти», швидко погодився на пропозицію, вважаючи її навіть образливо невибагливою. Тож він сказав скарбнику обчислити кількість рисових зерен і видати їх винахіднику. Однак скарбник витратив цілий тиждень на пошук обіцяної кількості рису. Коли ж правитель поцікавився причиною затримки, скарбник показав йому результати розрахунків і пояснив, що король і за все своє життя не зможе сплатити таку ціну. Тепер правителю було зрозуміло, що робити з винахідником: він звелів розумному чоловікові відрубати розумну голову, щоб у такий спосіб показати всіляким хитрунам, хто головний.

Кількість зерен на квадратах шахівниці така:

$$1,\ 2, 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ \ldots$$

Яким буде 64-й член цієї прогресії?

Яка сума перших 64-х її членів?



Якщо в арифметичній прогресії кожен наступний член знаходиться через додавання одного й того самого числа до попереднього члена, то тепер ми знаходимо кожен наступний член послідовності, помноживши попередній член на одне й те саме число – у нашому конкретному випадку цим числом є два. Такі послідовності називаються геометричними прогресіями, а число, на яке множиться кожен наступний член, – знаменником прогресії.

Якщо ми позначаємо знаменник прогресії через q, а члени прогресії – як завжди, a_n, то отримаємо, аналогічно випадку арифметичної прогресії, $a_2 = a_1 \cdot q$, і тоді $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q$, ..., а в загальному вигляді

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}.$$

Тож ми можемо також обчислити, що на останньому квадраті шахової дошки має бути $a_{64} = 1 \cdot 2^{63} = 9\ 223\ 372\ 036\ 854\ 775\ 808$ зерен рису, що становить близько 200 мільярдів тон рису.

ФОРМУЛА ДЛЯ СУМИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Для того щоб знайти формулу для суми n членів геометричної прогресії, потрібно, знову ж таки, лише одне спостереження та багато терпіння, виконуючи маніпуляції із символами.

Нагадаємо, що, помноживши довільний член прогресії a_i на число q, ми отримаємо наступний член прогресії a_{i+1}. Отже, сума $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ перших n членів прогресії лише в q разів відрізняється від суми $a_2 + \cdots + a_{n+1}$, що є сумою n членів тієї ж самої прогресії, починаючи з другого члена.

Однак, оскільки ці дві послідовності відрізняються лише двома членами – у першій зустрічається a_1 і не зустрічається a_{n+1}, а в другій – зустрічається a_{n+1}, але не зустрічається a_1 – то різниця сум цих прогресій дорівнює $a_1 - a_{n+1}$.

Отож, позначивши суму перших n членів геометричної прогресії, знову ж таки, як S_n, ми можемо записати попереднє міркування більш компактно так:

$$S_n - qS_n = a^1 + a_2 + \ldots + a_n - (a_2 + \ldots + a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Поділивши на $q - 1$, ми прийдемо до формули $S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q-1}$, або, використавши загальну формулу для $(n+1)$-го члена геометричної прогресії, одержимо:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

СПАДНА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Якщо модуль знаменника геометричної прогресії – менший одиниці, то така послідовність називається спадною геометричною прогресією.

Наприклад, прогресія $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; …– це спадна геометрична прогресія зі знаменником $\frac{1}{2}$. Чому дорівнює сума усіх членів цієї прогресії?

Оскільки така прогресія має нескінченну кількість членів, то можна припустити, що цю суму неможливо надійно обчислити – адже вона може бути нескінченно великою, такою великою, що її й не виразиш будь-яким одним числом. Однак виявляється, що ми завжди маємо справу зі скінченним і часто навіть не дуже-то й великим числом.

З цією проблемою також тісно пов'язаний парадокс давньогрецького філософа Зенона, який стверджує таке: якщо під час забігу повільнішому учасникові дається фора, то швидший бігун ніколи не зможе його випередити. А саме, до того, як швидший бігун промине повільного, спочатку він повинен досягти тієї точки, де повільний стартував. Однак до цього часу повільніший бігун уже просунеться вперед, досягне наступної точки. Тепер швидший бігун повинен досягти, натомість, цієї точки, перед тим, як його проминути. І знову ж, повільніший бігун просунеться вперед. І так ми можемо продовжувати нескінченно, тому що кожного разу, коли швидший бігун досягатиме попередньої точки розташування бігуна повільнішого, той уже звідти зникне.

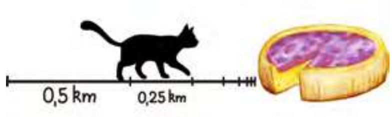
Утім, ми знаємо, що швидкі бігуни обганяють повільних – це також причина, чому наведене міркування називають парадоксом. Можливо, після опрацювання цього розділу ви зможете побачити, чому ці «інтуїтивні» міркування, все ж, не дуже обґрунтовані.

Пироги та сума спадної геометричної прогресії

Давайте докладніше розглянемо геометричну прогресію $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; …, наведену вище.

Ми також можемо поміркувати про цю прогресію за допомогою казки. Припустимо, на відстані одного кілометра знаходиться пиріжковий кіоск, до якого підкрадається кіт без чобіт. Досягнувши половини дороги, він пройшов пів кілометра, і йому ще залишається пройти так само пів кілометра. Нехай перший член прогресії позначає довжину цієї першої вилазки: $a_1 = \frac{1}{2}$ км.

Вичекавши якусь мить, він вирішує прокрастися ще половину відстані, що залишилася, – це означає половину половини кілометра, тобто чверть кілометра. Позначмо цю вилазку $a_2 = \frac{1}{4}$ км.



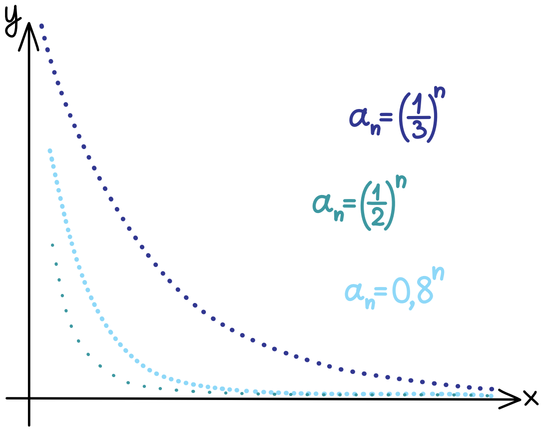
Роззирнувшись навколо ще раз і глибоко вдихнувши, кіт вирішує пройти ще половину відстані, що залишилася – ще пів чверті кілометра, тобто одну восьму кілометра. Цю вилазку позначимо $a_3 = \frac{1}{8}$ км.

Отже, кожен поступ уперед відповідає одному члену прогресії, а сума прогресії відповідає загальній пройденій відстані. Однак на початку до пиріжкового кіоску залишалося рівно один кілометр, і тому, оскільки кіт, безумовно, не піде далі, ніж кіоск, то й сума прогресії також не може бути більшою, ніж одиниця. Насправді ця сума дорівнює одиниці, адже відстань, що залишилася до пиріжкового кіоску, стане настільки малою, що кіт без чобіт який-небудь пиріг обов'язково проковтне.

Те, що сума прогресії є скінченною, можна, звісно ж, пояснити, використовуючи також формулу для суми членів прогресії, знайдену в попередньому розділі із зірочкою:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Тепер, якщо $q < 1$, то цей вираз має скінченне значення і, крім того, величина q^n спадає, і стаючи все меншою і меншою, швидко наближається до нуля.



Тож ми справді можемо побачити, що сума всіх членів наближається до числа $S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$. Точніше, S є границею послідовності S_n [с. 310].

Для прогресії $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ маємо $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, і тому сума цієї прогресії дійсно дорівнює 1.

НАЗВА

Назву арифметичної прогресії ми частково обґрунтували гаслом: «З арифметичною прогресією ми можемо займатися арифметикою!» Було б чудово, якби з геометричною прогресією ми могли б займатися геометрією,... і в певному сенсі ми можемо! А саме, ми можемо вважати, що починаємо з відрізка певної довжини, і всі наступні члени прогресії просто певною мірою його збільшують. Отже, геометрична прогресія пов'язана з одним з найпростіших геометричних перетворень – із масштабуванням, тобто збільшенням чи зменшенням.

Хоча ідея ця – проста, такий підхід, все ж, може виявитися корисним. Наприклад, під час розмови про відвідини пиріжкової крамниці, скінченність суми прогресії ми також проілюстрували геометрично.

Звичайно, на додачу до цього, геометрична прогресія пов'язана із середнім геометричним – знову ж таки, середній член із трьох послідовних членів геометричної прогресії є середнім геометричним крайніх членів [с. 198].

ДЕЯКІ ІНШІ ЦІКАВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Як видно вже зі вступу, існують й інші цікаві послідовності, над властивостями яких математики довго ламали голову. Ось кілька прикладів, що припали математикам до душі.

Послідовність простих чисел

Нагадаємо, що простими числами називають цілі числа, більші за 1, що діляться без остачі лише на самих себе та на одиницю. У першій частині ми показали, що простих чисел існує нескінченна кількість [ст. 46]. Послідовність простих чисел починається так:

$$2;\ \ 3;\ \ 5;\ \ 7;\ \ 11;\ \ \ldots$$

Із простими числами, як і раніше, пов'язано багато нерозв'язаних ще проблем. Наприклад, невідомо, чи існує нескінченно багато пар простих чисел, які відрізняються одне від одного на два. Прикладом такої пари чисел є пара $(3; 5)$ або $(197;\ 199)$ пара. Числа, що утворюють найбільшу знайдену на сьогодні пару таких чисел, у десятковій системі числення записуються за допомогою $200\,700$ цифр!

Доведена нещодавно цікава теорема стверджує, що в послідовності простих чисел можна знайти арифметичні прогресії бажаної довжини. Інакше кажучи, можна знайти арифметичні прогресії як із 10, 1000 так і $20\,350$ членів, усі з яких є простими числами. Спробуйте знайти арифметичну прогресію хоча б із чотирьох є простими числами!

Послідовність чисел, обернених до простих

Цікавою здається і послідовність чисел, обернених до простих:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{11};\ \ldots$$

Цю послідовність робить цікавою надзвичайно повільний, однак упертий ріст суми її членів. Для будь-якого числа ми завжди можемо знайти таке n число, що сума перших n членів послідовності чисел, обернених до простих, буде більшою, ніж дане число.

Однак водночас ця сума збільшується настільки повільно, що, наприклад, якщо ми хочемо, щоб сума перших n членів склала 7, то мали б додати приблизно $10^{10\,000\,000}$ членів послідовності!

Ця послідовність також є прекрасним прикладом того, як обчислювальні експерименти, що проводять на комп'ютерах, можуть збити нас із правильного шляху. Сума n перших членів послідовності чисел, обернених до простих, зростає так повільно, що кожен проведений комп'ютерний експеримент переконав би нас у тому, що ця сума жодним чином не може бути як завгодно великою.

Проте, можна математично довести, що сума усіх членів нашої послідовності – нескінченно велика.

Послідовність квадратів чисел, обернених до натуральних

$$1;\ \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{3^2};\ \frac{1}{4^2};\ \frac{1}{5^2};\ \frac{1}{6^2};\ \ldots$$

Знаходження суми всіх членів цієї послідовності, знову ж таки, приводить до однієї досить дивовижної формули:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Чи можете ви знайти яку-небудь причину, чому сума квадратів чисел, обернених до натуральних, має бути пов'язаною з числом π, яке з'являється при обчисленні довжини кола?

Цей цікавий зв'язок у 1735 році знайшов Леонард Ейлер, один з найбільших математиків усіх часів.

Цікаво, що його доведення не задовольнило інших математиків того часу, і лише через шість років після відкриття він спромігся переконати також й інших в істинності цієї формули.

Послідовність Фібоначчі

$$1;\ \ 1;\ \ 2;\ \ 3;\ \ 5;\ \ 8;\ \ 13;\ \ldots$$

Кожен наступний член послідовності Фібоначчі, починаючи з третього, утворюється через додавання двох попередніх її членів. Отож, щоб розпочати послідовність, нам просто необхідно визначити два перших члени:

$$F_1=1,$$
$$F_2=1.$$

Після цього ми можемо легко обчислити всі наступні члени.

Наприклад, $F_3=F_2+F_1=1+1=2$, $F_4=F_3+F_2=2+1=3$ і так далі. Ми можемо написати загальну формулу, що пов'язує члени послідовності Фібоначчі:

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n.$$

Числа Фібоначчі даються взнаки в різних, часом несподіваних місцях. Однією з найпростіших задач, під час розв’язування якої з’являються числа Фібоначчі, є така:

Скільки існує різних способів піднятися сходами з сходинок, завжди піднімаючись на одну, або на дві сходинки за один крок? Наприклад, сходами з трьох сходинок можливо піднятися трьома способами: $1+1+1$, $1+2$ або $2+1$, із чотирьох сходинок – п’ятьма способами тощо.

Останнім часом числа Фібоначчі на подив часто застосовують в інформатиці: з їх допомогою намагаються генерувати випадкові числа, знаходити нові алгоритми пошуку та навіть створювати структури даних. Є підозра, що послідовність Фібоначчі використовується також у компонуванні музики, а уважний спостерігач за природою знайде пов'язані з послідовністю Фібоначчі спіралі й візерунки під час освіжаючого походу.

Крім того, виявляється, що відношення сусідніх членів послідовності Фібоначчі наближається до певного числа. Більше того, це число – не якесь там випадкове число, а так зване число золотого перетину:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Впродовж історії, золотий перетин користувався великою повагою та пошаною. Його назва походить від того, що він лежить в основі найкрасивіших пропорцій. Наприклад вважають, що саме золотий перетин надає прямокутнику найкрасивішу пропорцію довжини та ширини. Через це автори так часто вирішують надавати своїм книгам саме таких пропорцій.

У цьому місці ми завершуємо нашу розповідь вс е ще нерозв’язаним до сьогодні математичним питанням. Чи існує нескінченно багато простих чисел серед елементів послідовності Фібоначчі (перші з таких чисел: 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597)? Вважають, що відповіддю є «так», але довести це не змогли. Цікаво, що в цьому такого важкого?

Маленька загадка для тих, у кого вдосталь часу та завзятості:

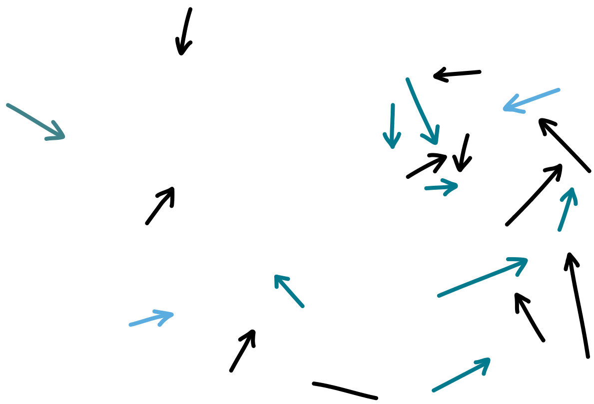
Дано початок однієї послідовності:

$$1;\quad 11;\quad 21;\quad 1211;\quad 111221;\quad 312211;$$

Яким буде наступний член послідовності?

ВЕКТОР

Якщо попередній розділ ми завершили невеликою загадкою, то на цей раз ми з невеликої загадки розпочнемо: що на малюнку?



Хотіли відповісти, що стрілки? Ні, для математика, фізика та старанного школяра вони будуть, натомість, векторами!

Про вектори таки можна думати як просто про стрілки. Як і будь-яка стрілка, вектор характеризується певним напрямком та певною довжиною. Вектори вважаються важливими, адже з їх допомогою можна описувати об'єкти, для яких важливими є як їх величина, так і напрямок.

Наприклад, професійні кайтери (або яхтсмени), безумовно, вивчали карти вітрів місцевого регіону – тамтешні численні стрілки, що описують напрямок та силу вітру, є векторами вітру.

Так само й фізики призвичаєні говорити про вектор сили: якщо ви тиснете комусь руку, то сила повинна бути спрямована як із визначеною інтенсивністю, так і в правильному напрямку. Зате, кожен рухомий об'єкт можна охарактеризувати вектором швидкості: у кожній точці він рухається в певному напрямку й з певною швидкістю.

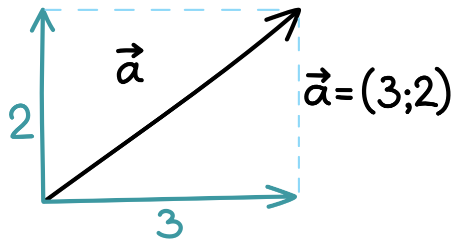
ЯК МАТЕМАТИЧНО ОПИСАТИ ВЕКТОР?

Двовимірний вектор є нічим іншим, як просто парою дійсних чисел – наприклад $(1; 3)$. Тривимірний вектор – це звичайна трійка дійсних чисел, наприклад, $(3; 0; 2)$.

У будь-якому випадку, гарним прикладом десятивимірного вектора є $(0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9)$, а чим є дві тисячі одинадцятивимірний вектор, мабуть, також розібратися нескладно,... хоча може бути складніше записати.

Щоб нагадати про зв'язок зі стрілками, як правило, вектор також позначають буквою та стрілочкою над нею, скажімо $\vec{v}$, $\vec{a}$ або $\vec{\text{o}}$. Наприклад вектор $\vec{a} = (3; 2)$. Звісно ж, ніхто не забороняє позначити вектор руху, наприклад як $\overrightarrow{\text{швидкість}}$, лише клопоту з написанням так буде більше.

Зв'язок між числовим записом та наочним зображенням проілюстровано на наступному рисунку. Два числа, що описують двовимірний вектор (їх називають координатами), показують, як далеко простягається стрілка у двох перехресних напрямках. У випадку тривимірного вектора, нам уже знадобляться три перехресні напрямки, а чотиривимірний малюнок буде ще складнішим...



ІГРИ З ВЕКТОРАМИ

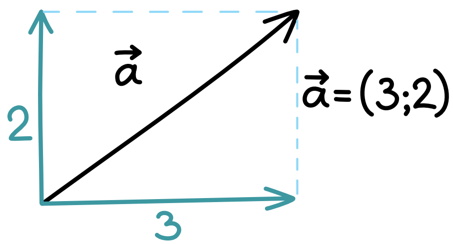
Вектор має дуже просте інтуїтивне пояснення – довжину та напрямок стрілочки. І все ж, як математичний об'єкт, вектор має багато різних властивостей, його можна багатьма способами перетворювати і виконувати з ним різні математичні операції.

Відповідно, увесь цей підрозділ рясніє новими поняттями та хитрощами, і сприйняти їх за один раз може бути досить утомливо. Тож радимо переглядати всі наступні записи по одному або по два, а для кожної властивості, перетворення та математичної операції добирати якийсь конкретний приклад, щоб побачити, що все-таки, у цілому розділі немає нічого складного.

РІВНІ ВЕКТОРИ

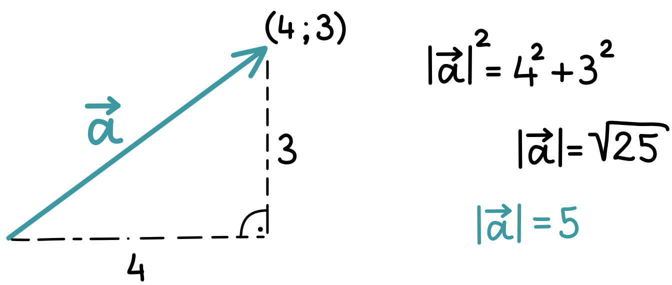
Якщо ми визначили якийсь новий математичний об'єкт, то перше природне запитання буде таким: коли два такі об'єкти є рівними? Тож , коли два вектори є рівними?

На щастя, у випадку векторів, відповідь досить очевидна і проста. Якщо представляти вектор як набір записаних у рядок чисел, то досить швидко стане ясно, що повинна означати рівність векторів: рівними повинні бути відповідні координати векторів.

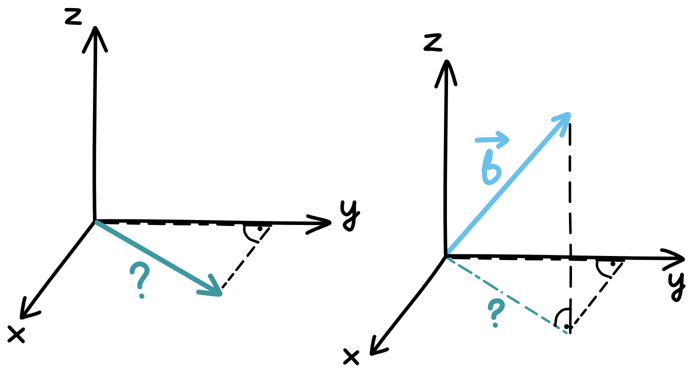


ДОВЖИНА ВЕКТОРА

Ми обчислюємо довжину $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ точно так само, як і відстань від точки до початку координат. Отже , довжину двовимірного вектора ми можемо обчислити так само, як і гіпотенузу прямокутного трикутника.



У випадку, коли вектор – тривимірний, то нам просто потрібно застосувати це міркування двічі. На рисунку показано послідовність знаходження довжини вектора $\vec{b} = (4; 3; 12)$.

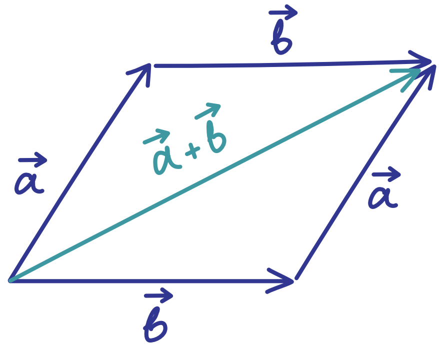


ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ

Ми можемо розглядати додавання векторів кількома способами. Додавання векторів нам потрібне, скажімо, тоді, коли ми хочемо додати кілька різних сил, що діють на один об'єкт.

По-перше, ми можемо розглянути додавання векторів, заданих своїми координатами. У цьому випадку для знаходження суми векторів ми додаємо відповідні координат и векторів. Наприклад, $(1; 0; -2) + (2; 2; 1) = (3; 2; -1)$.

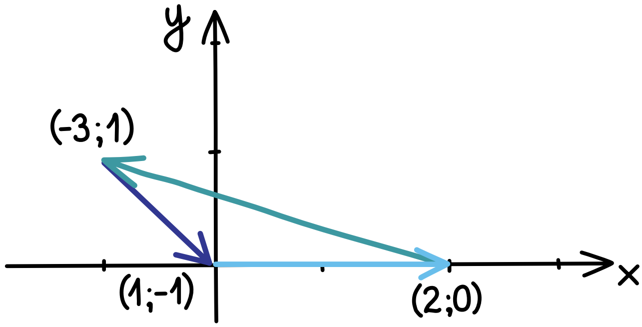
Водночас, про додавання векторів ми можемо думати також геометрично. Щоб знайти суму векторів, нам просто потрібно розмістити вектори, що додаються, один за одним.



Отже, початок вектора суми збігається з початком першого вектора, а кінець – з кінцем другого вектора. З наведеного рисунка добре видно, чому геометричне додавання векторів називають також «правилом паралелограма».

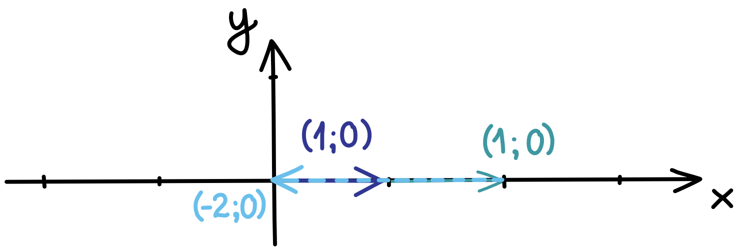
Наведений геометричний спосіб мислення добре розтлумачить випадок, коли, наприклад, сума трьох, чотирьох або шести векторів дорівнює нулю.

І справді, якщо сума трьох векторів дорівнює нулю, то кінець третього вектора повинен бути початком першого вектора, і тоді на рисунку з'являється трикутник. Наприклад, якщо у нас є вектори $(-3; 1)$, $(1; -1)$ і $(2; 0)$, то, додавши їх разом, ми дійсно отримаємо нульовий вектор: $(-3+1+2; 1-1+0) = (0; 0)$.



Так само, якщо, наприклад, сума чотирьох векторів дорівнює нулю, то вони визначають деякий чотирикутник, а якщо сума шести векторів дорівнює нулю, то шестикутник.

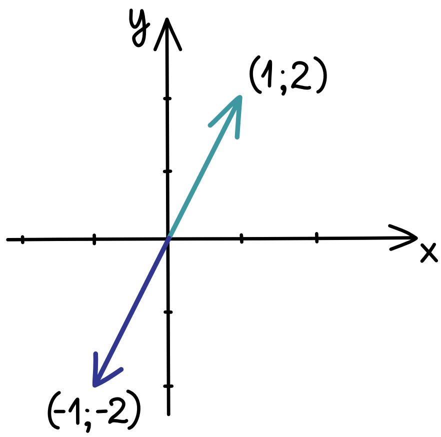
Уважний читач, звісно ж, помітить, що ми тут трохи схитрували. Якщо ми візьмемо вектори $(1; 0)$, $(1; 0)$ і $(-2; 0)$, то жодного трикутника не буде, адже всі вектори лежать на одній і тій прямій.



На щастя, ця дрібниця – це єдине, що може зіпсувати такий красивий , зазвичай, зв'язок.

Нульовий вектор, протилежний вектор

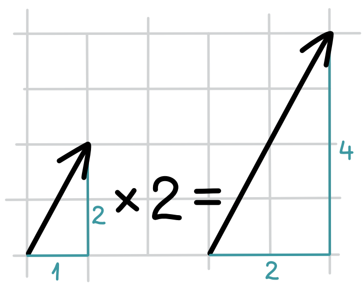
У додаванні чисел одне число відіграє особливу роль: число нуль. Після додавання до нього будь-якого числа, у результаті отримаємо це саме число. Аналогічним об'єктом поміж векторів є нульовий вектор: після додавання до нього будь-якого вектора отримаємо той самий вектор. Тож, тривимірним нульовим вектором буде, звісно ж, вектор $(0; 0; 0)$. Подібно, як і з числами, ми можемо визначити також і вектор, протилежний даному вектору: це вектор, після додавання якого до даного вектора, у результаті отримуємо нульовий вектор. Наприклад, вектором, протилежним вектору $(1; 2)$ є вектор $(-1; -2)$.



ВЕКТОРИ ТА МНОЖЕННЯ

Ми можемо множити вектори на дійсні числа. Знову ж таки, це можна зробити, використовуючи координати вектора: ми просто помножимо кожну координату вектора на дане число.

Водночас, існує і геометричний спосіб міркування: після множення дійсного числа на вектор ми розтягуємо його або стискаємо. Якщо число, на яке ми множимо вектор, є від'ємним, то, на додачу, ми також змінюємо напрямок вектора на протилежний.



Отож, множити вектори на дійсні числа не дуже складно. Але чи можна множити вектори?

Відповіддю, знову ж таки, буде «так», але для цього ми мусимо трохи відступитися від свого дотеперішнього розуміння множення. Можливо, буде правильніше сказати, що їх можна «множити» один на одного .

Насправді один вектор можна множити на другий вектор різними способами, але оскільки жоден із них не є цілком аналогічним до множення чисел, назви їм також даються різні: 1) скалярний добуток і 2) векторний добуток. Результатом скалярного добут ку двох векторів є дійсне число, а векторного добутку – знову ж таки, новий вектор.

Окремим запитанням є, звісно, навіщо нам узагалі «множити» вектори. З погляду математики таке бажання є цілком природним, адже всі вдало вибрані математичні перетворення та операції несуть із собою надію на створення більшої кількості зв'язків між різними розділами математики, і отже, вони можуть призвести до кращого розуміння всієї математики.

Утім, для практичного читача існує, на щастя, і життєво важлива відповідь, а саме: як ми скоро побачимо, як для скалярного добутку, так і для векторного добутку, у фізиків існує в усіх відношеннях інтуїтивно зрозуміле та природне трактування: скалярний добуток показує, якою мірою фізичні величини працюють заради однієї мети. Наприклад, коли тіло рухають у певному напрямку під дією постійної сили, то скалярний добуток дає нам знати, скільки корисної роботи було здійснено внаслідок переміщення тіла. Векторний добуток так само допомагає описати те, якою мірою та чи інша сила здатна змусити тіло обертатися.

На додачу, виявляється, що скалярний та векторний добутки відіграють важливу роль у комп'ютерній графіці. А саме: з їх допомогою такі геометричні перетворення, як обертання, симетрію можна звести суто до обчислень із координатами, з якими комп'ютери чудово справляються.

Під кінець, у повітрі, звісно ж, може зависнути питання: чи можна вектори якось «ділити»?

Цього разу ми нарешті можемо відповісти «ні», принаймні для скалярного та векторного добутків жодної оберненої операції, тобто операції ділення, не існує. Причина є досить прозаїчною – якщо ми фіксуємо один вектор, то існує велика кількість інших векторів, які після «множення» на нього дадуть точно такий самий скалярний або векторний добуток. Наприклад із вектором $(1; 0; 0)$ скалярний добуток, що дорівнює нулю, дадуть усі вектори виду $(0; a; b)$. Однак вони заповнюють усю площину y-z, і з-поміж них ми не зможемо вибрати результат математичної операції ділення!

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК

Якщо інтуїтивно скалярний добуток містить ідею паралелізму, то математично думати про скалярний добуток і визначати його [с. 44] можна двома способами. Ці два способи є рівноцінними в усіх відношеннях. Цю рівноцінність слід довести математично, але тут ми обмежимось лише ознайомленням із цими двома способами.

Скалярний добуток через координати

Один із способів визначення скалярного добутку базується на координатах: ми отримаємо скалярний добуток двох векторів, помноживши спочатку відповідні координати двох векторів, а потім, додавши усі отримані добутки.

Позначивши скалярний добуток добре помітною точкою, ми можемо написати наприклад:

$$(1;0;3) \circ (2;2;2) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8.$$

Цікаво зазначити, що результатом визначеної у такий спосіб математичної операції множення буде дійсне число.

Зовсім не просто відразу зрозуміти, чому таке досить просте означення може одночасно бути і цікавим, і корисним. Певну надію дає розуміння того, що ми можемо дати нічим не гірше означення скалярного добутку цілком іншим способом.

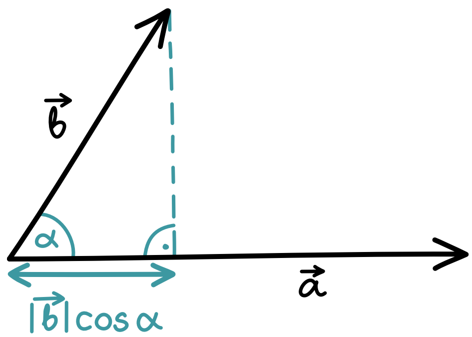
Скалярний добуток через кут між векторами

Скалярний добуток також хитро пов'язує кут між векторами та їх довжини. Він дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}).$$

Хоча у такий спосіб знайти скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами, складніше, таке означення пропонує хороший спосіб скласти собі уявлення про скалярний добуток за допомогою прикладів.

Зауважимо, що з огляду на це означення, ми можемо розглядати скалярний добуток як добуток довжини вектора $\vec{a}$ на проєкцію вектора $\vec{b}$ на вісь, що визначається вектором $\vec{a}$.



Отже,

- якщо один з векторів є нульовим, то скалярний добуток дорівнюватиме 0, оскільки довжина нульового вектора дорівнює нулю;
- добуток вектора на себе самого дорівнює квадрату довжини вектора, тому що кут між векторами дорівнює $0°$ і $\cos 0° = 1$ – вектори вказують в абсолютно тому самому напрямку;
- якщо два вектори перпендикулярні один до одного, то їх скалярним добутком буде нуль, адже $\cos 90° = 0$.

Більш загально ми бачимо, що скалярний добуток двох векторів з фіксованими довжинами буде максимальним, якщо вектори однаково напрямлені. Коли кут між векторами починає збільшуватися, скалярний добуток – зменшується, і його значення буде мінімальним тоді, коли напрямки векторів – протилежні.

Той факт, що скалярний добуток можна визначити двома способами, робить встановлення його властивостей досить зручним – принаймні ту чи іншу властивість легко довести, спираючись на одне з означень.

Так само різні форми задання скалярного добутку корисні під час розгляду різних задач: безкоординатна форма через довжини векторів та кут між ними є улюбленою у фізиків, тоді як у комп'ютерній графіці зручніше використовувати координатний спосіб задання скалярного добутку.

Скалярний добуток та фізика

Багато фізичних величин також характеризуються розміром та напрямком, наприклад, рух відбувається в певному напрямку та з певною швидкістю, сила діє в певному напрямку та має певне чисельне значення. Скалярний добуток вступає у гру внаслідок поєднання фізичних величин.

Наприклад, коли за старих часів використовували коней для переміщення човна по річці, то найрозумніше було вести коня паралельно вздовж берега річки якомога ближче до берега.

Про цю ситуацію можна міркувати, використовуючи скалярний добуток. Коли човен переміщається по річці, то ми можемо описати його рух за допомогою вектора швидкості. Кінь прикладає до нього тягу, яку ми описуємо вектором сили. Тоді скалярний добуток цих векторів дорівнює корисній роботі, виконаній за одиницю часу, тобто потужності. Інтуїтивно зрозуміло, що скалярний добуток містить інформацію про те, що переміщенню човна сприяє лише складова вектора сили на вісь, що задається вектором швидкості. Її можна назвати корисною силою. Дійсно, якби кінь тягнув човна перпендикулярно річці, то вектор сили і вектор швидкості були б перпендикулярними, а отже, скалярний добуток дорівнював би нулю, і кінь не відігравав би ролі у просуванні човна. Чим ближче до річки ступає кінь, тим більш паралельними є вектор сили та вектором швидкості, тим більшим – скалярний добуток, і тим більшою – корисна сила.

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ТА ТЕОРЕМА ПІФАГОРА*

Скалярний добуток має багато властивостей, аналогічних звичайному множенню.

По-перше, використовуючи координатну форму ми можемо легко показати, що скалярний добуток також є дистрибутивним: інакше кажучи, для будь-яких трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедлива рівність $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$.

Наприклад, у випадку двовимірних векторів $\vec{a} = (a_1; a_2)$, використовуючи означення скалярного добутку, ми можемо записати:

$$\begin{aligned}\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) &= a_1 \circ (b_1 + c_1) + a_2 \circ (b_2 + c_2) \\ &= (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1) + (a_2 \cdot b_2 \ + \ a_2 \cdot c_2) \\ &= \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}.\end{aligned}$$

З першого чи другого означення скалярного добутку, ми так само бачимо, що скалярний добуток є комутативним, тобто порядок векторів при знаходженні скалярного добутку не береться до уваги:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}.$$

Водночас ми пам'ятаємо, що на основі означення скалярного добутку через довжини векторів та кут між ними ми зробили висновок, що скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю, а скалярний добуток вектора на себе самого дорівнює квадрату довжини вектора.

Використовуючи тепер ці дві властивості, ми можемо довести , наприклад, теорему Піфагора.

Нехай нам дано прямокутний трикутник, сторони-вектори якого $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є перпендикулярними – тобто $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$. Водночас, раніше ми зазначали, що для сторін-векторів трикутника справедлива також рівність $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, або $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ [с. 142]

Знайдемо тепер скалярний добуток обох частин на них самих. Отримаємо:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \circ \vec{c}.$$

Використовуючи наведену на початку розділу першу властивість скалярного добутку, ми побачимо, що ліва частина рівності дорівнює $\vec{a} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{b} + 2\vec{a} \circ \vec{b}$. Однак, $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ і

$$\begin{aligned}\vec{a} \circ \vec{a} &= |\vec{a}|^2 \\ \vec{b} \circ \vec{b} &= \left|\vec{b}\right|^2 \\ \vec{c} \circ \vec{c} &= |\vec{c}|^2.\end{aligned}$$

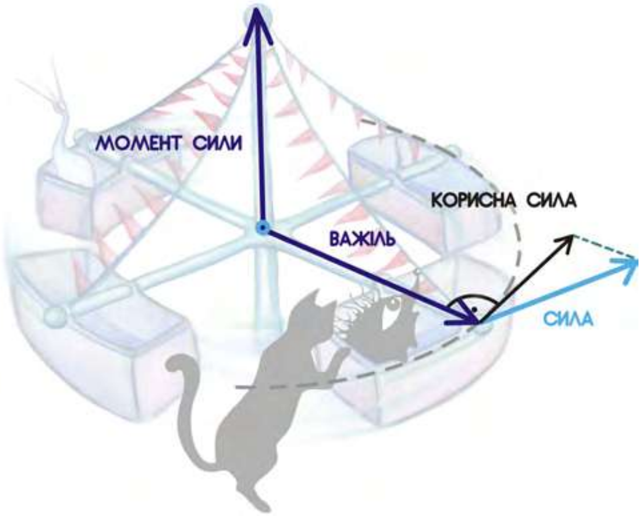
Отож, і справді справедлива тотожність $|\vec{a}|^2 \ + \ |\vec{b}|^2 \ = \ |\vec{c}|^2$, що і є теоремою Піфагора.

ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК*

Ми бачили, що, якщо тіло рухається по прямій , і на нього діє певна сила, то за допомогою скалярного добутку векторів сили та швидкості, ми можемо знайти корисну паралельну напрямку руху силу, яка впливає на швидкість руху тіла.

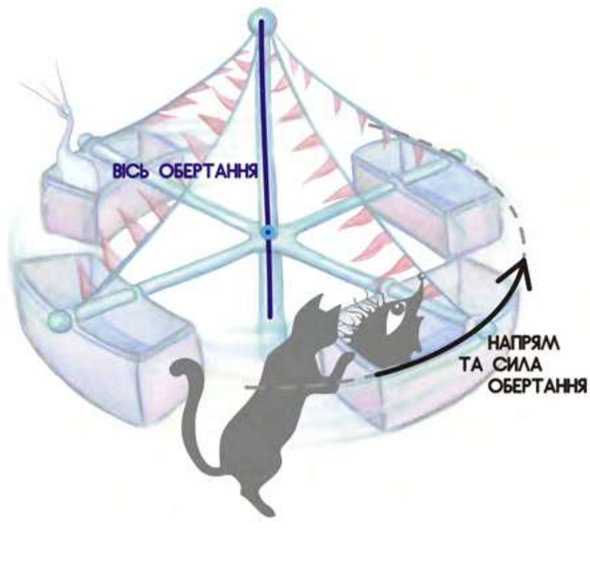
Однак, якщо ми, наприклад, зафіксуємо відстань тіла до певного центра (або осі обертання) за допомогою якого-небудь важеля і так обмежимо прямолінійний рух, то тіло зможе лише обертатися навколо цієї осі.

У цьому випадку на швидкість обертання тіла впливає, натомість, перпендикулярна до важеля складова сили, яку й на цей раз можна назвати корисною силою. Найзручніше описати дію сили, що призводить до обертання, за допомогою так званого моменту сили, яким є якраз векторний добуток вектора, що визначає важіль (мовою фізиків: радіус-вектора точки, до якої прикладена сила) та вектора сили, що діє на тіло.



Як ми бачимо на малюнку, моментом сили є якийсь досить дивний вектор. Далі ми спробуємо пояснити, що означає векторний добуток, а разом із ним – і момент сили, і чому саме так.

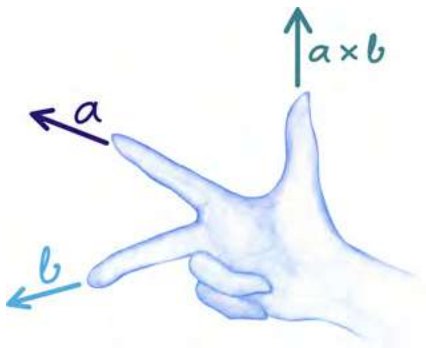
Почнемо з опису обертання. Для опису сили, що діє у заданому напрямку, наприклад під час прямолінійного руху, необхідно лише одне число – адже напрямок дії є відомим. Водночас описати дію, що призводить до обертання, вже складніше, тому що обертання саме собою є трохи складнішим рухом. Найбільш природним було б обертання описати за допомогою: 1) осі обертання, 2) напрямку обертання, і 3) швидкості або сили обертання.



Тому всі три елементи є також і в описі моменту сили, тобто у векторному добутку векторів важеля та сили.

Отож, результатом векторного добутку буде новий вектор, однаково напрямлений з віссю обертання, напрямок якої визначається напрямком обертання, а його довжину визначає швидкість обертання.

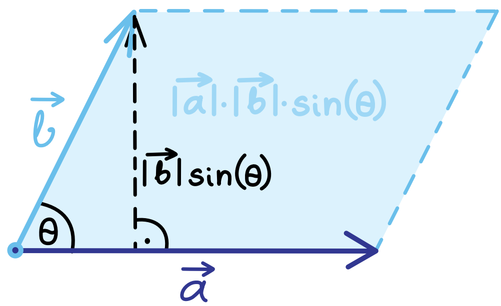
У нас є два варіанти вибору орієнтації: за домовленістю, обертання відбувається проти годинникової стрілки відносно осі обертання. Від цієї домовленості також походить так зване правило правої руки.



Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного із векторів на проєкцію другого вектора на вісь, що визначається першим вектором, довжину векторного добутку двох векторів ми знаходимо за допомогою добутку довжини одного із векторів та перпендикулярної складової другого вектора.

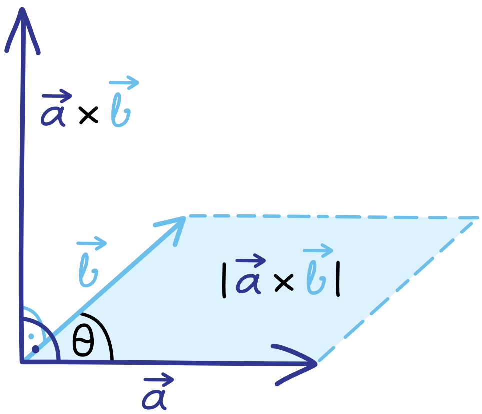
А саме, довжина векторного добутку дорівнює:

$$\overrightarrow{|a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}).$$



Таким чином, чим більш «перпендикулярними» є два вектори, тим довшим буде їх векторний добуток. Як ми бачимо з малюнка, ця величина також має чудову інтерпретацію: вона дорівнює площі паралелограма, побудованого на двох векторах. Дійсно, ми можемо вважати, що $\vec{a}$ дає нам основу паралелограма, $|\vec{b}| \cdot \sin(\angle\vec{a}, \vec{b})$ – висоту паралелограма, а площу ми знайдемо, перемноживши їх [с. 366]. Через це трактування на основі площі векторний добуток також пов'язаний із визначниками, про які ми поговоримо в розділі про матриці [с. 152].

Отже, векторним добутком двох векторів є вектор, перпендикулярний до кожного з даних векторів, а його довжина дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах. Задля кращого запам'ятовування усе це можна уявити на наступному рисунку.



На додачу до моменту сили векторний добуток допомагає описати також інші речі, пов'язані з обертанням, наприклад момент імпульсу, а також те, що відбувається в електромагнітному полі: наприклад сила, що діє на заряд, який рухається в магнітному полі, пропорційна векторному добутку вектора його швидкості та вектора магнітної індукції.

МАТРИЦЯ*

Ми побачили, що, якщо замість одного числа, записати в рядок кілька чисел, то отримаємо вектор. Але чому в нас має бути лише один рядок чисел? У нас же могла би бути ціла таблиця чисел!

І справді, з погляду математики, таблиці чисел також вважаються дуже цікавими, і їх називають матрицями.

1×1 МАТРИЦЯ

$$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

2×3 МАТРИЦЯ

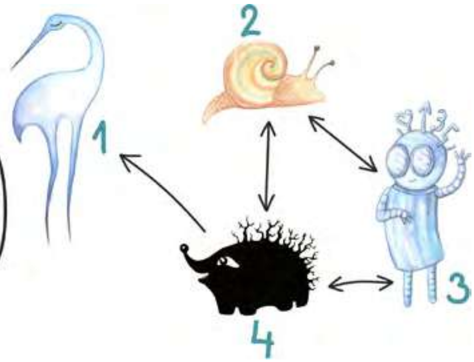
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

МАТРИЦЯ ТА МЕРЕЖІ

За допомогою матриць дуже приємно подавати чудові дані та зв'язки. Наприклад, таблиця може описувати мережу дружби компанії з чотирьох осіб так:

- Пронумеруємо істот цифрами $1;\ 2;\ 3;\ 4$.
- У клітинку $(i; j)$ запишемо число 1, якщо особі подобається особа, і 0 – якщо не подобається.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$



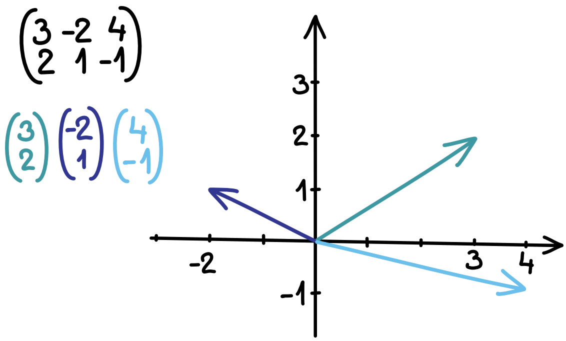
Як бачимо, те, що особі 1 не подобається жодна з трьох інших осіб, легко зрозуміти, як з матриці, так і з малюнка.

Подання у вигляді матриці дає змогу досліджувати набагато більші та складніші мережі, ніж дружба наших книжкових персонажів. Наприклад, ми можемо представити у вигляді матриці мережі нервових клітин або мережі зв'язків між процесами, що відбуваються в клітині. Нервові клітинні мережі можуть мати до 10 мільярдів нейронів, що ускладнює їх геометричне подання або запис, проте матричний опис може допомогти вивчити їх за допомогою комп'ютерів.

МАТРИЦЯ ТА ВЕКТОРИ

Однак, у цій книзі нас цікавить дещо інший, геометричний підхід до матриць.

Ідея полягає в тому, щоб дивитись на кожен стовпець у таблиці, як на вектор. Так матриця 3×3 дає три тривимірні вектори, матриця 3×2 – два тривимірні вектори, а матриця 2×2 – два двовимірні вектори.



Зауважимо, що відтепер у цьому розділі ми більше не будемо розглядати вектори у вигляді рядка чисел , а будемо викладати їх у стовпчики. Ця заміна просто зробить подальше написання зручнішим.

Такий погляд незабаром допоможе нам пов'язати матриці також із системами лінійних рівнянь.

ВИЗНАЧНИК ТА СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Якими б захоплюючими не здавалися б матриці 4×4, 10×10, 30×2, а також матриці інших розмірів, надалі ми зосередимося на матрицях 2×2 і 3×3.

Спочатку ми введемо одну з характеристик квадратних матриць (квадратна матриця має однакову кількість стовпців та рядків), що називається визначником. Потім ми спробуємо пояснити, як саме визначники пов'язані з розв'язками систем лінійних рівнянь, і звідки, все-таки, походять деякі містичні способи розв'язування систем рівнянь у шкільних підручниках.

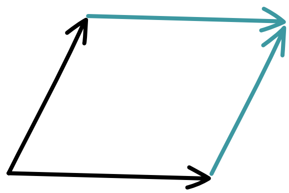
Цей розділ, безумовно, виходить за межі шкільної програми, але водночас допомагає, мабуть, краще зрозуміти інші теми. Можливо, перед прочитанням буде корисно стисло ознайомитися з розв'язуванням рівнянь у розділі 4 [с. 176].

ВИЗНАЧНИК

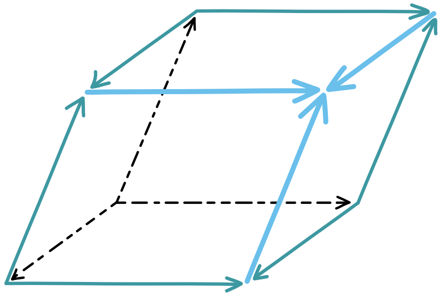
Знайомство з визначником ми можемо розпочати з одного питання, що стосується конструювання.

Що ми можемо побудувати за допомогою двох двовимірних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а що – використовуючи три тривимірні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

Якщо два двовимірних вектори випадково не виявляться паралельними, тобто якщо їх не можна розмістити вздовж однієї прямої, то ми можемо використати їх для побудови паралелограма.



Подібно у випадку, якщо три тривимірні вектори не паралельні і лежать в одній площині, то ми можемо використати їх для побудови красивого паралелепіпеда.



В обох випадках ці геометричні фігури мають один приємний параметр – їх обсяг (площа або об'єм). Визначник квадратної матриці саме цей обсяг і описує.

У випадку матриці 2×2 абсолютне значення її визначника дорівнює площі паралелограма, побудованого на двох векторах-стовпцях.

Наприклад, абсолютне значення визначника матриці $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ дорівнює двом, оскільки вектори-стовпці матриці визначають прямокутник із довжинами сторін 2 та 1. Нагадаємо, що площа паралелограма визначає також довжину векторного добутку. І справді, абсолютне значення визначника матриці 2×2 дорівнює довжині векторного добутку своїх векторів-стовпців.

У випадку матриці 3×3 абсолютне значення визначника дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах-стовпцях.

За допомогою визначників можна дізнатись, коли системи лінійних рівнянь мають розв'язки, а також, як знайти ці розв'язки. А тепер візьмемося за всі ці запитання підряд.

КОЛИ СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА НЕВІДОМИМИ МАТИМЕ РОЗВ'ЯЗОК?

Нагадаємо, що систему лінійних рівнянь у загальному вигляді можна записати так:

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Кожне з десяти позначень має тут свою власну роль, і це – аж ніяк не збивання з пантелику. Величини a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 та c_2 ми розглядаємо як уже відомі числа. Ми позначаємо їх буквами, просто щоб розв'язати багато систем одночасно [с. 48]. Отже, дана система рівнянь вимагає просто знайти значення двох невідомих x і y, які перетворюють обидва рівняння в правильні числові рівності. Наприклад, ми могли б присвоїти відомим величинам певні значення й отримати більш конкретний приклад:

$$2x + y = 5,$$

$$x + y = 3.$$

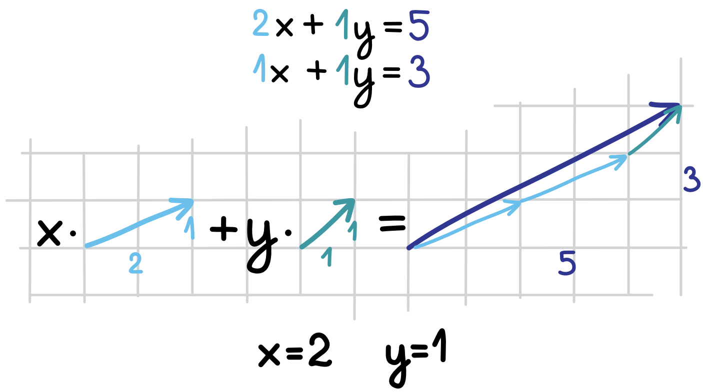
Ці два лінійні рівняння можна також розглядати окремо, кожне з яких описує пряму, про що йдеться у розділі про рівняння [с. 184].

Для розв'язання системи рівнянь обидва рівняння потрібно якось між собою пов'язати. Один зі способів це зробити – побудувати обидві прямі, що описуються рівняннями, на одній координатній площині [с. 184]. Однак навіть хитріше буде використати матрицю:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Як зазначалося раніше, можна вважати стовпці $\binom{a_1}{a_2}$ і $\binom{b_1}{b_2}$ двовимірними векторами, і оскільки постійно виписувати стовпці набридає, ми позначимо їх відповідно через $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Завдяки розв'язуванню системи лінійних рівнянь ми тепер можемо міркувати так: наша мета – знайти такі дійсні числа x і y, щоб ми могли подати вектор $\binom{c_1}{c_2}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$. Спочатку це простіше уявити за допомогою малюнка й конкретного прикладу: ми зображуємо вектори $\binom{2}{1}$ та $\binom{1}{1}$ і намагаємося поєднати їх так, щоб отримати вектор $\binom{5}{3}$.



Коли це можливо? Якщо нам дано два вектори, то коли ми можемо представити третій вектор, подовжуючи або вкорочуючи та додаючи їх?

Якби два задані вектори були б $\vec{a} = \binom{1}{0}$ і $\vec{b} = \binom{0}{1}$, тобто одиничними векторами однаково напрямленими з осями x та y, то звісно ж, під час цього процесу ми отримали б інші вектори. Вектор $\binom{c_1}{c_2}$ дорівнював би просто $c_1 \cdot \vec{a} + c_2 \cdot \vec{b}$:

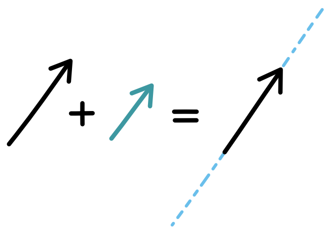
$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Це очевидно також із самої системи рівнянь. У такому випадку система мала б дуже просту форму:

$$x = c_1,$$
$$y = c_2.$$

Цікаво, – і в цьому ви можете переконатися за допомогою старанних побудов – що ситуація буде подібною майже за будь-якого вибору початкових векторів! Майже завжди ми можемо представити одним єдиним способом кожен третій вектор як лінійну комбінацію даних двох векторів.

Це неможливо тільки у випадку, коли площа паралелограма, побудованого на даних векторами, дорівнює 0, тобто лише тоді, коли вектори колінеарні або однаково протилежні. У цьому випадку їх лінійними комбінаціями можна представити лише вектори, колінеарні даним векторам.



Однак тепер нагадаємо, що площа паралелограма, побудованого на векторах $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, дорівнює абсолютному значенню визначника матриці $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

Звідси й випливають властивості, які можна знайти в підручниках:

- якщо визначник не дорівнює нулю, а отже, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, то система рівнянь має рівно один розв'язок,
- однак, якщо визначник дорівнює нулю, а отже, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то система не матиме розв'язків, або матиме нескінченно багато:
    - якщо вектор $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ колінеарний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то розв'язків існує нескінченно багато,
    - в протилежному випадку, не існує жодного розв'язку.

Далі просунемся ще на крок уперед і покажемо, як за допомогою визначника знаходити точні розв'язки системи лінійних рівнянь із двома невідомими.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧНИКІВ

Як ми бачили, систему лінійних рівнянь

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

ми можемо записати так за допомогою векторів:

$$x\binom{a_1}{a_2} + y\binom{b_1}{b_2} = \binom{c_1}{c_2}.$$

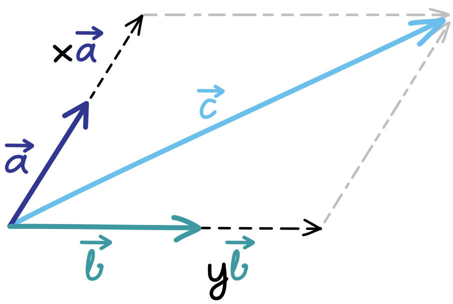
Для зручності та економії чорнила ми знову введемо позначення для векторів-стовпців:

$$\binom{a_1}{a_2} = \vec{a}, \binom{b_1}{b_2} = \vec{b} \text{ та } \binom{c_1}{c_2} = \vec{c}.$$

Отже, отримаємо рівняння:

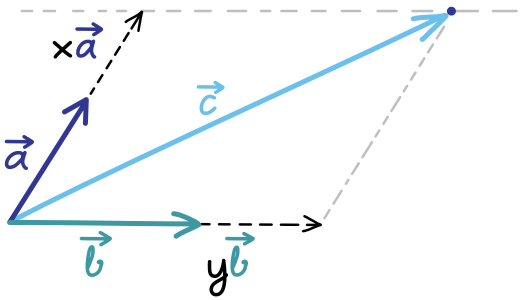
$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}.$$

Інакше кажучи, на даний момент ми хочемо вкоротити або подовжити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, саме настільки, щоб внаслідок їх додавання отримати третій вектор $\vec{c}$. Припустимо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – не колінеарні, і на них можна побудувати чудовий паралелограм. Тоді саме за допомогою цього паралелограма ми можемо візуалізувати також і нашу задачу:



Наскільки потрібно вкоротити чи подовжити вектори визначають дійсні числа x та y. Як знайти їх величину?

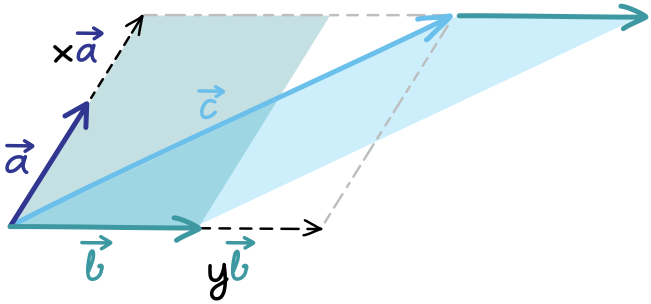
Як видно з рисунка, шукане нами число x повинно «переміщати» кінець вектора $\vec{a}$ «настільки далеко» від вектора $\vec{b}$, «наскільки далекий» від нього кінець вектора $\vec{c}$.



Тепер пригадаємо, що ми можемо записати площу паралелограма як добуток його основи на висоту [с. 366]. Отже, ми можемо розглянути два паралелограма з однаковою площею:

- по-перше, паралелограм, побудований на векторах $\vec{b}$ і $x\vec{a}$,
- по-друге, паралелограм, побудований на векторах $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

І справді, для обох основою виступає вектор $\vec{b}$ і їх висоти, проведені до цієї основи, теж однакові.



Використовуючи це спостереження, ми можемо знайти потрібне значення для змінної x. А саме: паралелограм, утворений векторами $\vec{b}$ та $x\vec{a}$, у x разів «вищий», ніж паралелограм, утворений векторами $\vec{b}$ та $\vec{a}$. Водночас ми знаємо, що площа паралелограма між векторами $\vec{b}$ і $\vec{a}$ описується визначником

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

З цього спостереження ми можемо визначити відповідне значення для змінної.

Отже, інтуїтивно цілком зрозуміло, що для того, щоб знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{b}$ і $x\vec{a}$, нам потрібно визначник

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

просто помножити на число x.

Водночас, площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{b}$ і $\vec{c}$, задається визначником

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Отже, ми отримуємо рівняння для знаходження коефіцієнта x:

$$x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Звідси ми вже легко можемо знайти x:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Якщо ми хочемо знайти коефіцієнт y, то мусимо дотримуватися тієї самої процедури, використовуючи вектори $\vec{a}$ і $y\vec{b}$. У результаті одержимо:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Подібний метод працює і в трьох, чотирьох, восьми вимірах, хоча його геометрична інтерпретація, звісно, стає відтак все складнішою. Інакше кажучи, за допомогою визначників можна розв’язувати системи лінійних рівнянь з якою завгодно кількістю невідомих. Отримані формули особливо цінні у використанні комп’ютерів – вони дають швидкий і простий, принаймні для комп'ютерів, спосіб розв’язування навіть дуже великих систем лінійних рівнянь.

КОЛИ СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА НЕВІДОМИМИ МАЄ РОЗВ'ЯЗОК?

Щоб переконатися, що все гарно роз'яснилося, ми також коротко обговоримо випадок із трьома невідомими. Насправді все є аналогічним. Якщо ми маємо систему рівнянь

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

то можемо розглянути матрицю

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

і три тривимірні вектори:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ і } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

На цей раз, ми хочемо подати вектор $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}.$$

Знову ж таки, виникає питання, коли ми можемо даний вектор розкласти зазначеним чином через три дані вектори, то очевидно, що у випадку векторів

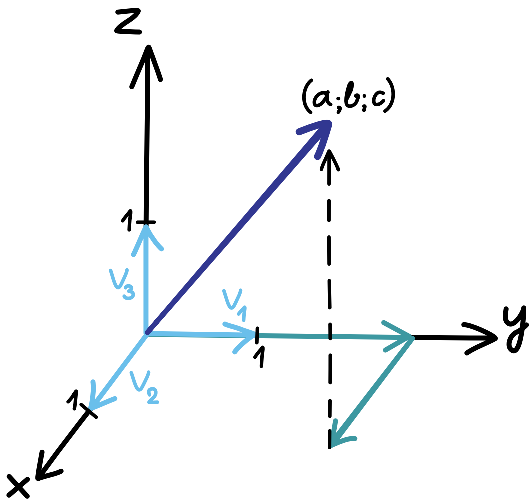
$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

це можливо завжди.

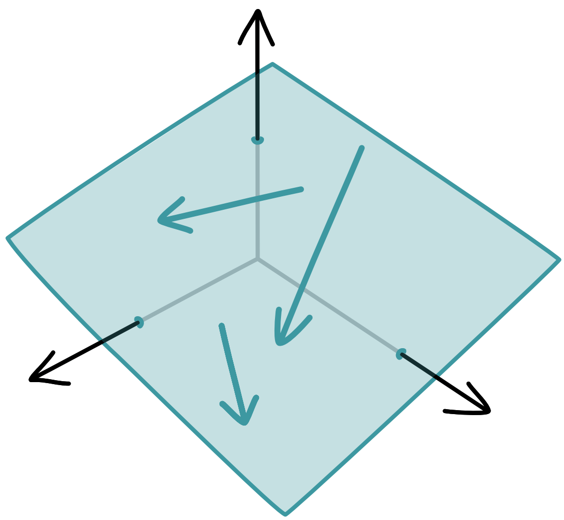
Ми можемо це зробити, наприклад, з вектором $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, якщо вектори $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ помножити відповідно на дійсні числа та a, b і c додати:

$$a \cdot \overrightarrow{v_1} + b \cdot \overrightarrow{v_2} + c \cdot \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Можливо, натомість, простіше уявляти це графічно:



Виявляється, що єдина перешкода дуже нагадує двовимірний випадок – ми можемо подати будь-який вектор $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ одним єдиним способом саме тоді, коли вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не паралельні одній площині або не лежать в одній площині, інакше кажучи, якщо об'єм побудованого на них паралелограма не дорівнює нулю. Однак, якщо вектори лежать в одній площині, то їх лінійними комбінаціями можна представити лише вектори, які лежать у цій же самій площині.



Тепер, оскільки абсолютне значення визначника даної матриці дорівнює об'єму паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, то система лінійних рівнянь з трьома невідомими має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли цей визначник не дорівнює нулю.

Якщо визначник дорівнює нулю, то слід дізнатися, чи лежить вектор $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ у тій же площині, що й вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, чи ні. Якщо лежить, то розв'язків існує нескінченно багато, а якщо ні – то розв'язків немає.

Знову ж таки, записати розв'язки системи за допомогою визначника також можна, однак ми залишаємо зацікавлених обмізковувати це самими.

ЧАСТИНА 4 –

РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНІСТЬ

Чоловік, який знає все
про алгебру, тим не менш,
часто є лопухом, якщо це все,
що він знає.

Фрідріх Великий

РІВНЯННЯ

Рівняння допомагає точно і математично записати певні умови. Це – перший етап опису природи та того, що нас оточує, – пояснення світу математичними зв’язками.

Припустимо, що ми хочемо збудувати нове Співоче поле. Найважливішим у будівництві буде, звичайно, передбачити розміщення оптимальної кількості любителів поспівати. Знаючи, наскільки хористам подобається наспівувати пліч-о-пліч, можна оптимістично припустити, що на одному квадратному метрі сцени помістяться три співаки.

Ми можемо записати математично цю умову так:

$$\text{МОЖЛИВЕ ЧИСЛО ХОРИСТІВ} = 3 \cdot \text{ПЛОЩА СЦЕНИ}$$

Якщо довге записування нам не потрібне, ми можемо позначити можливу кількість співаків через A, а число вільних квадратних метрів – через B і записати те саме рівняння так:

$$A = 3 \cdot B.$$

Хоча тепер ми мусимо добросовісно пам’ятати, що все-таки позначають A і B, клопоту з написанням буде менше.

Рівняння якраз і допомагають економно записувати умови й переформулювати життєво важливі питання так, що збережеться лише те, що є важливим для цього питання. Скажімо, ми повністю забули про погоду під час пісенного фестивалю, чи як хтось одягається, і це – правильно.

Рівняння містять:

1. деякі змінні, тобто величини, значення яких поки що нам невідомі [с. 48];
2. деякі числа, які називаються коефіцієнтами, якщо на них множать деякі змінні, і вільними членами, якщо вони – самі по собі;
3. знак рівності «=», який поєднує ці змінні та числа.

Наприклад, у нашому рівнянні є дві змінні A і B, число 3 у нашому рівнянні є коефіцієнтом, а вільного члена немає жодного.

Якби ми захотіли додати умову, що, тим не менш, 100 квадратних метрів має залишитися також для оркестру, то мусили б зменшити число квадратних метрів, відведених для співаків, на 100, і отримали б рівняння з вільним членом:

$$\text{МОЖЛИВЕ ЧИСЛО ХОРИСТІВ} = 3 \cdot (\text{ПЛОЩА СЦЕНИ} - 100).$$

Звісно, врешті-решт, рівняння слід ще й розв'язати, тобто знайти всі пари чисел, які задовольняють наведене рівняння.

Тут це не особливо складно: адже співвідношення $A = 3 \cdot B$ лише встановлює обмеження, що одне число – більше за інше в три рази. Тож розв'язком рівняння є, наприклад, пара чисел $A = 3$, $B = 1$, а якщо $A = 3600$, то $B = 1200$, якщо $A = -1$, то $B = -\frac{1}{3}$.

Як ми скоро побачимо, всі ці розв'язки збираються на одній прямій. Легко помітити, що аж ніяк не кожен розв'язок все ще можна інтерпретувати в межах нашої початкової задачі. Дійсно, співвідносячи розв'язок з життєвим контекстом, ми, знову ж таки, повинні бути обережними – одним зі способів переконатися, що все йде добре – це звернути увагу на одиниці вимірювання, використані у вихідній задачі.

РІВНЯННЯ ТА ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ

Рівняння з узятою із життя основою, зазвичай, містять також одиниці вимірювання. Наприклад, у нашому рівнянні йшлося про квадратні метри та кількість людей.

Передусім, з ними важливо бути уважними, адже якщо переплутати $10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ і $10\,\frac{\text{км}}{\text{г}}$, то можна досить серйозно помилитися.

По-друге, вони допомагають зрозуміти, чи записано було доладне рівняння. А саме, скажімо, ми можемо подивитися, чи значення виразів, що записані в обох частинах рівняння, є порівнюваними, тобто, чи обчислені вони в одних і тих самих одиницях вимірювання – адже по обидва боки знаку рівності повинні бути ті ж самі одиниці.

Наприклад, у лівій частині нашого рівняння – кількість співаків, тобто певне число людей. Однак, що ми маємо у правій частині рівняння?

На перший погляд, там начебто є лише кількість квадратних метрів – одиниць площі. Утім, пригадавши, що коефіцієнт 3 дорівнює числу людей на кожному квадратному метрі, одиницею вимірювання ми все одно отримаємо кількість людей:

$$\text{КІЛЬКІСТЬ ЛЮДЕЙ} = \frac{\text{КІЛЬКІСТЬ ЛЮДЕЙ}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^2.$$

Однак, на час математичного розв'язування рівнянь про одиниці вимірювання можна, втім, забути – головне, щоб вони правильно вишикувалися в рядок на початку та в кінці.

РІВНЯННЯ РІЗНИХ ТИПІВ

Рівняння можуть виглядати дуже по-різному, наприклад, усі наступні рівності – рівняння:

$$\text{ВІК} - 4 = 12,$$

$$x^3 - 4x = 4\,,$$

$$\text{ПЕРША ЗМІННА} + \text{ДРУГА ЗМІННА} = 3,$$

$$W + Y + Z = 0,$$

$$x^n + y^n = z^n.$$

Перша відмінність, звичайно, полягає в тому, що для змінних ми вибрали різні позначення. Деякі ми позначили буквами, деякі – словами.

Однак, є й інші відмінності: деякі рівняння мають одну змінну, а деякі – кілька. У деяких рівняннях, змінна – в першому степені, а в деяких – її піднесено до більш високого степеня. У деяких рівняннях байдикують також деякі відмінні від нуля числа, що їх ми назвали вільними членами, інші ж містять лише змінні.

Різні типи рівнянь допомагають описати різні умови, але також потребують різних методів розв'язування.

РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

В обох рівняннях $\text{ВІК} - 4 = 12$ і $x^3 - 4x = 4$ є лише одна змінна, тобто шукана величина. Оскільки для математики немає жодного значення, як змінні позначати, то передусім, ці рівняння відрізняются степенем, до якого піднесена змінна.

Перше з них буде називатися лінійним рівнянням, оскільки найвищим степенем змінної є 1, а друге – кубічним рівняння, оскільки найвищим степенем змінної є 3.

Найнебезпечнішим у шкільній програмі є, звісно ж, квадратне рівняння, формулу коренів якого вимагають вивчити на зубок. Через це ми також покажемо, що цей розв'язок аж ніяк не вигадливий, а є результатом досить чітких математичних міркувань [с. 275].

Звичайно, ніхто не каже, що показник степеня повинен бути більшим за одиницю. Тож говорять також про ірраціональні рівняння, де в гру вступає квадратний корінь зі змінної. Наприклад, $\sqrt{x} + 2 = 4$.

Загалом, чим складнішим є степінь, до якого підносять змінну, тим складніше також розв'язати рівняння.

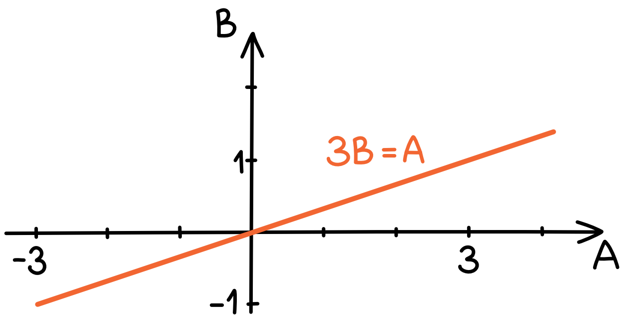
РІВНЯННЯ З КІЛЬКОМА ЗМІННИМИ

Звісно ж, у рівнянні може бути також і кілька змінних. Наприклад, представлене на початку розділу рівняння зі співаками та помостом сцени, мало дві змінні. Однак, рівняння $x^n + y^n = z^n$, наприклад, – це рівнянням із трьома змінними, де число n є відомим.

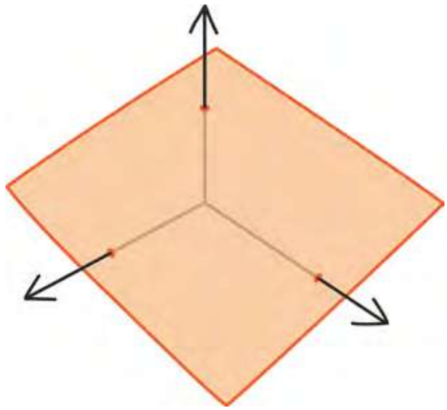
Одним з найпростіших рівнянь із кількома змінними є лінійне рівняння з двома змінними, обидві з яких – у першому степені. Наприклад, $x + 3y = 4$ або $0{,}5x + y = 2$ є лінійними рівняннями з двома змінними.

Оскільки тут ми маємо дві змінні, їх взаємозв'язок можемо відобразити також на координатній площині. Візуально ці рівняння можна уявити як прямі: множина усіх пар чисел, які задовольняють лінійне рівняння з двома змінними, зображує на площині пряму.

Наше початкове рівняння $A = 3 \cdot B$, насправді, також є рівнянням прямої.



Так само усі трійки чисел, що задовольняють лінійне рівняння з трьома змінними, зображують у просторі одну площину.



Про рівняння прямої та площини ми, звісно ж, незабаром поговоримо детальніше [с. 184].

Ніхто не забороняє скласти рівняння також із чотирма, шістьма або двома сотнями членів. Наприклад, красивим є рівняння

$$A + B + C + D + \ldots + X + Y = 10^6.$$

Чи можливо це рівняння також якось інтерпретувати? Одна трохи божевільна ідея – сказати, що множина розв'язків рівняння зображує в 26-вимірному просторі 25-вимірну площину. Однак, уявити це складно! Про це рівняння простіше міркувати, уявивши як 26 шахраїв-спекулянтів ділять між собою поцуплений мільйон євро.

СИСТЕМА РІВНЯНЬ

Іноді неможливо записати всі бажані умови одним рівнянням. Шукані величини задовольняють декілька умов одночасно. Отак ми й отримуємо систему рівнянь, що складається з декількох рівнянь. Розв'язування системи рівнянь означає пошук величин, які задовольняють всі рівняння одночасно.

Наприклад, нам може бути відомо, що площа прямокутної кімнати – десять квадратних метрів, а периметр – чотирнадцять метрів, і нас цікавлять розміри цієї кімнати. Якою є довжина кімнати і якою – її ширина?

Записавши периметр, ми отримаємо рівняння:

$$2 \cdot (\text{ДОВЖИНА} + \text{ШИРИНА}) = 14.$$

А площу описує рівняння:

$$\text{ДОВЖИНА} \cdot \text{ШИРИНА} = 10.$$

Для того щоб знайти відповідні довжину й ширину, ми повинні тепер розв'язати обидва рівняння одночасно.

Узявши, скажімо, $\text{ДОВЖИНА} = 1$ і $\text{ШИРИНА} = 6$, ми побачимо, що, ці числа задовольняють перше рівняння, але не задовольняють другого. Водночас, пара чисел $\text{ДОВЖИНА} = 10$ і $\text{ШИРИНА} = 1$ задовольняє друге, але не перше рівняння.

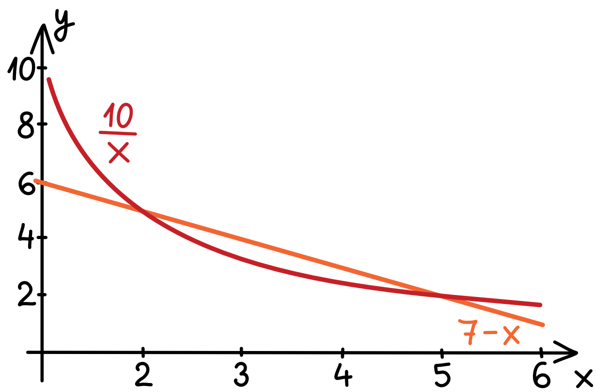
Одночасно розв'язками обох рівнянь є лише такі дві пари чисел:

- $\text{ДОВЖИНА} = 2$, $\text{ШИРИНА} = 5$;
- $\text{ШИРИНА} = 2$, $\text{ДОВЖИНА} = 5$.

Звичайно ж, саме рівняння не мало поняття, який з двох розмірів ми назвали «довжиною» кімнати, а який – її «шириною», і отже, ми фактично двічі отримали кімнату з тими самими розмірами.

Оскільки ми маємо дві різні змінні, ми, знову ж таки, можемо уявити цю систему рівнянь геометрично. Як і раніше, перше рівняння описує пряму $x + y = 7$, а друге рівняння описує лінію $x \cdot y = 10$, тобто лінію $y = \frac{10}{x}$.

Точки перетину цих двох ліній і дають нам розв'язки системи рівнянь:



Але про це ми поговоримо докладніше вже в розділі про рівняння та геометрію [с. 184].

ВИБІР МОБІЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рівняння описують не лише важливі математичні залежності, але також відображають найтісніші зв'язки між математикою та навколишнім світом.

Як ми вже згадували, рівняння допомагають точно й математично описувати умови та обставини. Якщо з розв'язуванням рівнянь чудово справляються також і комп'ютери, то їх складання, втім, усе ще залишається турботою людей.

Для того щоб скласти рівняння, вкрай необхідно добре осмислити ситуацію і вирішити, наскільки точно ми її маємо описати. Які явища, властивості та компоненти ми повинні брати до уваги? Як саме вони між собою пов'язані? Складання рівняння – це важливий та цікавий етап, на якому розпливчата життєва проблема стає точною математичною задачею.

Тому, ми запрошуємо читача пройти весь цей процес ще раз.

Скажімо, ви обираєте собі нового мобільного оператора із двох операторів, які пропонують такі пакети:

- Оператор A: місячна абонентська плата 5 євро плюс $0{,}01$ євро за кожну хвилину розмови.
- Оператор B: місячна абонентська плата 1 євро плюс $0{,}02$ євро за кожну хвилину розмови.

Інтуїція підказує, що якщо ми входимо в азарт і говоримо непомірно багато, то використання пакету оператора A повинно вийти дешевшим, оскільки ціна за хвилину розмови – удвічі нижча. Водночас, якщо ми говоримо дуже мало, то вигіднішим буде пакет оператора B.

Отож, цілком резонно і важливо запитати: принаймні скільки хвилин ви повинні говорити в місяць, щоб вибір оператора A мав сенс?

Одним зі способів відповісти на це запитання – скласти рівняння та знайти, у разі якої тривалості розмов платежі за тарифами обох операторів будуть однаковими. Тоді інтуїтивно зрозуміло, що, за умови більшої тривалості розмов, було б вигідніше вибрати оператора A, а за меншої – оператора B. Цю ідею «більше, ніж» ми могли б ще точніше записати за допомогою нерівностей [с. 190].

Складання рівняння

У цій ситуації важливу роль відіграють кількість витрачених на розмови хвилин, вартість однієї хвилини розмови та щомісячна абонентська плата. Два останні параметри – конкретні числа, кількість хвилин ми ще тільки шукаємо – вона є невідомою змінною, і її значення ми можемо позначити через k.

Щоб отримати загальний платіж, нам потрібно до абонентської плати додати добуток кількості хвилин, витрачених на розмови, та вартості однієї хвилини. Тоді за місяць ми б заплатили:

- оператору A: $5 + 0{,}01\,k$ євро,
- оператору B: $1 + 0{,}02\,k$ євро.

Умову, що загальний місячний платіж повинен бути однаковим для обох операторів, ми можемо записати так:

$$5 + 0{,}01\,k = 1 + 0{,}02\,k.$$

Розв'язання рівняння

Тепер ми можемо забути про весь контекст і розв'язати рівняння

$$5 + 0{,}01\,k = 1 + 0{,}02\,k$$

відносно змінної k, застосовуючи уже вивчені у класі перетворення:

$$\begin{aligned} 5 + 0{,}01k &= 1 + 0{,}02k \;\Big|\, -0{,}01k, \\ 5 - 1 &= 0{,}02k - 0{,}01k, \\ 4 &= 0{,}01k, \\ k &= 400. \end{aligned}$$

Насправді, тут ми вже вторглися в наступний розділ, на територію перетворень та розв'язування рівнянь, про що ми далі поговоримо набагато розлогіше та ґрунтовніше.

До цього залишається лише інтерпретувати отриманий розв'язок.

Інтерпретація розв'язку

Виявляється, що щомісячні платежі будуть однаковими, якщо ми проговоримо рівно 400 хвилин. Тож виходить більше 10 хвилин на день, що все ж здається забагато. Тож, очевидно, варто все-таки обрати оператора B.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ

Здебільшого складання рівняння – це лише перший крок. Далі слідує розв'язування рівняння: це означає, що ми хочемо знайти всі числа, які задовольняють усім умовам, передбаченим рівнянням.

Розв'язуючи рівняння, можна забути про одиниці вимірювання всіх членів рівняння та контекст – у розв'язуванні рівняння не має значення, звідки воно взялося, має значення лише математика.

У інтерпретації розв'язків рівняння, звісно ж, контекст і одиниці слід додати знову. Тоді ми заново пов'язуємо життя з математикою, і це потребує багато уваги, оскільки саме на цьому етапі часто виникають помилки.

Однак, зараз ми переходимо до розв'язування. Ми спочатку обговоримо перетворення рівнянь з математичного погляду, а після цього пройдемо весь процес на прикладі ще однієї конкретної історії.

ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ РІВНЯННЯ ВЗАГАЛІ

Щойно рівняння записане, наша мета – його розв'язати. Часто це робиться за допомогою перетворення рівняння. Перетворення рівняння означає запис його в іншій, проте рівносильній формі. В ідеалі, ми дійдемо до рівняння, записаного в такій формі, що розв'язок легко вбачається.

Звісно ж, не всі перетворення, які спадають на думку, зберігають рівносильність рівнянь: наприклад, якщо ми помножимо обидві частини рівняння на нуль, то отримаємо нуль по обидва боки від знака рівності. Однак, нуль дорівнює нулю, незалежно від того, яке значення ми надамо вихідній змінній.

Найпростіший спосіб показати рівносильність різних форм рівняння – це переконатися, що ми можемо повернутися від нової форми рівняння до вихідної форми за допомогою якого-небудь іншого кроку.

Наприклад, ми завжди можемо додавати до обох частин рівняння число, оскільки додавання протилежного числа до обох частин нового рівняння знову перетворить його в початковий вигляд. Скажімо, рівняння

$$4 \cdot x + 2 = 10$$

і

$$4 \cdot x = 8$$

рівносильні.

Віднявши число два від обох частин першого рівняння – отримаємо друге, додавши число два до обох частин другого рівняння – отримаємо перше.

Так само ми можемо помножити обидві частини рівняння на відмінне від нуля число, оскільки ділення на те ж саме число (звідси й відмінність від нуля!) знову поверне рівняння до його початкового вигляду. Так, рівносильними є також рівняння

$$4 \cdot x = 8$$

і

$$x = 2.$$

Друге рівняння отримаємо з першого, поділивши обидві його частини на чотири, а перше з другого – якщо обидві його частини на чотири помножимо.

Проробивши ці два перетворення підряд, ми бачимо, що рівняння $4 \cdot x + 2 = 10$ є рівносильним рівнянню $x = 2$. Іншими словами, розв'язком цього першого рівняння є число 2.

Про всяк випадок, поглянемо на ще інший приклад – на рівняння $4\,x + 1 = 17$ без будь-якого контексту та прихованого змісту. Перетворення , яке використаємо для його розв'язання, ми можемо компактно записати так:

$$4x + 1 = 17 \;\Big|\, -1$$

Тут, після вертикальної лінії, ми просто вказали, що саме зробимо для того, щоб перейти від одного рядка до наступного: віднімемо від обох частин рівняння 1. Це перетворення є рівносильним.

Часто кроки, що зберігають рівносильність у перетворенні рівняння, мають також хороше інтуїтивне пояснення:

- наприклад, ми можемо додавати числа до обох частин рівняння. Інтуїтивно зрозуміло: якщо сьогодні ми з другом є ровесниками, то й через два роки ми точно так само будемо ровесниками;
- так само, можемо обидві частини рівняння помножити на довільне, відмінне від нуля число – якщо зараз ми важимо однаково, то так само буде й тоді, коли маса кожного із нас збільшиться втричі (утім, сподіваємося, що цього не трапиться).

Однак, не всі перетворення рівносильність зберігають.

ПЕРЕТВОРЕННЯ РІВНЯННЯ БЕЗ ЗБЕРЕЖЕННЯ РІВНОСИЛЬНОСТІ

Рівняння, звісно ж, можна також перетворити так, що нове рівняння буде не зовсім рівносильним вихідному рівнянню. У такому разі можуть з'являтися нові розв'язки або, навпаки, загубитися деякі розв'язки – у деяких перетвореннях, ми просто змінюємо початкову умову рівняння на більш слабку, а іноді, додаємо, натомість, неправильну інформацію.

Наприклад, якщо помножити обидві частини рівняння на 0, ми відразу ж утратимо всю інформацію, дану умовою, адже після цього обидві частини рівняння дорівнюватимуть 0, і ця рівність буде правильною для кожного значення змінної.

Аналогічно, при піднесенні обох частин рівняння до квадрату може з'явитися більше розв'язків: рівняння $x = 3$ має рівно один розв'язок, але рівняння $x^2 = 9$ має вже два розв'язки, оскільки його задовольняє також і $x = -3$.

Однак загалом, про це не варто дуже турбуватися – перетворюйте рівняння із задоволенням до тих пір, поки не зможете з нього щось вичитати. Пізніше варто просто перевірити, чи задовольняють отримані розв'язки початковим умовам, чи вони з'явилися внаслідок втрати інформації, що супроводжувала перетворення. Все ж варто бути обережним і сумлінним.

Доведення того, що 0 = 1, або чому під час перетворення рівняння слід бути обережним.

Запишемо досить просте рівняння $x = 0$ і, щоб додати трохи цікавості, почнемо його перетворювати.

$x = 0 \;\Big|\cdot (x-1)$ – помножимо обидві частини рівняння

$x \cdot (x - 1) = 0$ – розкриємо дужки

$x^2 - x = 0$ – додамо до обох частин член x

$x^2 = x$ – поділимо на x

$x = 1$ – отримаємо нову відповідь

Але, якщо тепер ми розглянемо початкове рівняння $x = 0$ та отримане рівняння $x = 1$ разом, то вийде, що одне і те саме число дорівнює як нулю, так і одиниці, і доведеться зробити висновок, що $1 = 0$!

Але як-не-як, ми знаємо, що це нісенітниця, і початкове рівняння $x = 0$ не є рівносильним отриманому рівнянню $x = 1$.

Отже, у процесі ми, мабуть, використали якесь перетворення, що викривило початкову умову. І справді, поглянувши на перехід від кроку 4 до кроку 5, ми бачимо, що поділили обидві частини рівняння на x. Проте, x дорівнює нулю, а ділення на нуль завжди тягне за собою лише казна-що!

МАЛЕНЬКА ОПОВІДКА ПРО РІВНЯННЯ

Тепер на мить досить чистої математики, ходімо на побачення наосліп і поглянемо, чи все стало ясно.

Разом зі своєю компаньйонкою, яка нам досить до вподоби, ми вже п'ємо каву, їмо торт, посміхаємося і знайомимося. Безсоромно запитуємо нашу супутницю про її вік. Однак що відбувається? Супутниця проти ночі починає дражнитися й хитрувати!

Насміхаючись, вона мовить, що, якщо взяти дві третини її віку і відняти від цього два, то отримаєте той самий результат, що й коли візьмете половину її віку і додасте до неї одиницю. Який жах, супутниця хоче знати, чи вміємо ми складати рівняння та розв'язувати їх!

Виклик прийнято! З кишені витягаємо серветку, й одкровення супутниці акуратно записуємо блакитним чорнилом. Іншими словами, складаємо рівняння на основі життєвої історії.

СКЛАДАННЯ РІВНЯННЯ

Єдиним невідомим є вік супутниці, який ми спочатку й опишемо-таки змінною ВІК. Слідкуючи за її словами, ми можемо записати:

$$\frac{2}{3}\cdot \text{ВІК} - 2 = \frac{1}{2}\cdot \text{ВІК} + 1\,.$$

На цей момент у нас записані всі умови, і наше подальше завдання – розв'язати рівняння.

РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ

Для того щоб визначити вік супутниці, ми можемо перетворити своє рівняння, наприклад, так:

$$\frac{2}{3}\cdot \text{ВІК} - 2 = \frac{1}{2}\cdot \text{ВІК} + 1 \;\Big|\cdot 6\,,$$

(кому б сподобалися ті дроби, позбуваймося їх!)

$$4\cdot \text{ВІК} - 12 = 3\cdot \text{ВІК} + 6,$$

(щоб знайти вік, віднімемо від обох частин $3\cdot \text{ВІК}$ – зібравши кратні йому величини в одній частині)

$$4\cdot \text{ВІК} - 3\cdot \text{ВІК} = 12 + 6,$$

(додамо, віднімемо)

$$\text{ВІК} = 18.$$

Ура, математична частина позаду!

І тут, мабуть, нічого важливого вже й не залишається. Інтерпретація розв'язку рівняння не є особливо складною – ми навіть назву змінної залишили такою, щоб вона вишукувано відображала сенс реального життя.

ДОКЛАДНІШЕ ПРО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Тут, у цьому підрозділі, ми розглянемо два запитання: що, все-таки, ми маємо на увазі під розв’язуванням рівняння, і навіщо це взагалі вивчати?

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ НА РІЗНИХ ЧИСЛОВИХ МНОЖИНАХ

До цього, ми говорили, що розв’язати рівняння означає знайти числа, які задовольняють певні умови. З математичного погляду цей опис не є достатньо точним із кількох причин.

Наприклад, ми не згадали, які саме числа ми маємо на увазі. Все-таки у розділі про числові множини [с. 78] ми бачили, що існує кілька різних множин чисел. Отож, коли ми говоримо про знаходження чисел, думаємо ми про натуральні числа, цілі числа, дійсні числа чи комплексні числа?

Коли ми описуємо за допомогою рівняння якусь життєву ситуацію, ця сама ситуація і визначає умови, яким задовольняють розв’язки.

Наприклад, якщо шукана нами змінна – це кількість людей, було б чудово, якби ми мали справу з натуральним числом. Ми також були б здивовані, якби вік партнера виявився меншим від нуля. Водночас, якщо ми шукаємо швидкість, із якою друг веде машину, то вона може бути яким завгодно додатним дійсним числом.

Якщо ми розв’язуємо рівняння для власного задоволення, то можемо самі повністю вирішувати, якими числами ми себе обмежимо. Наприклад, у випадку лінійного рівняння з двома змінними, буде розсудливо обмежитися дійсними числами – так отримаємо гарну відповідність із прямими на площині [с. 184].

У випадку квадратного рівняння ми також обмежимося дійсними числами [с. 87], якщо хочемо намалювати красивий графік, і водночас беремо до уваги комплексні числа [с. 89], якщо бажаємо знайти розв'язок будь-якого можливого квадратного рівняння.

Загалом буває так, що чим більше чисел ми собі дозволимо, тим більше розв'язків зможемо також знайти. Наприклад, розв'язки рівняння $x^2 = 2$ відсутні серед раціональних чисел, проте вони існують уже на множині ірраціональних чисел. Рівняння $\mathrm{x}4 = -1$ не має розв'язків серед дійсних чисел, але якщо пошукати серед комплексних чисел, то їх буде рівно чотири.

Складність розв'язування того самого рівняння на різних числових множинах може дуже відрізнятися. Наприклад, розв'язати рівняння з трьома змінними $X^{10} + Y^{10} = Z^{10}$ на множині комплексних чисел не завдасть великого клопоту – а саме, для будь-яких комплексних чисел X та Y ми можемо серед комплексних чисел знайти рівно 10 значень змінної Z.

Однак, із цілими числами це саме рівняння спромоглися розв'язати лише після трьохсот років зусиль – серед додатних цілих чисел жодного розв'язку цього рівняння не існує!

Теорему, яка стверджує, що якщо n – ціле число більше двох, то жодне рівняння виду

$$X^n + Y^n = Z^n$$

не має розв'язків серед додатних цілих чисел, називають Великою теоремою Ферма.

Теоремі дали ім'я на честь французького математика 17 століття П'єра Ферма. За фахом він був юристом, але у вільний час найохочіше займався саме математикою. Він скрупульозно розмірковував над питанням про те, коли все-таки вищенаведене рівняння має розв'язки, і на полях однієї зі сторінок стверджував також, що має просте доведення, що у випадку, коли n є цілим числом, більшим, ніж два, серед цілих додатних чисел розв'язків не існує. Однак, це доведення ніхто серед його паперів так і не знайшов, а також ніхто так і не спромігся придумати просте доведення цього твердження.

На сьогодні Велику теорема Ферма таки довели, проте доведення розміщується на більш ніж пару сотень сторінок, і з погляду математики, воно все ж ще є надто складним.

НАВІЩО РОЗВ'ЯЗУВАТИ РІВНЯННЯ?

Навіть якщо комп'ютери не вміють вкладати життя у рівняння, вони, безумовно, вправні у їх розв'язуванні. Слід просто дати їм рівняння та деякі поради щодо розв'язування і чекати відповіді.

Наприклад, використовуючи матричне подання [с. 152], комп'ютерам можна надати чіткий алгоритм, за допомогою якого вони зможуть точно і швидко розв'язати будь-яку систему лінійних рівнянь. Система лінійних рівнянь із сотнями змінних займе в комп'ютера лише хвильку часу.

Може виникнути питання: навіщо тоді взагалі вчитися нам розв'язувати їх самостійно?

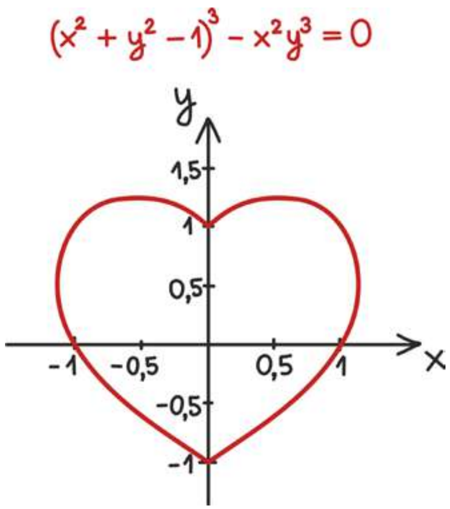
По-перше, оскільки нас цікавить не лише саме рівняння, але й життєвий контекст, який його стосується, то розв'язання рівняння може також розширити наші уявлення щодо цього ж самого контексту. Отже, іноді ми можемо наочно інтерпретувати етапи розв'язування й отримати від цього користь.

По-друге, розв'язування рівнянь дає нам навички математичної діяльності, які стануть в нагоді іншим разом, коли ми досліджуватимемо життєві ситуації за допомогою математики.

І нарешті, для розв'язання багатьох рівнянь вищих порядків не існує (поки що) точних алгоритмів, які можна запропонувати комп'ютеру, – їх розв'язання і справді потребує винахідливості. Скажімо, відомо, що рівняння $x^3 - 2y^3 = 58$ має розв'язки, але знайти їх усіх комп'ютер не може. І всі теперішні алгоритми, які використовують комп'ютери, є результатом мисленнєвої роботи попередніх математиків – можливо, і якийсь читач захоче одного дня посприяти цій справі.

РІВНЯННЯ ТА ГЕОМЕТРІЯ

Деякі рівняння з безліччю змінних спочатку може здатися жахливим. Але дивитися на красиво намальовану криву, що виражає те саме рівняння, завжди приємно.



На щастя, у 16 столітті французький математик і філософ Рене Декарт осягнув, як пов'язувати між собою рівняння та геометрію.

Найпростіший є зв'язок між лінійними рівняннями з двома змінними та прямими, а також між лінійними рівняннями із трьома змінними й площинами. Про ці зв'язки ми також повідаємо в цьому розділі.

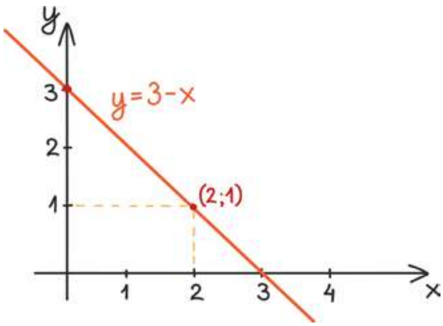
ВІД РІВНЯНЬ ДО ГЕОМЕТРІЇ

Рівняння $x + 2 = 3$ накладає на змінну дуже сильну умову, і можливим є лише один розв'язок: x повинен дорівнювати одиниці. З геометричного погляду ми можемо думати про розв'язання цього рівняння як про пошук такої точки на числовій осі, що лежить зліва від числа 3 на відстані, що дорівнює двом одиницям.

Один зі способів змінити умови на слабші та отримати більше розв’язків рівняння – ввести в гру більше змінних. Наприклад, у рівняння $x + y = 3$ чимала кількість розв’язків: для кожного значення змінної x існує також і відповідне значення змінної y. Якщо y дорівнює 2, то x повинен дорівнювати одиниці. Якщо y дорівнює 3, то x має дорівнювати нулю, і так далі.

Всі розв’язки рівняння $x + y = 3$ подаються парами чисел: одне з них є можливим значенням змінної y, а інше – відповідним значенням змінної x. Проте, кожна така пара чисел позначає рівно одну точку на числовій площині: значення змінної x задає абсцису точки, а значення змінної y – ординату точки.

Коли ми почнемо малювати всі ці точки, то побачимо, що вони вирішили гарно вишикуватися в ряд на прямій.



Виявляється, що кожне лінійне рівняння з двома змінними (степінь обох змінних дорівнює одиниці) описує на площині рівно одну пряму, а також, навпаки: будь-яку пряму на площині можна описати за допомогою лінійного рівняння з двома змінними.

Ми можемо легко накреслити на площині різні прямі, а всі можливі лінійні рівняння із двома змінними мають такий вигляд:

$$ax + by = c.$$

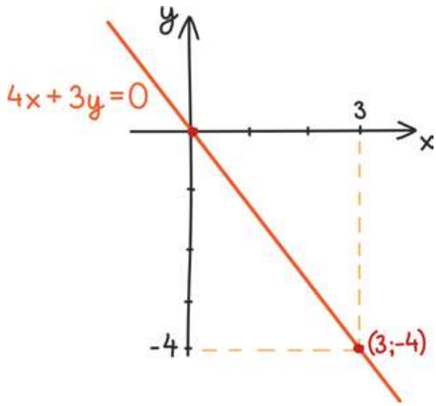
У цьому рівнянні коефіцієнти a і b та вільний член c є дійсними числами.

Цей зв’язок між прямими і лінійними рівняннями – досить класний! З одного боку, у нас є щось геометричне: лінія, яку ми можемо намалювати на папері олівцем чи ручкою, а, з іншого боку – рівняння, що виглядає сухим, і, тим не менш, обидва описують один і той же математичний об’єкт!

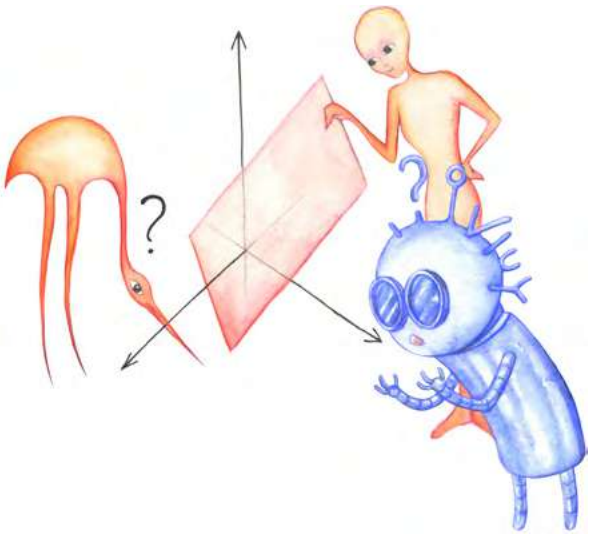
Також із більш практичного погляду цей зв’язок є дуже корисним, оскільки дає змогу описати умови та зв’язки як мовою геометрії, так і мовою рівнянь. Отож, якщо пряма має певну властивість, то відповідна властивість має бути описана також і мовою рівнянь, і навпаки.

Припустимо, наприклад, що наша геометрична властивість полягає в тому, що пряма проходить через початок координат. Якою буде ця властивість мовою рівнянь?

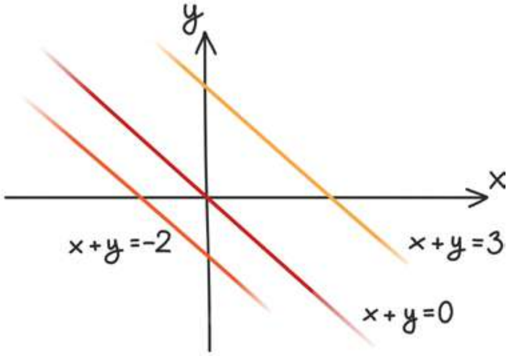
Якщо пряма проходить через початок координат, то пара чисел $(0;0)$ задовольняє рівняння. Підставивши $x = 0$ та $y = 0$ у рівняння прямої в загальному вигляді, ми отримаємо, що $0 = c$. Отже, коли пряма проходить через початок координат, то у відповідного рівняння відсутній вільний член, тобто його можна записати у вигляді $ax + by = 0$. Наприклад, пряма, зображена на малюнку, має рівняння $4x + 3y = 0$.



Водночас, зважаючи на мову рівнянь, ми могли б запитати: які прямі відповідають лінійним рівнянням $x + y = c$, де c – довільне число?



Будуючи прямі, можна переконатися, що всі вони – добряче паралельні.



Як будь-яке лінійне рівняння з двома змінними точно відповідає певній прямій на площині, так само й кожне лінійне рівняння із трьома змінними має прекрасну відповідність із певною площиною у тривимірному просторі.

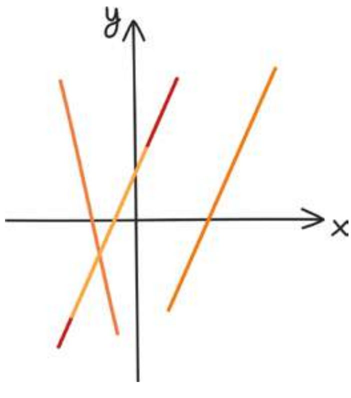
Тут ми також можемо описати геометричні властивості мовою рівнянь, і навпаки. Наприклад, рівняння виду $ax + by + cz = 0$ описують всі площини, що проходять через початок системи координат. Намалювати все це, звісно ж, буде набагато складніше.

ПЕРЕТИН ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ ТА ВІДПОВІДНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ

Як ми бачили, кожна пряма на площині відповідає лінійному рівнянню виду $ax + by = c$. Отже, опис властивостей прямих – еквівалентний опису лінійних рівнянь.

Ситуація стає ще цікавішою, коли на площині розмістити декілька з них. Якщо в нас є дві прямі, то з геометричного погляду існує кілька можливостей їх взаємного розташування. Дві прямі на площині можуть:

- перетинатися в одній точці,
- бути паралельними,
- або збігатися.



Проте ми можемо одночасно описати кожну пряму лінійним рівнянням із двома змінними. Що буде описувати зв'язок між цими рівняннями?

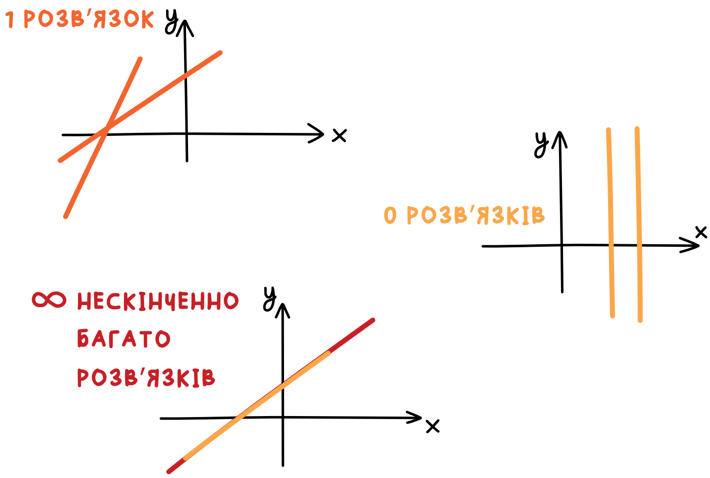
Для цього, звісно ж, існує система рівнянь, що складається з цих двох рівнянь!

І справді, адже система рівнянь шукає всі точки, координати яких задовольняють обидва рівняння прямих водночас, або, іншими словами, всі точки, які одночасно лежать як на одній, так і на другій прямій.

Кількість цих точок:

- рівно одна, якщо прямі перетинаються,
- нуль, якщо прямі – паралельні,
- нескінченно багато, якщо обидві прямі насправді є однією і тою самою прямою.

Отже, розв'язуючи систему рівнянь, ми можемо точно дізнатися, як розташовані прямі, описані цими рівняннями, відносно одна одної.



ЗАСТОСУВАННЯ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН

Рівняння прямих та площин, їх побудова та ігри з ними належать до числа улюблених хобі небагато кого. Утім, із ними варто ладнати, наприклад, вже тому, що вони відіграють у комп'ютерній графіці роль, яка цілком варта уваги.

Наприклад, рівняння прямих та площин можуть траплятися у створенні комп'ютерних ігор.

Уявімо, що в комп'ютерній грі є тривимірна кімната. В одній зі стін є вікно, звідки сяє прекрасне денне світло. Сонячний промінь красиво простягається по прямій і, звісно ж, падає на підлогу, яку ми можемо уявляти частиною площини. Отож, поширення світлового променя описує рівняння прямої, а підлогу – рівняння площини.

Однак, у реальному житті, світло не залишається просто на підлозі, а відбивається від неї. Тому для кожного такого променя світла або прямої потрібно розрахувати напрямок відбитого променя, а отже – знову ж таки, матимемо ще одну пряму. Звичайно, світловий промінь не обмежується лише одним відбиванням, а поширюється і відбивається знову й знову від стін, стелі, меблів. Отже, доводиться неодноразово складати рівняння прямих і площин.

На щастя, ми не повинні робити це самі – потрібно просто навчити комп'ютер, як виконувати обчислення, і надалі він робитиме всі ці математичні дії з шаленою швидкістю та точністю.

Утім, не потрібно відбивати промінь світла геть безкінечно. Після сотні відбиттів у кімнаті вже будуть красиві стіни різних відтінків, тіні з м'якими контурами й все те інше, що викликає у нас відчуття затишку. Ми роз'яснили комп'ютеру реальне життя, і наша гра набула реалістичного вигляду.

НЕРІВНІСТЬ

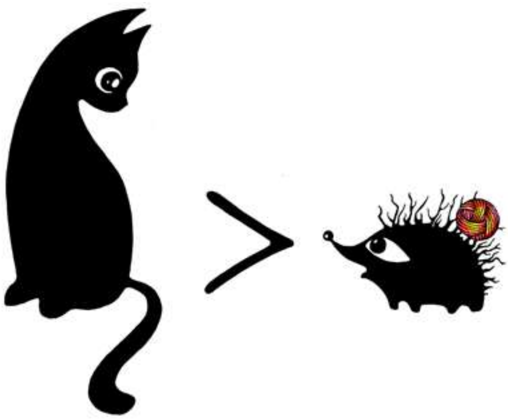
Як ми бачили, рівняння [с. 168] дає змогу досить точно та кількісно записувати умови та зв'язки. Однак іноді умови не є настільки детально задані, щоб їх можна було описати рівнянням, а іноді нас і не цікавить, якими є точні значення величин. Нас цікавить лише відношення між цими величинами – яка з них є більшою, а яка – меншою.

Наприклад, у виборі між двома гаманцями, любителя грошей не цікавить, скільки точно в тому чи іншому гаманці грошей, а цікавить, скоріше, у якому з гаманців грошей більше. Так само, наприклад, у виборі між двома маршрутами, нас цікавить не довжина кожного з них, а лише те, який з них є коротшим.

Приклади, наведені в розділі про рівняння, також більш природно описувати мовою нерівностей. Запитаймо й справді, про найбільшу кількість людей, які можуть поміститися на сцені з таким чи інакшим розміром. Так ми отримали б замість наведеного раніше рівняння нерівність.

$$\text{КІЛЬКІСТЬ СПІВАКІВ} \leq 3 \cdot \text{ПЛОЩА СЦЕНИ}$$

Знак $\leq$ ставиться між двома величинами, якщо ліва є меншою від правої або дорівнює їй. Сам по собі, знак $<$ означає, що ліва величина є строго меншою за праву, тобто рівність у цьому випадку не допускається. Наприклад, $\pi < 3{,}5$ означає, що число π є меншим від числа $3{,}5$. Звичайно, обидва символи можна використовувати й навиворіт, наприклад $3{,}5 > \pi$.



СКЛАДАННЯ НЕРІВНОСТІ

Як і у випадку рівняння, ми часто складаємо нерівності для того, щоб описати якусь життєву ситуацію або розв'язати якесь життєве питання. Складання нерівностей та рівнянь дуже подібні: ми співставляємо змінні із величинами реального життя і визначаємо відношення між ними.

Пригадаймо, скажімо, приклад мобільних операторів. У нас було двоє операторів із такими пакетами:

- оператор A: 5 євро щомісячна абонентська плата плюс $0{,}01$ євро за кожну хвилину розмови.
- оператор B: 1 євро щомісячна абонентська плата плюс $0{,}02$ євро за кожну хвилину розмови.

У розділі про рівняння ми запитували, за якої тривалості телефонних розмов місячні платежі за тарифами обох операторів будуть однаковими. Однак, оскільки очевидно, що оператор A стає вигіднішим, коли ми багато говоримо, то було б більш природним запитання: скільки нам слід говорити по телефону, щоб оператор A став більш вигідним?

Оскільки в обох випадках, місячний платіж безпосередньо залежить від кількості хвилин, витрачених на розмови, то його обов'язково потрібно залучити, а позначити його можемо, наприклад, змінною k. Отож, ми можемо розписати місячний платіж так:

- для оператора A: $5 + 0{,}01\,k$ євро,
- для оператора B: $1 + 0{,}02\,k$ євро.

Тоді наше запитання про те, коли місячний платіж у виборі оператора A буде меншим, точно виражає нерівність:

$$5 + 0{,}01\,k < 1 + 0{,}02\,k.$$

Як і у випадку рівнянь, контекст у самій нерівності тепер втрачений: ми просто запитуємо, за якого значення k, ліва частина буде меншою за праву. Пізніше ми зможемо знову перекласти відповідь на мову реального життя і таки відповісти, за якої загальної місячної тривалості телефонних розмов, пакет оператора A буде вигіднішим.

Тепер поговоримо про розв'язування нерівностей докладніше.

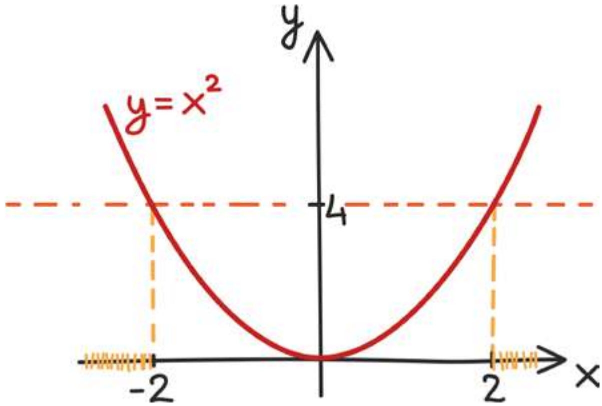
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Розв'язування нерівності означає точно те саме, що й розв'язування рівняння – необхідно знайти значення змінної, які задовольняють задані умови [с. 176].

Наприклад, коли ми хотіли знайти числа, квадрат яких дорівнює 4, то отримували рівняння: $x^2 = 4$. Так само ми можемо шукати числа, квадрат яких є більшим ніж 4. Цю умову описує нерівність: $x^2 > 4$.

Розв'язуючи нерівності, часто корисно міркувати геометрично – намагаємось розв'язання нерівності звести до вивчення графіка певної функції.

На прикладі вищезазначеної нерівності ми бачимо, що всі шукані нами числа повинні бути або більшими ніж два або меншими ніж мінус два, оскільки за інших значень змінної, графік квадратичної функції $y = x^2$ знаходиться нижче прямої $y = 4$.



Ця ж стратегія діє і у випадку більш складних нерівностей. Наприклад, припустимо, що нас запитують, для яких дійсних чисел x

$$x^3 + 2x^2 > x + 2.$$

Використовуючи властивості нерівності, ми можемо перетворити цю нерівність на таку:

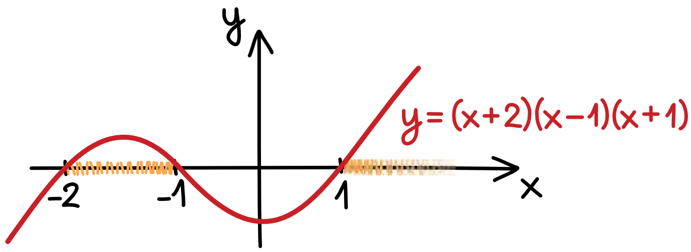
$$x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0.$$

У такому вигляді нерівність рівносильна пошуку відповіді на питання: за яких значень змінної графік кубічної функції знаходиться над віссю x?

Графік кубічної функції загалом робить максимум два повороти, але про це ми поговоримо детальніше в частині 6 [с. 266].

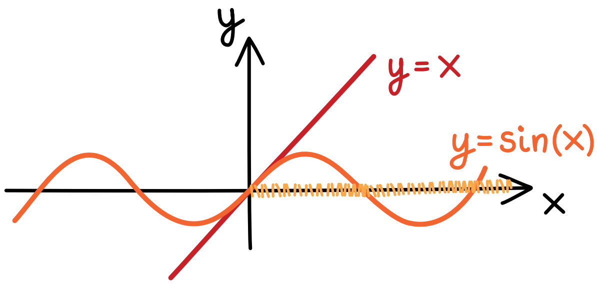
Ми зможемо приблизно накреслити графік кубічної функції щойно дізнаємося її нулі [с. 269]. Отже, розкладаємо ліву частину на прості множники й отримуємо рівносильну нерівність $(x + 2)(x - 1)(x + 1) > 0$. Тепер ми можемо прочитати відповідь, накресливши приблизний графік кубічної функції $y = (x + 2)(x - 1)(x + 1)$.

Нам підходять усі числа, що належать проміжку $(-2, -1)$, а також усі числа, більші ніж одиниця.



Фактично, графічний метод базується на порівнянні графіків функцій. Для розв'язання нашої нерівності ми також могли просто порівняти графіки функцій $x^3 + 2x^2$ та $x + 2$, але було простіше перетворити нерівність так, щоб одна функція була кубічним многочленом, а друга – нульовою функцією, графіком якої є тоді сама вісь x.

Але іноді нам дійсно доводиться будувати графіки двох різних функції. Наприклад, ми бачимо на графіку, що нерівність $x \geq \sin(x)$ виконується для кожного невід'ємного значення x.



Строге доведення цього факту використовує похідну [с. 320] і ґрунтується саме на інтуїції, що спирається на графік: у нульовій точці значення обох функцій рівні, а далі функція $y = x$ зростає швидше, ніж функція $y = \sin(x)$.

Оскільки випадок рівності в якомусь сенсі є граничним випадком нерівності, то часто ми можемо звести розв'язування нерівностей до розв'язування рівнянь. У певному сенсі ми робили це також і протягом усіх попередніх міркувань: ми знаходили (геометрично) точки перетину графіків, і вирішували, з якої сторони лежать розв'язки нерівності. Однак, самі точки перетину визначали розв'язки рівнянь і обмежували множину розв'язків нерівності. Саме завдяки цьому зв'язку ми насправді змогли знайти відповідь на питання про мобільних операторів лише в межах рівнянь.

ПЕРЕТВОРЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

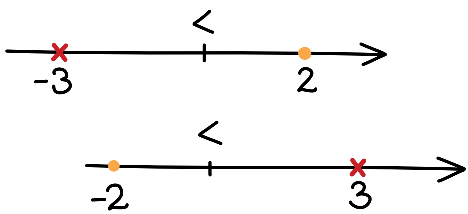
З нерівностями можна робити майже все те, що й з рівняннями. Рівносильні нерівності ми отримаємо, якщо наприклад:

1. додамо до обох частин нерівності те саме число. Це інтуїтивно зрозуміло: якщо у вас є більше книг, ніж у вашого брата, то у вас їх буде більше також після того, як тітка-цінителька літератури подарує вам обом по новій книжці;
2. помножимо обидві частини нерівності на одне і те саме додатне число. Це також природно: велика піца є більшою ніж звичайна піца, і половина або четвертина великої піци теж буде більшою, ніж, відповідно, половина або четвертина звичайної піци.

У цьому місці важливо зазначити, що обидві частини нерівності можна множити лише на додатне число, а не на від'ємне. У випадку від'ємного числа, знак нерівності слід змінити на протилежний. Чому це так?

Почнемо з одного прикладу, нерівності $-3 < 2$. Якщо обидві частини нерівності помножити на -1, отримаємо, відповідно, числа 3 і -2. Однак, 3 вже не є меншим від -2. Щоб уникнути такої ситуації, ми перекручуємо знак навиворіт і отримуємо, що $3 > -2$.

Адже множення обох частин нерівності на мінус одиницю насправді означає віддзеркалення числової осі відносно її початку, і тому знак нерівності змінюється на протилежний – число, яке раніше розташовувалося найправіше на числовій осі і, отже, було найбільшим, після віддзеркалення розташується найлівіше, і, отже, буде найменшим.



Якщо ми множимо обидві частини нерівності на яке-небудь від'ємне число, відмінне від мінус одиниці, наприклад на число $-4{,}5$, то можемо це виконати у два етапи: 1) спочатку помножимо обидві частини нерівності на число -1, і, отже, поміняємо знак нерівності на протилежний; 2) потім помножимо обидві частини на число $4{,}5$.

Звичайно, над нерівностями можна також робити перетворення, які не обов'язково будуть рівносильними. Тут потрібно бути обережними саме тому, що кожного разу після множення на від'ємне число, знак може змінюватися. Наприклад, якщо ми піднесемо до квадрату обидві частини нерівності, то отримана нерівність буде рівносильною початковій лише у разі, якщо обидві частини нерівності є невід'ємними.

І справді, якщо $3 > 2$, то $3^2 > 2^2$. Однак, водночас $-3 < -2$, але $(-3)^2 > (-2)^2$.

НЕРІВНОСТІ Й ПЛАНУВАННЯ

У певному сенсі математичне планування займається пошуком найкращих рішень життєвих проблем. Водночас, нерівності відіграють у математичному плануванні важливу роль. Наведемо кілька прикладів.

1. Як автобусна компанія повинна організувати автобусні перевезення, щоб отримати якомога більший прибуток? З одного боку, автобусна компанія хоче витрачати якомога менше на водіїв, автобуси та пальне. З іншого боку, вона повинна забезпечувати якомога краще обслуговування, щоб пасажири не перейшли до конкурентів, або не почали пересідати на власні авто.
2. Яким буде найкращий розподіл місць у класі, щоб учні були якомога щасливішими? До уваги слід узяти побажання учнів як щодо місця, так і щодо сусіда по парті.
3. Що повинен їсти бідний студент, щоб витрати на їжу були якомога меншими, проте щоденних норм споживання поживних речовин було дотримано?

Далі ми детальніше розглянемо останню проблему на досить спрощеному прикладі, де до споживацького кошика студента можуть потрапити лише картопля та боби. Треба визнати, що насправді, мабуть, ніхто не захоче харчуватися лише картоплею та бобами, але більш реалістичні проблеми є занадто складними, щоб розв'язати їх на папері без допомоги комп'ютерів.

У будь-якому разі, почнемо з того, що нам відомо.

- Кілограм картоплі коштує $0{,}7$ євро, містить 20 г білків і 170 г вуглеводів.
- Кілограм бобів у томатному соусі коштує $1{,}4$ євро, містить 60 г білків та 120 г вуглеводів.
- Доросла людина потребує 50 г білків й 300 г вуглеводів на день.

Наше питання полягає в тому: яку суму грошей на харчування може витрачати бідний студент щоденно, споживаючи лише картоплю та боби, щоб добової норми білків та вуглеводів було дотримано?

Передусім, ми мусимо перекласти цю задачу на математичну мову, тобто побудувати математичну модель.

Спочатку знайдемо загальну вартість харчування. Для цього позначимо кількість картоплі в щоденному раціоні через x кілограмів, а кількість бобів – через y кілограмів. Тоді картопля буде коштувати $0{,}7x$ євро, боби – $1{,}4y$ євро, а те й інше разом – $0{,}7x + 1{,}4y$ євро. Ми хотіли б мінімізувати цю вартість, з огляду на те, що на величини x та y встановлені певні обмеження, які випливають із добових норм поживних речовин – ми мусимо з'їдати принаймні визначену кількість білків і вуглеводів.

Спробуймо тепер записати ці обмеження мовою нерівностей.

Картопля містить $20x$ грамів білка, а боби – $60y$ грамів. Оскільки доросла людина повинна з'їдати щонайменше 50 грамів білка на день, то ми отримуємо нерівність $20x + 60y \geq 50$.

Аналогічно ми отримаємо умову $170x + 120y \geq 300$ для вуглеводів.

На додачу, ні кількість картоплі, ні кількість бобів не може бути від'ємним числом. Через це у нас ще будуть нерівності $x \geq 0$ і $y \geq 0$.

Ми отримали таку математичну модель. Позначення «min» тут означає, що ми шукаємо найменше, тобто мінімальне значення виразу і, звісно ж, потрібно дотримуватися також усіх наведених нерівностей:

$$\min\ 0{,}7x + 1{,}4y$$

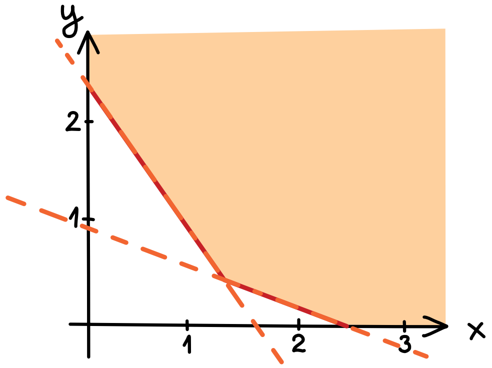
$$20x + 60y \geq 50$$

$$170x + 120y \geq 300$$

$$x \geq 0$$

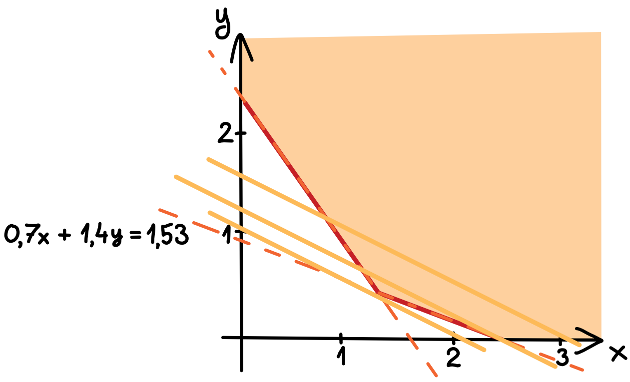
$$y \geq 0$$

Цю задачу найпростіше розв'язати графічно. Для цього ми зобразимо розв'язки усіх чотирьох нерівностей на координатній площині і відмітимо область, яка задовольняє усі нерівності.



Нарешті, знайдемо серед позначеної області точку, у якій значення виразу $0{,}7x + 1{,}4y$ буде найменшим. Як це зробити?

Нагадаємо, що всі прямі виду $0{,}7x + 1{,}4y = c$ є паралельними одна одній, і зменшуючи значення c, ми просто переміщаємо пряму униз. Мінімальне значення вираз $0{,}7x + 1{,}4y$, безумовно, набуває на одній із цих прямих, а розв'язком задачі буде пара $(x;\, y)$ саме тоді, коли вона так само залишиться у відміченій області розв'язків. Отже, наше завдання – знайти мінімальне значення c, за якого пряма $0{,}7x + 1{,}4y = c$, як і раніше, перетинатиме область розв'язків системи нерівностей.



Як бачимо на рисунку, це відбувається саме в точці перетину прямих $20x + 60y = 50$ і $170x + 120y = 300$, яку ми вже можемо легко знайти: $1{,}54$ кг картоплі та $0{,}32$ кг бобів коштують $1{,}53$ євро.

ДЕЯКІ РОЗПОВСЮДЖЕНІ НЕРІВНОСТІ

Подібно до того, як зі школи добре відомо, що вчитель завжди розумніший за учня, певні нерівності також виконуються для багатьох різних чисел чи елементів. Наприклад, деякі нерівності виконуються для абсолютно всіх дійсних додатних чисел або для всіх дійсних чисел, більших за одиницю, або для всіх можливих трикутників. Деякі з них ми перелічимо та обговоримо тут.

КВАДРАТ ДІЙСНОГО ЧИСЛА

Найвідоміша нерівність, мабуть, така: квадрат кожного дійсного числа є невід'ємним, тобто $a^2 \geq 0$. Знак рівності, звичайно, ставиться тільки у випадку, коли a дорівнює нулю. І все-таки, чому це так?

У випадку нуля, звісно, все зрозуміло, бо ж квадрат нуля, знову таки, є нулем.

У випадку додатних чисел, усе також не набагато складніше: a^2 дорівнює якраз площі квадрата зі стороною a, а площа квадрата мусить бути додатною.

Але ми можемо записати будь-яке від'ємне число у вигляді $-a = (-1) \cdot a$, де а є додатним.

У цьому випадку, ми можемо записати:

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot a = a^2,$$

і результат, знову-таки, буде додатним.

ЩО БІЛЬШЕ: ЧИСЛО ЧИ ЙОГО КВАДРАТ?

Можливо, спочатку це здається таким, що трохи суперечить інтуїції, але квадрат числа далеко не завжди є більшим за саме число. Квадрат від'ємного числа, звісно ж, завжди за нього більший, оскільки, як зазначалося вище, квадрат числа – завжди додатний.

Так само, якщо додатне дійсне число є більшим одиниці, то і його квадрат буде більшим ніж дане число. Але якщо додатне дійсне число – менше одиниці, тоді його квадрат – менший ніж дане число:

$a^2 > a$, якщо $a > 1$ або $a < 0$

$a^2 > a$, якщо $0 < a < 1$

$a^2 > a$, якщо $a = 0$ чи $a = 1$

Це також не дуже важко довести – адже ми знаємо, що можемо кожну нерівність помножити на додатне число:

- помноживши обидві частини нерівності $a < 1$ на a, отримаємо нерівність $a > 1$,
- помноживши обидві частини нерівності $a < 1$ на a, отримаємо нерівність $a^2 < a$.

СЕРЕДНЄ АРИФМЕТИЧНЕ ТА СЕРЕДНЄ ГЕОМЕТРИЧНЕ

Середнє арифметичне чисел використовують досить часто: наприклад, обчислюють середній бал, середній результат екзаменів або середній вік населення. Для цього усі досліджувані результати просто додаються разом, і суму ділять на число результатів:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Однак, шукати середнє значення можна по-іншому: усі результати можна перемножити між собою, а потім добути із добутку корінь такого степеня, скільки було результатів.

$$A = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Середнє геометричне використовують, скажімо, у визначенні пропорцій екранів телевізорів. Старий стандарт кінотеатрів визначався відношенням сторін зображення $2{,}39{:}1$ (ширина картинки була в $2{,}39$ рази більшою за висоту), а старі телевізори показували фільми у стандарті $4{:}3$. Для того щоб знайти компроміс між цими двома стандартами, використали середнє геометричне й у результаті отримали стандарт $16{:}9$. Використання середнього геометричного дало змогу досягти ситуації, коли обидві пропорції були «змінені» однаково.

Як середнє арифметичне, так і середнє геометричне пов'язані також із прогресіями з відповідними назвами [с. 128]. А саме, середній із трьох послідовних членів арифметичної прогресії є середнім арифметичним крайніх членів, і подібне твердження можна висловити щодо геометричної прогресії, використавши середнє геометричне замість середнього арифметичного.

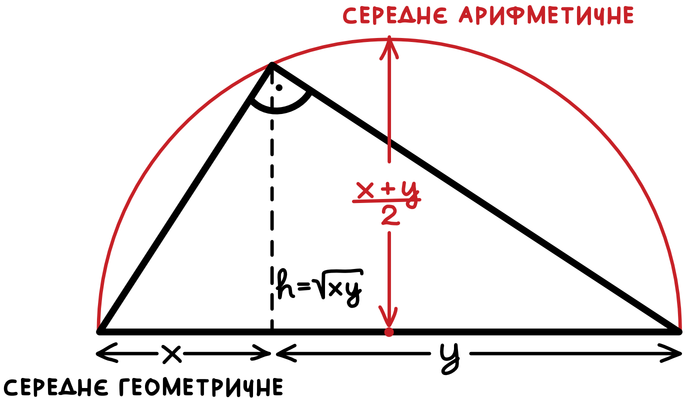
Одна відома нерівність стверджує, що середнє арифметичне двох невід'ємних дійсних чисел не менше середнього геометричного цих чисел, тобто

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Як це довести?

Погляньмо на число $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$. Оскільки ми маємо справу з квадратом числа, то він – невід'ємний. Розкривши дужки, ми отримаємо $a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$, тобто дійсно $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

Графічно середнє арифметичне та середнє геометричне, а також різницю між ними, можна уявляти так:

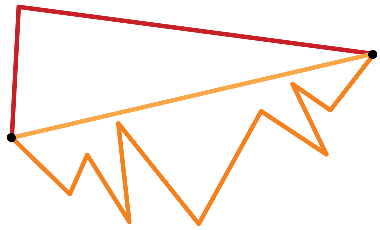


Доведення вимагало б трохи побавитися з трикутниками та тригонометрією. Зацікавлений читач може спробувати це зробити, наприклад, після знайомства з розділом про тригонометрію [с. 205].

Хоча ми довели тут лише те, що середнє арифметичне двох невід’ємних чисел є не меншим від їх середнього геометричного, насправді це твердження справедливе для якої завгодно кількості чисел. Середнє арифметичне будь-яких n невід'ємних чисел є не меншим, ніж середнє геометричне цих чисел. Утім, довести це вже трохи складніше.

НАЙКОРОТША ЛАМАНА

Закінчимо розділ однією дуже простою геометричною нерівністю. Вона стверджує, що відрізок, який сполучає дві точки, буде коротшим від ламаної з кінцями в цих точках.



Із цієї нерівності відразу випливає, наприклад, відома нерівність трикутника: сума довжин будь-яких двох сторін трикутника є більшою за довжину третьої сторони. Отже, це просте твердження виявилося цілком змістовним.

РІВНЯННЯ З МОДУЛЯМИ

Не завжди наша мета в цій книзі – навчити: навчити набагато краще вміють самі вчителі, – а радше дати ідеї, як міркувати про шкільну математику. Тому й тут, у цьому невеликому розділі ми намагатимемось лише пояснити, як інтерпретувати рівняння з модулями. Нагадаємо, що про модуль числа ми вже писали в розділі про числа [с. 120].

Припустимо, що ви зіткнулися з рівнянням:

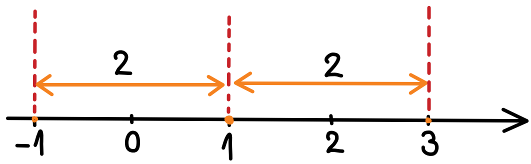
$$|x-2|+|x|=2+|x-1|.$$

Здається досить загрозливим? Безпідставно!

Є кілька способів переконати себе, що ми маємо справу з досить безпечною ситуацією.

По-перше, можна спробувати переформулювати рівняння за допомогою «відстаней».

Наприклад, припустимо, що в нас є більш просте рівняння $|x-1|=2$. Тоді ліва частина рівняння дорівнює відстані між точками з координатами x і 1, а розв’язати рівняння означає знайти на числовій осі всі точки x, що знаходяться на відстані дві одиниці від 1:



З рисунка легко зрозуміти, що придатними є рівно дві точки: $x=3$ або $x=-1$. Однак, якщо нам дано більш складне рівняння, таке як на початку сторінки, то розв’язати його, використовуючи рисунок, буде вже досить складно. Наприклад, рівняння

$$|x-2|+|x|=2+|x-1|$$

ми справді можемо переформулювати за допомогою відстаней:

- ліва частина рівняння дорівнює сумі відстаней числа x від чисел 2 і 0,
- права частина рівняння дорівнює сумі числа 2 та відстані числа x від числа 1.

Однак, розв’язування за допомогою малюнка, втім, ускладнюється. Отож, давайте ще трохи подумаємо, як можна міркувати про розв’язування простішого рівняння $|x-1|=2$.

На малюнку ми, не замислюючись, розглянули два різні випадки:

- точка x лежить справа від числа 1,
- точка x лежить зліва від числа 1.

Однак, аналітично це означає, що ми розглянули два випадки:

- вираз $x-1$ додатній,
- вираз $x-1$ від’ємний.

Використовуючи означення модуля, ці два випадки дають нам два різних рівняння:

- $x-1=2$,
- $-(x-1)=2$.

Очевидно, що розв’язком першого рівняння є число 3, а другого – число -1.

Точно така ж стратегія допомагає і у випадку більш складних рівнянь. Для кожного модуля, що зустрічається в рівнянні, нам потрібно розглянути два випадки – випадок, коли вираз під знаком модуля є додатним, і випадок, коли він – від’ємний.

Отже, розв’язування рівняння з модулем нічим не відрізняється від розв'язування звичайного рівняння – у випадку рівняння з модулем, потрібно просто розглянути декілька звичайних рівнянь.

ЧАСТИНА 5 –

ТРИГОНОМЕТРІЯ

*Жодне працевлаштування
не обійдеться без арифметики,
жодний механічний винахід –
без геометрії.*

Бенджамін Франклін

ПРОПОРЦІЇ ТА ТРИКУТНИКИ

У цьому розділі ми підходимо до тригонометрії з доісторичного погляду, розглядаючи її вужче, ніж вчення про зв'язки у трикутниках, і ширше, ніж вчення про відношення й пропорції.

Задля мотивування до тригонометрії часто справедливо наводять як приклад будівництва дому: проєктування хорошої будівлі потребує точного встановлення величини кутів і довжин відрізків.

Але у першій історії ми відійдемо трохи далі від Землі і побачимо, як тригонометрія може бути корисною у відкритому космосі.

ПИТАННЯ ПРО КОСМОС

Припустимо, що після школи, ви потрапили на роботу на космічну станцію. Яка радість, космічна станція!

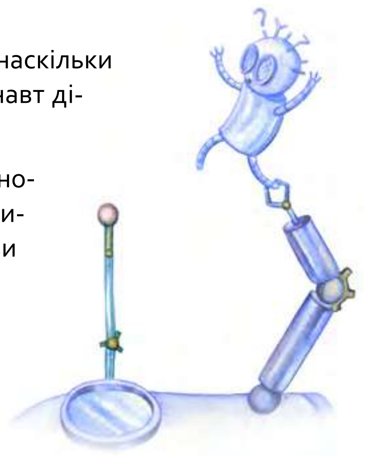
Однак космічна станція пошкоджена і потребує ремонту однієї антени. Отож, потрібно відправити назовні космонавта й доправити його в потрібне місце. Як переміщувати космонавта у відкритому космосі?

На сучасній космічній станції рух космонавтів відбувається за допомогою багатокомпонетної роботизованої руки, що складається з обертальних суглобів та прямих фрагментів – зовсім як людська рука.

Як керувати цією рукою-роботом? Як розрахувати, наскільки та як повертати різні суглоби для того, щоб космонавт дістався потрібного місця та відремонтував станцію?

Виявляється, що тут на допомогу приходять тригонометричні співвідношення між елементами трикутника. І справді, рішення для більш простого випадку ви знайдете наприкінці цього розділу.

Однак, почнемо подорож тригонометрією з невеликого вступу до геометрії трикутників.

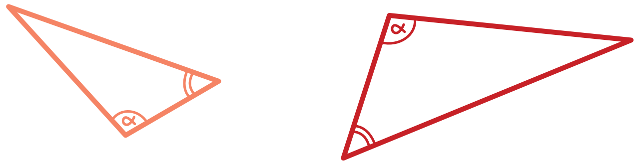


РІВНІ ТА ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

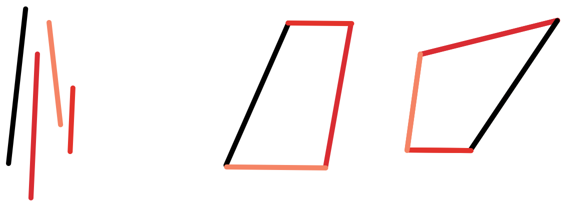
Як ми вже згадували в першій частині книги, два трикутники – рівні або, висловлюючись амбітніше, конгруентні, якщо їх можна накласти точно один на одного, до того ж водночас дозволяється також піднімати трикутник із площини і перевертати його догори дном.

Конгруентність двох трикутників гарантується, наприклад, рівністю всіх трьох відповідних сторін. Спочатку це звучить досить просто, але насправді потребує доведення.

Дійсно, скажімо, з того, що всі три відповідні кути рівні, ще не випливає рівність самих трикутників, адже трикутники можуть бути різного розміру.

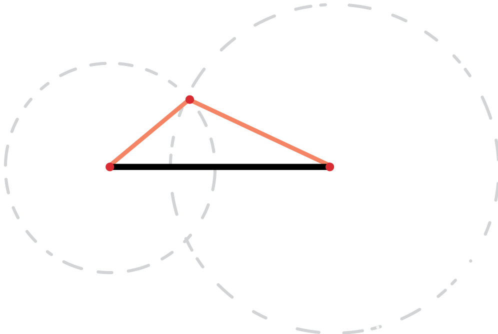


Так само, у випадку з чотирикутниками, їх конгруентність не випливає із рівності всіх чотирьох відповідних сторін.



Утім, доведення того, що з рівності трьох відповідних сторін випливає конгруентність трикутників, – не дуже складне. Неважко помітити, що за допомогою циркуля та лінійки, знаючи три сторони, можна побудувати лише один точно визначений трикутник.

Спочатку ми довільно беремо одну з трьох сторін і розміщуємо її на малюнку. Далі ми хотіли б відкласти від кінців цієї сторони дві інші сторони так, щоб вони перетнулися. Для цього за допомогою циркуля ми побудуємо всі можливі кінцеві точки обох сторін: отримаємо два кола. Ці кола перетинаються у двох точках, а отже, ми отримуємо два можливі трикутники. На щастя, верхня і нижня частини – симетричні, і обидва варіанти дають однаковий результат: один-єдиний можливий трикутник.

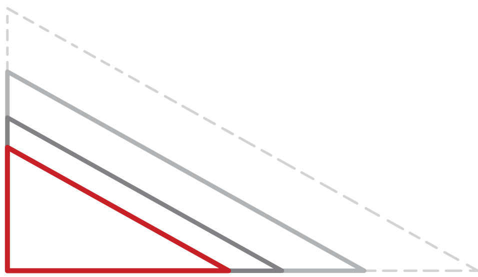


Насправді, є й інші умови, які гарантують конгруентність трикутників: достатньо того, що, наприклад, дві відповідні сторони трикутників та кути між ними – рівні, або навіть того, що всі відповідні висоти трикутників рівні. Усі ці умови базуються на тригонометричних співвідношеннях.

ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

Однак, у цьому розділі, нас передусім цікавить те, коли трикутники мають «однакову форму», тобто коли їх можна зробити конгруентними через збільшення чи зменшення. Такі трикутники називаються подібними трикутниками.

Уважніше розглядання першого малюнка натякає, що для гарантування «однакової форми», очевидно, вистачить тільки рівності відповідних кутів. Дійсно, наступний малюнок повинен зробити цей факт ще більш переконливішим:

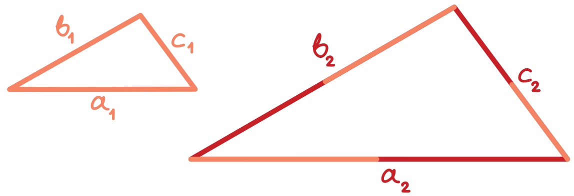


Корисно зазначити, що оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180 градусів, то для визначення усіх кутів трикутника, насправді, достатньо знати лише два кути.

Як пов'язані між собою сторони подібних трикутників?

Як ми вже згадували, подібні трикутники можна зробити рівними збільшуючи або зменшуючи їх, а у рівних трикутників – звісно ж, рівні відповідні сторони.

Однак збільшення та зменшення геометричних фігур можна розглядати просто як множення всіх довжин відрізків на додатне дійсне число, залишаючи їх розташування таким самим. Наприклад, якщо ми збільшимо трикутник удвічі, то помножимо довжини всіх сторін на два.



Отже, ми знаємо, що, якщо трикутники подібні, то довжини сторін одного трикутника a_1, b_1, c_1 стануть довжинами сторін іншого трикутника a_2, b_2, c_2, якщо помножити їх на одне й те саме дійсне число. Інакше кажучи, довжини відповідних сторін – пропорційні, тобто:

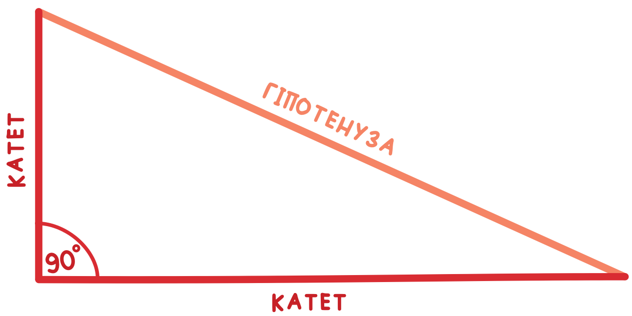
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Однак із цього випливає, що в подібних трикутників рівними є також відношення відповідних сторін. Дійсно, обидві сторони ми збільшуємо в однакову кількість разів, і у відношенні сторін коефіцієнт пропорційності скорочується. Ми можемо це побачити, трохи перетворивши також першу рівність наведеного відношення – можемо переписати його у вигляді $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. Аналогічно, $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$ і $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$.

Насамкінець, ми бачимо, що як кути так і відношення сторін – це величини, які зі збільшенням чи зменшенням трикутника не змінюються. Ми можемо описати ціле сімейство подібних трикутників використовуючи лише кути, а також лише за допомогою відношень сторін. Це вказує на те, що кути та відношення сторін також можуть бути певним чином між собою пов'язаними. Саме основні тригонометричні співвідношення, які спочатку визначаються для прямокутних трикутників, і дають цей зв'язок.

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК ТА ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Нагадаємо, що прямокутним трикутником називають трикутник, один із кутів якого дорівнює 90 градусів. Сторони прямокутного трикутника мають спеціальні назви: прилеглі до кута 90 градусів сторони називаються катетами, а протилежна сторона – гіпотенузою.



Як ми вже згадували, у трикутниках «однакової форми» рівні всі відповідні кути, а також рівні відношення прилеглих до відповідних кутів сторін.

Якщо на додачу ми знаємо, що трикутник – прямокутний, то для визначення всіх кутів вистачить знати лише один із його кутів – адже в такому разі один із кутів дорівнює 90 градусам, другий кут ми знаємо, а третій кут можемо обчислити, оскільки сума всіх трьох кутів дорівнює 180 градусів.

Тобто, інакше кажучи, якщо нам дано певний гострий кут (чому саме гострий кут?), який ми домовимося позначити першою літерою грецького алфавіту α, то тоді ми знаємо, яку форму має наш трикутник, а також можемо точно визначити відношення сторін:

- відношення довжини катета, протилежного куту α, до довжини гіпотенузи,
- відношення довжини катета, прилеглого до кута α, до довжини гіпотенузи,
- відношення довжини катета, протилежного куту α, до довжини прилеглого катета.

Кожне із трьох відношень дорівнює певному числу. Оскільки ці числа залежать лише від даного кута α, то ми маємо справу з функціями [с. 64] кута.

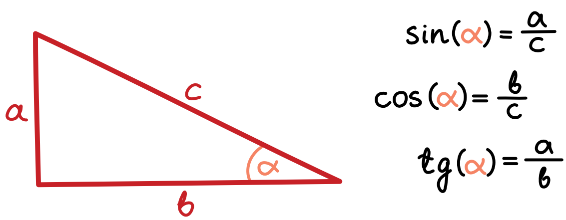
Наприклад, якщо $\alpha = 45°$, то другий гострий кут також дорівнює $45°$, а отже, трикутник – рівнобедрений. Відповідно, відношення катетів дорівнює 1.

Знайдені функції бувають у вжитку так часто, що їм було б доцільно дати коротші назви:

- відношення протилежного катета до гіпотенузи називається синусом кута α,
- відношення прилеглого катета до гіпотенузи називається косинусом кута α,
- відношення протилежного катета до прилеглого катета називається тангенсом кута α.

Ці три функції називаються тригонометричними функціями, і безпосередньо з їх означення можна помітити зв'язок між ними: тангенс дорівнює частці від ділення синуса на косинус.

Для цих старомодних назв у математиці використовують також такі скорочені позначення:



Попереднє твердження про те, що для прямокутного трикутника з кутом 45 градусів, відношення катетів дорівнює одиниці, тепер можемо записати так:

$$\tan(45°) = 1.$$

Навіть якщо значення самих цих функцій знаходять через відношення сторін прямокутного трикутника, то саму функцію не обов'язково застосовувати лише до кутів прямокутного трикутника. Тригонометричні функції можна вільно застосовувати також до кутових значень, отриманих у розгляді п'ятикутника, просто двох прямих або деінде.

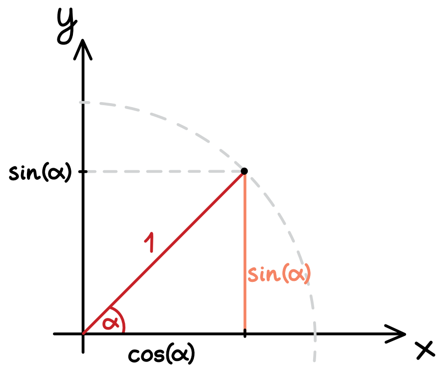
Щоправда, на цей момент ми все ще вимагаємо, щоб використовуване значення належало гострому куту, тобто куту, меншому 90 градусів, бо лише в такому разі ми можемо знайти відношення сторін, а отже, визначити тригонометричні функції. Однак ми негайно позбудемося цієї вимоги, розпочавши з цілком природного питання.

ЯК ВИГЛЯДАЮТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ?

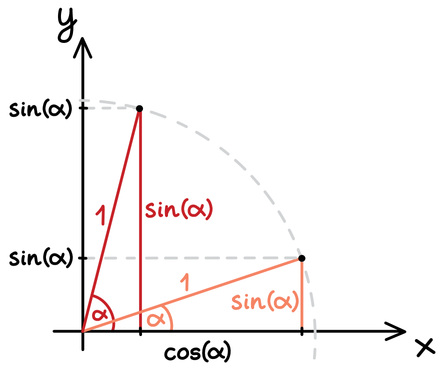
Для того, щоб відповісти на це питання, ми маємо просто намалювати трикутники з різними значеннями кута α.

Звичайно, розмір трикутника ми можемо вибрати самі. Спробуємо вибрати розмір трикутника так, щоб довжина гіпотенузи дорівнювала одиниці. У цьому випадку, синус кута дорівнюватиме довжині протилежного катета, а косинус кута дорівнюватиме довжині прилеглого катета.

Візьмемо тепер початок системи координат за вершину трикутника і побудуємо гіпотенузу, довжина якої дорівнює одиниці. Одним із катетів буде відрізок, що з'єднує кінець гіпотенузи та точку на осі абсцис, а другий катет належить осі абсцис.

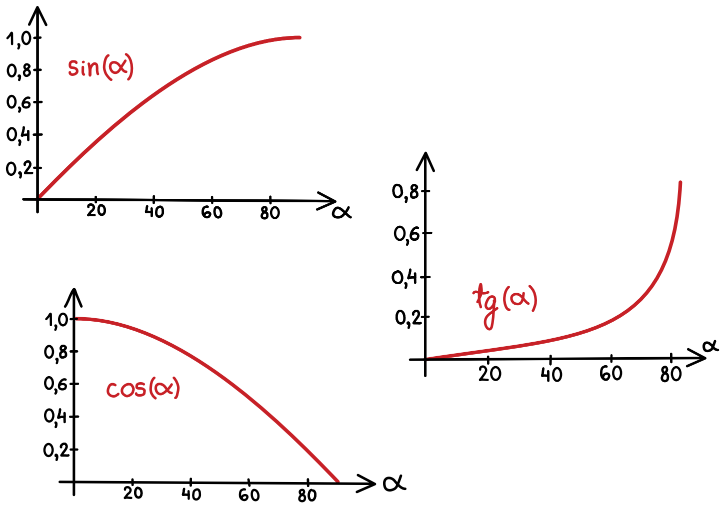


Тепер пригадаємо, що синусом кута є відношення довжини протилежного катета до довжини гіпотенузи. Оскільки довжина гіпотенузи дорівнює одиниці, то синус у нашому випадку дорівнюватиме довжині протилежного катета. На малюнку видно, як значення синуса кута буде зростати разом зі зростанням значення кута.

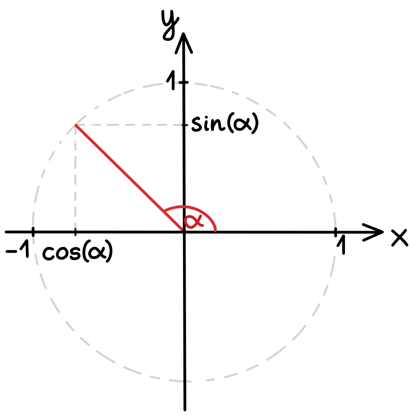


Однак, довжина протилежного катета дорівнює ординаті точки перетину сторони кута з одиничним колом. Водночас, косинус дорівнює абсцисі цієї точки перетину, а тангенс – відношенню ординати до абсциси. Останній ми можемо інтерпретувати ще простіше: тангенс показує нахил прямої, що визначається стороною кута. Якщо ми поділимо ординату на абсцису, то дізнаємось, наскільки змінюється ордината точки прямої внаслідок зміни абсциси на одиницю.

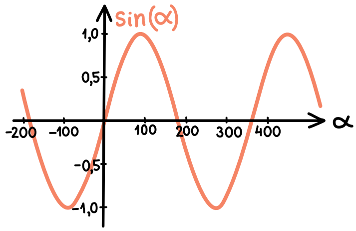
Далі легко змусити комп'ютер, якого-небудь друга чи подругу намалювати графіки синуса, косинуса й тангенса:

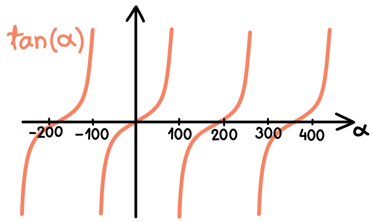


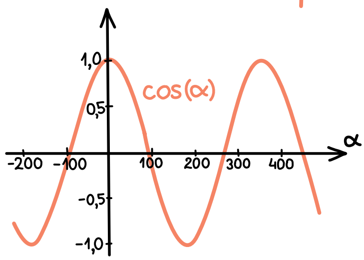
Однак, зазначимо, що в нашій поточній конструкції немає нічого специфічного для гострих кутів. Ми визначили синус, косинус і тангенс кута через координати точки перетину сторони кута та одиничного кола. Однак ця сторона кута може утворювати з віссю абсцис будь-який кут, не лише гострий. Отже, ми можемо визначити тригонометричні функції для довільного значення кута, скажімо, для 2013 градусів.



У всій своїй довжині, тригонометричні функції виглядають так:







Передусім, можна помітити, що тригонометричні функції – напрочуд періодичні, тобто, інакше кажучи, їх форма повторюється протягом руху вздовж осі абсцис. Це, звичайно, прямий результат означення – адже кути, які відрізняються на повний поворот, розташовані щодо осі абсцис абсолютно однаково, і отже, дають точно такі самі значення синуса, косинуса і тангенса. Однак, про тригонометричні функції та періодичність ми детальніше поговоримо вже в другому підрозділі [с. 230].

Друга річ, що лякає – це, звичайно, розрив тангенса через кожне півколо, тобто кожні 180 градусів. За цих обставин перший розрив буде вже для 90 градусів. Утім, у цьому немає нічого страшного – це трапляється просто тому, що в цих місцях косинус дорівнює нулю, а, оскільки ділити на нуль не можна, то знайти значення тангенса також неможливо.

Цей клопіт можна також розглянути в контексті нахилу прямої: якщо пряма – вертикальна, тобто паралельна осі ординат, то неможливо визначити її нахил. Чи то вона нескінченно швидко піднімається вгору, чи так само швидко опускається вниз?

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

У багатьох місцях підручника згадано обернені функції. Ми вже коротко поговорили про них у розділі про функції [с. 68], де зазначили, що обернені функції задовольняють таке співвідношення:

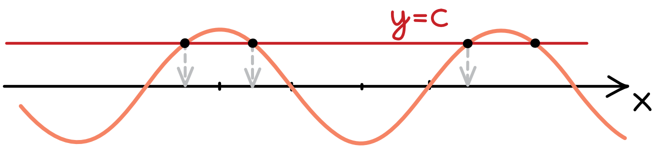
$$\text{обернена функція (функція (значення))} = \text{значення}.$$

Інакше кажучи, функція, обернена до певної іншої функції, зводить її ефект акурат нанівець і повертає початкове значення.

Наприклад, ми могли б сказати, що оберненою функцією до додавання трьох є віднімання трьох. Пізніше ми побачимо, що обернена до показникової функції – це логарифмічна функція [с. 290], і що похідна та інтеграл є оберненими операціями одне для одного [с. 352].

У контексті тригонометрії з приводу оберненої функції, ми розмірковуємо про досить просте запитання: якщо раніше для даного кута ми знаходили його синус, косинус або тангенс, то тепер ми хотіли б знайти, синусом, косинусом або тангенсом якого саме кута вони якраз є.

Графічно це означає таке: ми будуємо графік нашої тригонометричної функції, вибираємо яке-небудь значення c, а потім запитуємо, де графік функції перетинає пряму $y = c$.



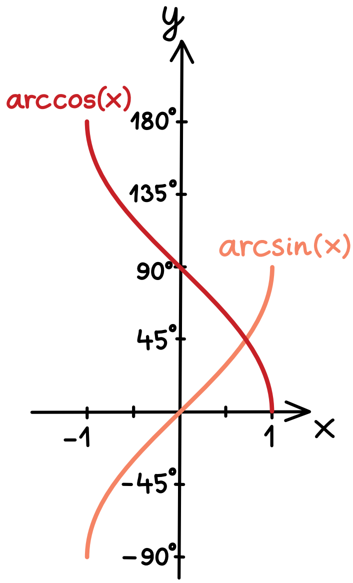
Наприклад, якби ми знали, що значення синуса дорівнює нулю, ми б узяли його графік й подивилися, де він перетинає вісь абсцис. У відповідь ми б отримали, що кут може дорівнювати 0 градусів або 180 градусів, або якому-небудь іншому значенню, кратному 180 градусів.

АРКСИНУС І АРККОСИНУС

Як ми бачимо на графіку, точки перетину прямої з графіками синуса або косинуса існують не завжди. А саме, якщо $|c| > 1$, то пряма $y = c$ повністю розташована вище графіка функції або повністю розташована нижче його. Однак, у всіх інших випадках точок перетину існує нескінченна кількість.

Це означає, що, даючи означення оберненої функції, ми повинні бути досить обережними. По-перше, ми можемо надавати значення оберненій функції лише для чисел, що належать відрізку $[-1;1]$, який є тоді її так званою областю визначення. По-друге, нагадаємо, що в кожному значенні незалежної змінної функція може набувати рівно одне значення – тому для кожної прямої ми маємо якось вибрати саме одну точку перетину.

Один зі способів це зробити – просто вимагати, щоб відповідь належала якомусь певному відрізку – на малюнку ми бачимо, що функція синус набуває всі свої можливі значення на проміжку $[-90°;90°]$, а функція косинус, наприклад – на проміжку $[0°;180°]$. На цих проміжках функції є взаємно однозначними [с. 68], тож ми можемо негайно визначити обернені функції.

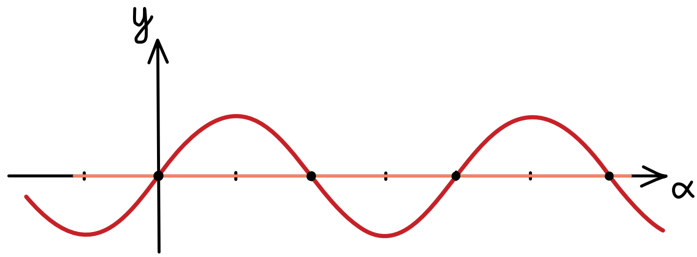


Отже, функцію арксинус, яку позначають $\arcsin(x)$, зазвичай, визначають як функцію, обернену до функції синус на проміжку $[-90°;90°]$, тобто яка задовольняє на цьому проміжку співвідношення $\arcsin(\sin(x)) = x$.

Аналогічно дають означення арккосинуса, або $\arccos(x)$, от тільки в такому разі використовують проміжок $[0°;180°]$.

Звичайно, залежно від мети, іноді можна використовувати також й інші проміжки. Більше того, подекуди ми хотіли б представити всі відповіді одразу. Тоді ми запишемо приблизно так:

$$\arcsin(0) = k \cdot 180°, k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

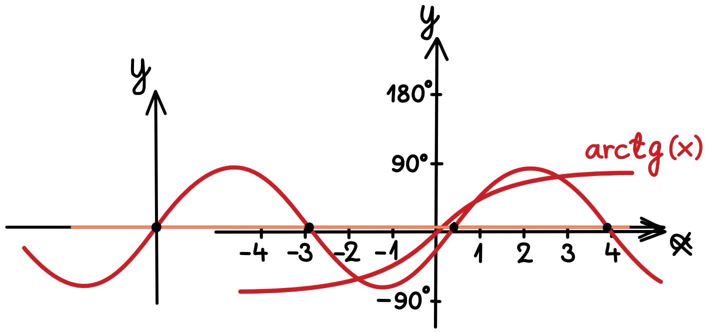


У такому разі, строго кажучи, у нас більше немає функції, але ми просто перелічуємо всі точки перетину прямої $y = 0$ та функції синус, а їх багато!

АРКТАНГЕНС

Із цього погляду, історія з тангенсом – простіша, оскільки він може набувати будь-яке дійсне значення. Отож, областю визначення функції, оберненої до тангенса, її називають арктангенсом, є множина усіх дійсних чисел.

Звичайно, залишається та проблема, що функція тангенс набуває те саме значення в кількох місцях. Отже, для того, щоб визначити арктангенс як функцію, слід також обрати одну конкретну область. Розумним вибором буде, наприклад, проміжок $(-90°;90°)$, але можливі й інші.



Арктангенс позначають як $\arctan(x)$.

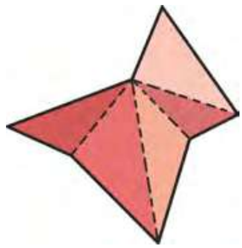
Про позначення

Нобелівському лауреатові фізику Річарду Фейнману анітрохи не подобалися позначення тригонометричних функцій. Йому здавалося, що $\sin$ означає добуток трьох чисел s, i та n. Ще менше йому подобалася функція, обернена до синуса, яку в деяких інших книгах позначають як $\sin^{-1}(\alpha)$. Це інколи вносить плутанину, оскільки може трактуватися як $\frac{1}{\sin(\alpha)}$, що переважно не мається на увазі. У будь-якому разі, у шкільні роки для функції синус та функції, оберненої до синуса, він використовував такі позначення:

Утім, досить скоро він помітив, що через використання таких позначень будь-хто інший з його думок та пояснень може мало що зрозуміти. Тож все-таки, рекомендуємо дотримуватися позначень sin і arcsin.

ЧОМУ САМЕ ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ?*

Навіть якщо трохи поміркувати, може все ще виникати одне запитання. Чому, все-таки, ми зв'язок між кутами та відношеннями сторін розглядаємо саме для трикутників, і чому саме для прямокутних трикутників? Чи це – просто історичний релікт, чи цьому також можна знайти пояснення?

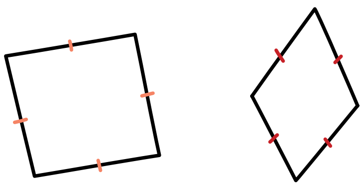


Відразу ж у відповідь можна сказати, що без трикутників не обійтись, як не старайся. Щойно в нас будуть визначені довжини двох відрізків та кут між ними, ми уже матимемо три точки – вершину кута та інші кінці відрізків – а отже, трикутник. На додачу, будь-який інший многокутник можна завжди розбити на трикутники.

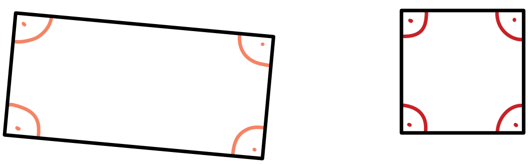
Але передусім причина полягає в тому, що трикутники – це єдині многокутники, де:

- відношення довжин сторін однозначно визначають усі кути,
- а також навпаки, знаючи всі кути трикутника, ми зможемо однозначно визначити всі відношення сторін.

Жоден із цих зв'язків вже не підходить, наприклад, для прямокутників. А саме, якщо чотири сторони прямокутника рівні, то кути все одно можуть бути різними: ми можемо мати як гарний квадрат, так і досить сплющений ромб.

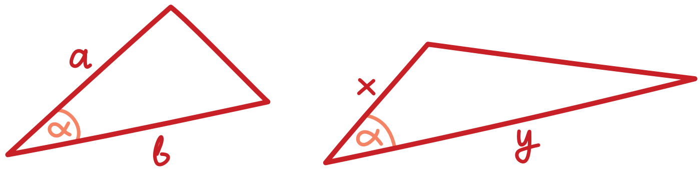


І навпаки, інформація, що всі кути чотирикутника є прямими, говорить нам лише про те, що ми маємо справу з прямокутником, і, звичайно, існують прямокутники з дуже різними відношеннями сторін.



Але, навіть якщо ми погодимось, що саме трикутники слугують для встановлення зв'язків між кутами та відношеннями сторін, то чому використовують саме прямокутні трикутники?

Як ми вже згадували, для визначення «форми» трикутника необхідно знати принаймні два його кути. Для визначення відношення сусідніх сторін, одного кута недостатньо, адже відношення сторін, прилеглих до того самого кута, може бути дуже різним:



$$\frac{a}{b} \neq \frac{x}{y}$$

Оскільки ми знаємо, що для визначення «форми» трикутника вистачить відомостей про будь-які два кути, то зафіксувати один кут назавжди – хитрий прийом. Як ми вже побачили вище, у такому разі для знаходження «форми» трикутника, необхідно знати ще один кут, і цілком резонно говорити про відношення прилеглих до цього кута сторін.

Звісно ж, ми могли вільно вибирати величину фіксованого кута. І все-таки, довершену, найбільш природну та красиву теорію ми отримаємо, використовуючи прямокутні трикутники – тобто фіксуючи прямий кут як один відомий кут.

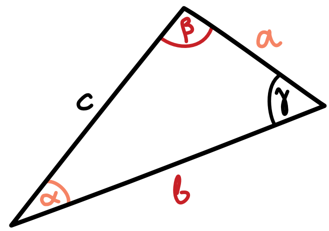
Є багато причин надати перевагу цьому варіанту, деякі окремі з них є, приміром, такими:

- Кут $90°$ є найбільш симетричним вибором – він знаходиться точно на пів дорозі від 0 градусів до 180 градусів.
- Як ми вже бачили, у цьому разі ми можемо визначити тригонометричні функції просто за допомогою одиничного кола й координат x та y.
- Завдяки цьому вибору, для скалярного добутку маємо гарну формулу, у якій задіяні довжини векторів та косинус кута між ними [с. 144].
- Будь-який інший трикутник ми можемо розбити на прямокутні трикутники, і у такий спосіб знайти співвідношення між кутами та сторонами початкового трикутника – одне з них називається теоремою синусів.

ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Використовуючи основні тригонометричні співвідношення, визначені для прямокутного трикутника, ми можемо також знайти зв'язки між кутами та сторонами довільного трикутника.

Найвідомішим свідченням такого зв'язку є, мабуть, теорема синусів, яка стверджує, що для будь-якого кута трикутника відношення протилежної сторони до синуса цього кута буде одним і тим самим. Хоча інтуїтивно зрозуміло, що кути та відношення сторін мають бути пов'язаними між собою, проте, точне формулювання теореми синусів – напрочуд винахідливе і просте:



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Перш ніж розпочати доведення теореми синусів, поговорімо про деякі можливі її математичні застосування.

Деякі застосування теореми синусів

Передусім, теорема синусів допомагає знайти відсутні елементи трикутника – з її допомогою ми можемо перетворити відомості про кути на відомості про довжини сторін, і навпаки.

Так само з теореми синусів, принаймні для гострокутного трикутника, ми можемо досить легко вивести дещо захопливе: довша сторона трикутника лежить проти більшого кута.

Справді, з теореми синусів ми знаємо, що

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}.$$

Тепер, якщо довжини сторін задовольняють нерівність $a > b$, то також виконується нерівність $\sin(\alpha) > \sin(\beta)$. Але, водночас, раніше ми бачили, що для гострих кутів синус є зростаючою функцією. Отже, ми робимо висновок, що кут α повинен бути більшим, ніж кут β. Тобто, навпроти більшої сторони – кут також більший.

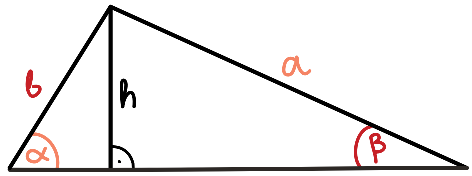
Доведення теореми синусів для гострокутного трикутника

Узявши папір, ручку та трохи повправляючись, читач може переконатися, що теорема синусів не говорить про прямокутний трикутник нічого нового – усі зв'язки отримаємо з означення синуса.

Утім, для непрямокутного трикутника, ми маємо справу з чимось новим та захопливим, що потребує також і доведення, інакше кажучи, пояснення за допомогою наших попередніх знань. Чого б це ми мали просто так у це повірити?

Як тоді аргументувати? Нагадаємо, в означенні синуса фігурує прямокутний трикутник. Отже, було б добре якось добудувати прямокутний трикутник, в якому ми могли б використати це означення.

Один зі способів – просто провести висоту. Так ми розіб'ємо початковий трикутник на два прямокутні трикутники. Це вже здається досить хорошим початком, адже одна сторона в цих прямокутних трикутниках, на додачу, є спільною – це саме та сторона, за допомогою якої ми можемо виписати синус кута.



Отож, просто запишемо означення синуса кута для обох трикутників:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b},$$

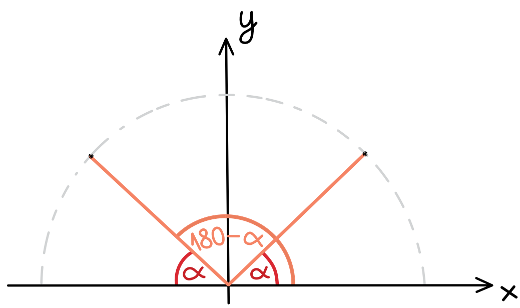
$$\sin(\beta) = \frac{h}{a}.$$

Вивівши з обох формул висоту h, ми побачимо, що $h = b\sin(\alpha)$, і водночас $h = \ a\sin(\beta)$.

Отже, одержимо рівність $b\sin(\alpha) = a\sin(\beta)$, звідки $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$.

Звичайно, ми б так само могли провести й іншу висоту і відтак показати рівність усіх трьох відношень.

У випадку тупокутного трикутника висота може лежати зовні трикутника, але це проблем не спричинить. А саме, якщо уважно подивитися на означення функції синус для довільного кута, то ми помітимо, що $\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$. Адже справді, обидві кінцеві сторони кута перетинають одиничне коло на однаковій висоті.



Розширена теорема синусів

Виявляється, що насправді існує ще розширена версія теореми синусів.

А саме, для будь-якого кута трикутника точне значення відношення протилежної сторони до синуса цього кута також є відомим – воно завжди дорівнює діаметру кола, описаного навколо трикутника. Отже, незмінно використовуючи ті самі старі позначення для сторін і кутів, та позначивши радіус описаного навколо трикутника кола через R, ми можемо записати теорему синусів у розширеному вигляді:

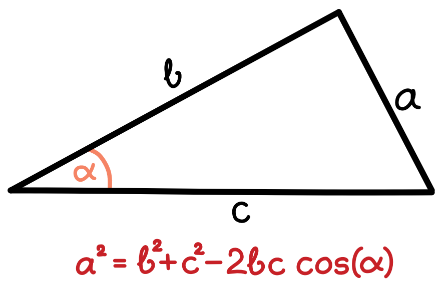
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R.$$

У цьому разі доведення – трохи хитромудріше, і ми залишимо його для обмірковування чи розвідування тим, хто в ньому зацікавлений.

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

Іншим відомим тригонометричним співвідношенням, що справджується для кожного трикутника, є теорема косинусів.

Теорема косинусів дає змогу знайти за допомогою довжин двох сторін та кута між цими сторонами довжину третьої сторони трикутника:



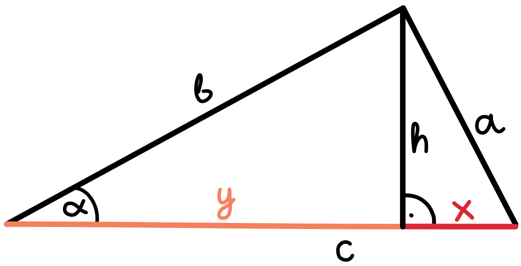
Із теореми косинусів відразу випливає, наприклад те, що трикутник однозначно визначається довжинами двох сторін та кутом між ними. Дійсно, відштовхуючись від цих відомостей, ми можемо знайти довжину третьої сторони, а ми вже знаємо, що за трьома сторонами трикутник визначається однозначно.

Теорема косинусів виглядає вже майже так само, як теорема Піфагора. Цей візуальний зв'язок – аж ніяк не оманливий. Пригадавши, що $\cos(90°) = 0$, ми бачимо, що у випадку прямокутного трикутника, теорема косинусів стверджує точно те саме, що й теорема Піфагора.

Також було б непогано знати, як вивести теорему косинуса із тих фактів, якими ми володіємо. Інакше кажучи, маємо питання: як за допомогою двох сторін та кута між ними знайти довжину третьої сторони?

Конкретніше, тоді ми ставимо собі за мету знайти довжину сторони a за допомогою сторін b та c, і кута α між ними.

Один зі способів досягти цього – почати з побудови, використаної у доведенні теореми синусів, і виокремити прямокутні трикутники за допомогою висоти. Так ми потрапляємо в чудову ситуацію, де можемо використовувати означення косинуса кута в прямокутному трикутнику, а також родичку теореми косинусів – теорему Піфагора.



Отже, використовуючи теорему Піфагора, ми можемо записати зв'язок між стороною трикутника a, його висотою h та допоміжним відрізком x:

$$a^2 = h^2 + x^2.$$

Далі ми хотіли б також якось розписати цих помічників. Висоту, відтак, можна знайти, застосувавши теорему Піфагора до іншого, розташованого зліва, прямокутного трикутника:

$$h^2 = b^2 - y^2.$$

А довжину допоміжного відрізка x ми можемо виразити через сторону c та інший допоміжний відрізок y: $x = c - y$, а отже, $x^2 = (c - y)^2$.

Хтось може запитати, яка з цього, все-таки, користь, якщо замість відрізка x ми запишемо відрізок y. На щастя, ми маємо також і відповідь: ще раз поглянувши на прямокутний трикутник, що знаходиться ліворуч, ми можемо записати означення косинуса:

$$\cos(\alpha) = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b\cos(\alpha).$$

Отже, довжину відрізка y ми можемо подати за допомогою придатних нам елементів.

Зібравши все це докупи, отримаємо:

$$a^2 = b^2 - y^2 + (c - y)^2.$$

Спростимо:

$a^2 = b^2 - y^2 + c^2 - 2cy + y^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2cy.$

Підставивши тепер знайдену довжину допоміжного відрізка $y = b\cos(\alpha)$, отримаємо співвідношення, проголошене під іменем теореми косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).$$

У випадку тупокутного трикутника, ситуація, знову ж таки, може бути дещо заплутанішою, але, старанно прослідкувавши, водячи пальцем по рядках, ми, однак, зможемо використати майже такі самі міркування.

Альтернативним способом було б використати вектори й властивості скалярного добутку. На те, що щось подібне могло би спрацювати, натякає, звісно ж, вже саме означення скалярного добутку двох векторів [с. 144]:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\angle \vec{a}, \vec{b}\right).$$

Адже тут присутній точно той самий член, який відрізняє теорему косинусів від теореми Піфагора! Після встановлення зв'язку з векторами теорема косинусів повністю випливає, насправді, лише з властивостей скалярного добутку.

Фактично доведення – таке саме, як і те, що його ми запропонували як доповнення до теореми Піфагора в розділі про вектори [с. 147] – зацікавленому читачеві, однак, ми радимо зібрати деталі докупи самому.

ТРИГОНОМЕТРІЯ В КОСМОСІ: РУКА-РОБОТ

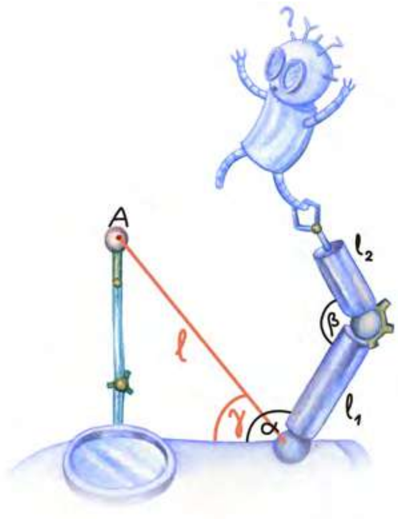
Повернемося тепер до проблеми на початку розділу: як керувати роботизованою рукою з двома суглобами, щоб вона сягнула до кінця зіпсованої антени?

Нагадаємо, що ситуація була саме настільки хорошою чи поганою, як на малюнку.

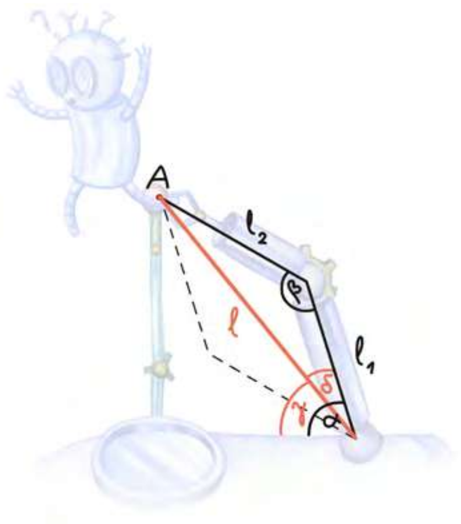
Для того, щоб міркувати про ситуацію математично, ми мусимо позбутися надлишкових деталей і трішки все спростити. Наприклад, припустимо, що рука-робот рухається лише в одній площині, і саме вона буде площиною, обраною для побудови зображення. Адже можна, наприклад, оптимістично вважати, що такими самими рухами ми зможемо пересувати руку-робота і в тривимірному просторі.

Далі ми мусимо якось позначити важливі для нас елементи. Нам відомі довжини двох важелів роботизованої руки l_1 та l_2, і припустимо, що за допомогою двигунів ми зможемо контролювати кути повороту суглобів α і β. Нижній із них ми назвемо плечовим, а інший – ліктьовим. Наша мета – перемістити кінець роботизованої руки (і космонавта) у задану точку A, при цьому ми можемо змінювати кути α і β.

Звичайно, для вирішення проблеми необхідно ще також уточнити, що саме ми вже знаємо про точку A. Здається, цілком розумно припустити, що по-перше, ми знаємо відстань від плечового суглоба до точки A – її можна знайти, дослідивши, наприклад, відбиття лазерного променя. По-друге, можемо припустити, що знаємо кут, який цей лазерний промінь утворює між плечовим суглобом та горизонтальною прямою. Отриману відстань позначимо, наприклад, через l, а сам кут – через γ. Отже, наш остаточний малюнок є таким:



Тут ми можемо сформулювати нашу задачу вже цілком математично: отже, метою є знайти кути α та β за допомогою довжин l, l_1, і l_2, й кута γ. Для її розв'язування використаємо тригонометрію. Нагадаємо, що довжини трьох сторін трикутника визначають як форму, так і величину трикутника. Оскільки на додачу відомими є ще й дві вершини трикутника – точка, в якій розташовано плечовий суглоб, і точка A, то для трикутника із заданими довжинами сторін у нас залишається рівно дві можливості, залежно від того, як ми підійдемо до точки A.



Припустимо, що оберемо спосіб, показаний на малюнку. Наступне питання полягатиме тоді в тому, як знайти кути, знаючи довжини сторін. Допомогу з цим ми знайдемо у попередньому розділі: теорема косинусів пов'язує довжини сторін трикутника з косинусом одного з його кутів. Так можемо знайти косинус кута β:

$$\cos(\beta) = \frac{l_1^2 + l_2^2 - l^2}{2l_1 l_2}.$$

Як ми побачили під час знайомства з оберненими функціями, знаючи косинус кута, ми можемо легко знайти також і значення самого кута. Найпростіше запитати про значення кута в калькулятора – на будь-якому поважному калькуляторі, знаходження кута за його косинусом передбачено функцією арккосинус, яку позначають $\arccos(x)$ або $\cos^{-1}(x)$.

Точно так само можемо знайти й косинус кута δ:

$$\cos(\delta) = \frac{l^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l},$$

а після цього – значення кута δ за допомогою арккосинуса.

Нарешті, можемо тепер легко вирахувати також і кут α. Залежно від того, яке кінцеве положення ми хочемо надати роботизованій руці, матимемо: $\alpha = \gamma + \delta$ або $\alpha = \gamma - \delta$.

Отепер ми вже точно описали, що слід зробити , аби направити руку-робота до антени. Далі ці математичні інструкції та точні значення всіх даних слід передати комп'ютеру, і з космічною станцією все буде в порядку!

ТРИГОНОМЕТРІЯ Й ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ

У попередньому розділі, вивчаючи відношення довжин сторін прямокутного трикутника, ми дійшли до тригонометричних функцій. Надалі ми використали отримані функції для пошуку зв'язків між довжинами сторін і кутами довільного трикутника. Завдяки цим зв'язкам встановити невідомі елементи трикутника відразу ж стало досить легко.

Однак синус і косинус як функції трапляються в ще іншому контексті – в описі періодичних, тобто повторюваних процесів природи.

Будь-хто може спробувати це вдома (у випадку, якщо не має нічого проти прибирання). Прив'яжіть до кінця довгої мотузки відро, налийте його по вінця фарбою і зробіть у дні отвір. На додачу, запасіться великим рулоном паперу.

Тепер змусьте це відро коливатися як маятник, а папір протягуйте під відром з постійною швидкістю. Кольорова лінія, що з'явиться на папері, – це і є прекрасний графік синуса або косинуса.

Скептичний читач може, звичайно, засумніватися, чому на папері повинен з'явитися графік синуса чи косинуса, а не графік будь-якої іншої періодичної функції, що має подібну форму.

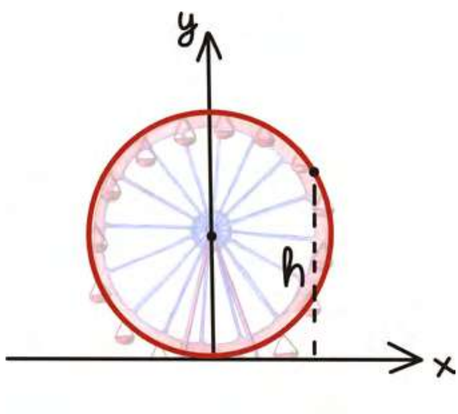
Цей сумнів є з усіх боків виправданим – адже існує так багато різних періодичних функцій, чому природа повинна стикатися саме з тригонометричними функціями? А втім, вона стикається. Однак, обґрунтування цього – вже трішки складніше і потребує також достатнього знання фізики: зацікавлені читачі та скептики зможуть почитати про це в додатковому розділі [с. 236].

Але надалі ми намагатимемося інтуїтивно зрозуміти, як періодичні рухи пов'язані з тригонометрією, і робитимемо ми це на прикладі найкрасивішого періодичного руху – обертального руху.

ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ І ТРИГОНОМЕТРІЯ

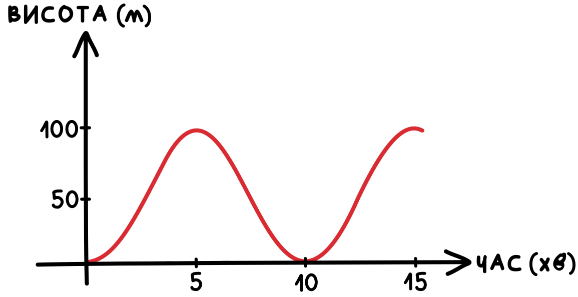
Ви йдете кататися на оглядовому колесі діаметром 100 метрів. Чи замислювались ви, як під час катання на оглядовому колесі змінюється ваша висота над землею? Можливо, ваш супутник боїться висоти, можливо – любить. Чи можете ви йому сказати, скільки часу ви проведете, перебуваючи на граничних висотах – дуже високо чи дуже низько , і скільки під час піднімання та спуску?

На ці запитання можна дати гарну математичну відповідь. Для математичного підходу, насамперед, слід забути про деякі деталі: наприклад про те, яким красивим є краєвид, яким привабливим – супутник або, яким розвалищем – саме оглядове колесо. Зостанеться коло, яке обертається, з точкою на ньому, та для проведення вимірювань ми можемо також додати як тло координатну площину так, щоб вісь абсцис лежала на земній поверхні.



Буде цілком резонно припустити, що оглядове колесо рухається з постійною швидкістю – адже в інакшому випадку, люди, що сидять у деяких кабінах, отримали б більш захопливу поїздку, ніж інші.

У нашій системі координат висота тепер відповідає координаті по осі y. Якщо на додачу припустимо, що повне обертання ми зробимо за 10 хвилин, то можемо намалювати також свій профіль висоти. На найвищу точку, якої досягаєте завдяки оглядовому колесу, ви повзете, звісно ж, із самого низу.

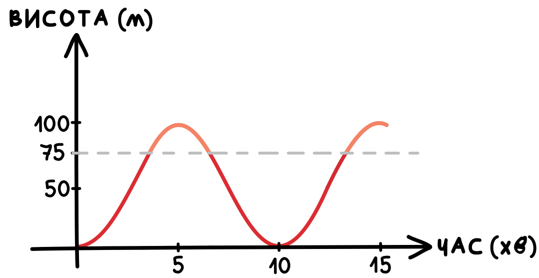


Однак це має точно такий самий вигляд, як і графік функції синус, лише трохи зміщений вгору й трохи збільшений. І справді, пригадавши означення функції синус у попередньому розділі, дивуватися цьому не слід.

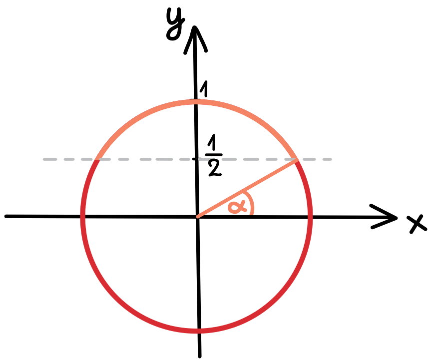
Зрештою, ми визначили синус кута саме як ординату точки перетину сторони кута й одиничного кола. Отже, якщо кут тепер рівномірно збільшувати, то й отримаємо обертальний рух, і отже, координата висоти малюватиме синусоїду. Звичайно, ця функція не обов'язково повинна мати саме вигляд $\sin\left(\frac{t}{T}\right)$, вона може мати вигляд $\sin(t)$, де T – це проміжок часу, за який здійснюється один повний оберт.

Тепер можемо відповісти також на запитання, що виникли. Скільки часу на оглядовому колесі ви проведете, перебуваючи надто високо над землею – у верхній чверті діапазону можливих висот?

На графіку нас цікавить проміжок часу, на якому значення функції висоти відрізняється не більше ніж на одну четверту від максимально можливого:



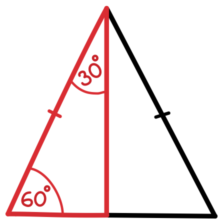
Оскільки рух – рівномірний, і в кожній точці кола ми проводимо однакову кількість часу, то своє запитання ми можемо перетлумачити в досить просте геометричне запитання: наскільки великою є та частина одиничного кола, яка знаходиться вище ніж $\frac{1}{2}$?



Отож, треба просто знайти, за яких значеннь змінної x, виконується нерівність $\sin(\alpha) \geq \frac{1}{2}$sin. На щастя, наступна геометрична конструкція точно показує, що

$$\sin(30°) = \sin(150°) = \frac{1}{2}.$$

Домалюймо до трикутника з кутами $60°$ і $30°$ точно такий самий. Оскільки отриманий трикутник – рівносторонній, то його сторони – рівні. Відповідно, $\sin(30°)$ – це половина сторони, поділена на цілу сторону, тобто $0{,}5$.



Оскільки частина кола, що відповідає 120 градусам $(150° - 30° = 120°)$, становить рівно третину від цілого кола, то можемо сказати, що на верхню чверть діапазону висоти припаде третина проведеного вами часу. Воно того таки варте!

Однак, з цього розділу можна, натомість, запам’ятати те, що до тригонометричних функцій можна підійти також під час розгляду обертального руху!

ГРАДУСИ ТА РАДІАНИ

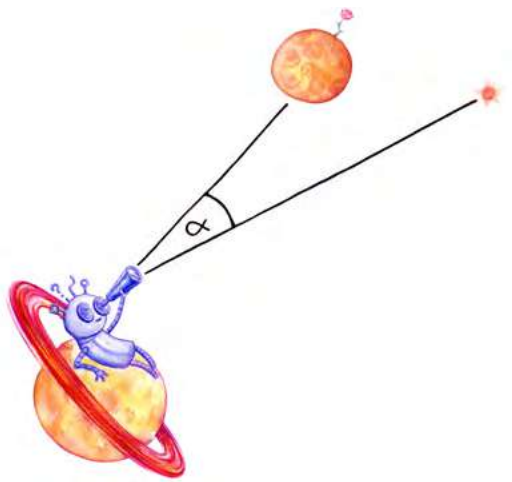
До цього ми уникали обговорення, як потрібно вимірювати кут – чи було б розумніше робити це в градусах чи в радіанах? Щоправда, дотепер ми робили це лише в градусах. Проте, не раз буває зручніше користуватися, натомість, радіанами.

Уже саме уявлення про градуси та радіани – зовсім різне.

Градуси

Знаходження градусної міри кута здійснюється спостерігачем, що знаходиться у його вершині . Щоб підрахувати кількість градусів, ми просто дивимось, яку частину повного повороту становить кут між двома променями.

Наприклад, у градусах часто розраховують розміри віддалених об'єктів та кутові відстані між ними.



Щодо градусів існує також одна цікава домовленість. А саме: здається, що десь у сутінках історії в якийсь момент було досить свавільно вирішено, що повний оберт має дорівнювати точно 360 градусів. Тоді градусна міра інших кутів розраховується відповідно до того, яку частину повного повороту вона становить – наприклад, градусна міра кута, що відповідає половині повороту, дорівнює 180 градусів.

Але чому повний оберт повинен становити саме 360 градусів, а не 100 або, наприклад, 222 градуси?

Здається, це може бути пов'язано з кількістю днів у році – у старовину здавалося, що небесні об'єкти описували коло приблизно за 360 днів.

Крім того, число 360 має приємну властивість, а саме – воно ділиться без остачі на велику кількість натуральних чисел. Усі наступні числа є його дільниками, загалом їх 24:

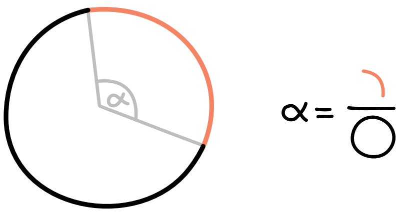
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24,$$
$$30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.$$

Отже, рік можна поділити на безліч різних повних циклів однакової тривалості. Наприклад, дотепер використовуються 12 місяців, тривалість яких, наскільки нам відомо, є різною.

Радіани

Щоб розрахувати міру кута в радіанах, необхідно піти і виміряти довжину дуги кола кроками певної довжини – отже, в цьому місці, ми маємо справу з кутовою мірою пішохода.

Якщо для знаходження градусів ми обчислювали, яку частину повного оберту становить даний кут, то у випадку з радіанами, ми зважаємо на те, яку частину довжини одиничного кола становить довжина його дуги, що лежить між сторонами кута.



Нагадаємо, що довжина одиничного кола дорівнює 2π, а отже, величиною повного оберту буде 2π радіан. Але наприклад, величина половини повного оберту дорівнює π радіан.

З радіанами, насправді, роль зіграв певний самовільний вибір – чому ми повинні були обрати саме одиничне коло? Якби у виборі міри кута ми зупинились, наприклад, на колі радіусом $0{,}5$, то величина повного оберту була б π радіан. Хіба це не було б краще? Чи було б, натомість, краще, якби використали інше означення [с. 101]?

Чим, все-таки, користуватися?

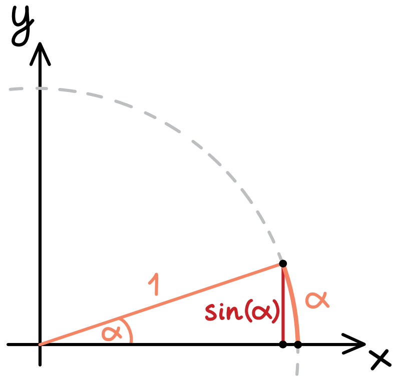
Повернемося тепер до запитання, поставленого на початку розділу: користуватися градусами чи радіанами? Виявляється, що це залежить від ситуації. Допоки ми використовуємо тригонометрію, займаючись лише трикутниками, великої різниці немає – і градуси, і радіани хороші рівною мірою, і в цій книжці ми користуємося ними обома почергово.

Однак, щойно ми почнемо займатися тригонометричними функціями, перевагу слід надати радіанам.

Наприклад, у разі користування радіанами, нахил графіка функції синуса в нулі дорівнює одиниці, що математично можна записати так:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1.$$

У разі користування градусами, ця формула більше не діє. Інтуїтивна першопричина цієї формули вбачається з наступного малюнка. Дійсно, синус дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з кінця радіуса. Але, якщо кут дуже малий, то довжина перпендикуляра буде майже такою самою, як і довжина дуги, що знаходиться поруч. Однак довжина цієї дуги дорівнює величині кута в радіанах!



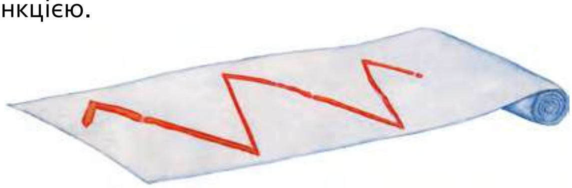
Завдяки цій чудовій властивості, похідною функції $\sin(\alpha)$, наприклад [с. 320], у випадку радіанів буде $\cos(\alpha)$, а у випадку градусів, натомість одержимо $\frac{\pi}{180}\cos(\alpha)$. Чому це має бути саме так, побачимо вже скоро [с. 251].

Зрештою, не буде дуже страшно, якщо ви з другом користуватиметеся різними мірами; від радіанів до градусів і назад ведуть прості перетворення. Щоб отримати градуси з радіанів нам просто потрібно помножити радіани на $\frac{180}{\pi}$, і навпаки, щоб отримати радіани з градусів – помножити градуси на $\frac{\pi}{180}$.

До цього часу ми працювали з градусами, але зараз, для різноманітності, перейдемо, натомість, до радіанів і надалі ми використовуватимемо їх, підлаштовуючись під настрій.

СИНУС, КОСИНУС ТА ПРУЖИННИЙ МАЯТНИК*

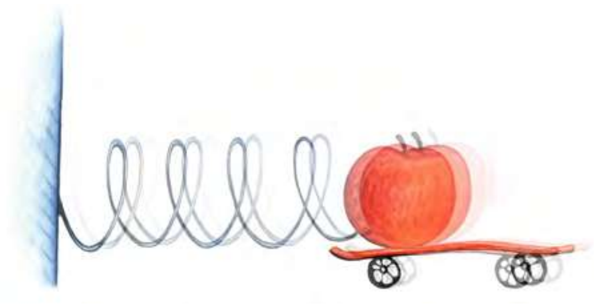
Цей підрозділ – для скептичного та зацікавленого читача, який не хоче вірити, що маятник пов'язаний саме з синусом і косинусом, а не з якою-небудь іншою періодичною функцією.



Це – обґрунтований з усіх боків сумнів!

На щастя, фізика та математика пліч-о-пліч дають хорошу аргументовану відповідь. Для простоти, у цьому розділі ми розглянемо пружинний маятник, але ситуація та ідея точно такі самі, як і у загальному випадку:

- у нас є одне тіло,
- його приводить в рух одна-єдина сила,
- що діє на об'єкт у напрямку, протилежному до положення рівноваги,
- але, на жаль, занадто сильно, і тіло продовжує коливатися туди-сюди навколо положення рівноваги.



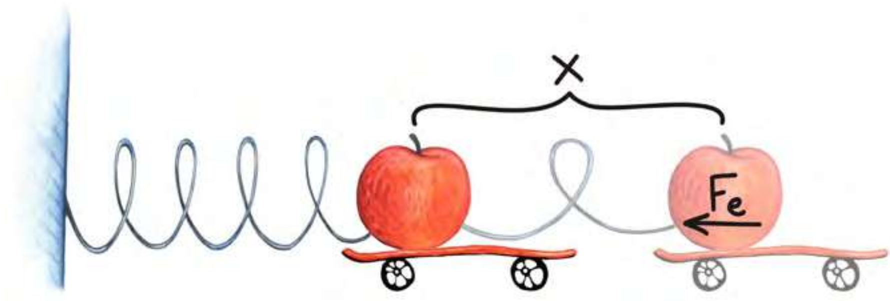
У випадку з пружинним маятником, силою, що викликає коливання, є сила пружності. У 17 столітті англійський фізик Гук здійснив ретельні експерименти й переконався, що чим більше пружину розтягують, тим більша сила її стискає, і навпаки, чим більше пружину стискають, тим більша сила штовхає її знову назад.

Гук був старанним хлопчиною і також точно виміряв, як саме ця сила залежить від видовження або стиснення пружини. Він зробив два висновки:

- для пружин із різних матеріалів сила буде різною,
- точно так само сила залежить від зміни довжини пружини – сила завжди пропорційна деформації пружини.

Тепер позначимо деформацію пружини відносно положення рівноваги через x (якщо x – додатне, то пружину розтягнуто, якщо ж x від'ємне – стиснено), а коефіцієнт, що характеризує жорсткість матеріалу – через k. У цьому разі закон Гука стверджує, що сила пружності F_e, яка повертає пружину до початкового вигляду, у будь-який момент часу t може бути описана формулою

$$F_e(t) = -kx(t).$$



Одночасно, сучасник і співвітчизник Гука Ньютон знайшов ще більш загальні принципи опису світу, що нас оточує.

Він помітив, що, коли на тіло діє якась сила, то прискорення тіла – величина, що характеризує зміну швидкості тіла – прямо пропорційна силі, що її викликає.

Більше того, він виявив, що, вимірявши також масу тіла, можна точно описати, як сила викликає зміну швидкості тіла: позначивши прискорення тіла через a, його масу – через m, а рівнодійну сил, що діють на тіло в момент часу t – через $F(t)$, другий закон Ньютона можна записати так:

$$F(t) = ma(t).$$

У нашій ситуації єдиною силою, яка діє на пружину в будь-який момент часу, є вищезгадана сила пружності, що намагається відновити її форму. Гравітацію, наприклад, ми можемо просто ігнорувати, оскільки на горизонтальний рух вона не впливає.

Отже, ми можемо записати, що на пружину діє загальна сила $F = F_e$, і, підставивши наведені формули, отримаємо

$$ma(t) = F = F_e = -kx(t).$$

Отже, рух у кожен момент часу t описується рівнянням

$$ma(t) = -kx(t).$$

У цьому рівнянні присутні дві числові константи m і k, які залежать від характеристик тіла; а $a(t)$ і $x(t)$ описують прискорення деформації та величину деформації пружини у кожний момент часу відповідно.

Однак, інтуїтивно цілком зрозуміло, що прискорення одного об'єкта – зміна його швидкості – вже за своїм характером пов'язане з його місцезнаходженням.

Цей зв’язок більш детально пояснюється у розділі про похідну [с. 320]. А саме, прискорення є другою похідною функції, що описує пройдену відстань, або, інакше кажучи, місцезнаходження досліджуваного тіла. Навіть, якщо слово «похідна» здається небезпечним, нічого такого дуже складного в ній немає – перша похідна функції просто показує, наскільки швидко змінюється значення функції, а друга похідна функції показує, наскільки швидко ця зміна змінюється сама. Отже, швидкість, скажімо, є першою похідною відстані, а прискорення – другою похідною.

Отже, наше рівняння говорить, що в будь-який момент прискорення деформації пружини пропорційне самій деформації:

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Ми також можемо розглядати ці рівняння, дані для кожного моменту часу, як одне відношення відразу за весь час – як відношення між залежною від часу функцією та її другою похідною.

Таке рівняння, яке пов'язує функцію та її похідні, гордо називають диференціальним рівнянням – адже диференціювання просто означає знаходження похідної. Їх розв’язування – це не зовсім справа однієї хвилини, але в такому випадку можна все ж справитися, якщо пригадати похідні тригонометричних функцій.

Похідною функції $\sin(t)$ є функція $\cos(t)$, і подібно, похідною функції $\cos(t)$є функція $-\sin(t)$ [с. 251].

Склавши ці відомості докупи, ми бачимо, що другою похідною функції $\sin(t)$ є функція $-\sin(t)$. Отже, вона задовольняє дане диференціальне рівняння, у випадку, коли $\frac{k}{m} = 1$. Ми отримуємо рух, графік якого має красиву синусоїдальну форму з періодом 2π.

Однак, якщо $\frac{k}{m}$ має яке-небудь інше значення, для знаходження відповіді ми мусимо збільшити або зменшити частоту нашої синусоїдальної хвилі.

Виявляється, що в загальному випадку розв’язком рівняння буде функція $\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$.

Тут можна скаржитися ще – адже так само можна переконатися, що розв’язком також буде функція косинус, і до того ж функція, що є сумою косинуса та синуса! Але ж все-таки пружина коливається весь час однаково, а не кількома способами одночасно. Насправді, виявляється, що для однозначного вибору із функцій синус і косинус потрібно зробити ще одне зауваження. А саме, швидкість пружини в момент максимального розтягнення і стиснення дорівнює нулю. Це витікає із закону збереження енергії – у ці моменти вся енергія перетворюється на потенціальну. Якщо взяти до уваги ці знання, вибір функції синус буде вже однозначним.

Ми сподіваємось, що тепер також і найбільш скептичний читач переконався, що для опису періодичного руху пружини чи маятника не підійде який-небудь довільний зиґзаґ чи інша періодична функція. Підійде саме вже відома і знайома нам функція синус.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ВИРАЗИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Мабуть, однією з тем шкільної математики, що породжують найбільше смутку, є перетворення та спрощення тригонометричних формул.

Задається якась послідовність символів і потрібно зробити з цього трохи коротшу послідовність символів. Для того щоб здійснювати перетворення, потрібно користуватися пригоршнею формул, що всі виглядають майже однаково, але щоразу лише одна з них швидко приводить до мети!

От і залишається відчуття, що потрібно займатися якоюсь магією, і зовсім незрозуміло, в чому полягає суть усіх цих зусиль та магії.

Якщо діяльність здається складною і неприємною, то, звичайно, виникнуть запитання із автоматичною захисною позицією: чи, все-таки, це перетворення тригонометричних формул – важлива діяльність? Де це може знадобитися? Чи не можна якось простіше?

Виявляється, що вони – справді необхідні. Уже в цій самій книжці вони нам знадобляться кілька разів. По-перше, ми побачимо приклад використання тригонометричних перетворень у самій математиці: завдяки формулі синуса суми ми зможемо знайти похідну функції синус [с. 251]. По-друге, ми будемо змушені використати перетворення тригонометричних функцій, щоб знайти найкращий кут кидка під час метання водяної бомби [с. 333].

Крім того, перетворення тригонометричних функцій також займає важливе місце в аналізі сигналів. Наприклад, воно допомагає зрозуміти, як все-таки відбувається передача радіосигналів, скажімо, у використанні технології АМ-мовлення.

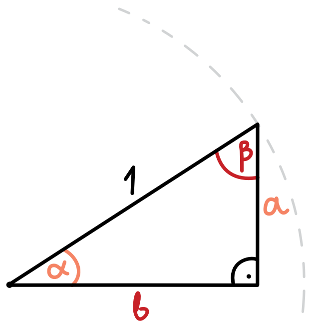
У цій частині ми й хочемо з'ясувати, як добре ладнати з тригонометричними формулами та їх перетвореннями. Початок розділу – досить наочний, але в якийсь момент верх візьмуть формули. До підрозділів, наповнених формулами, ми також попідкидали зірочок, аби нагадати, що під час першого прочитання, можливо, це все дуже приємним не здасться. Утім, нічого дуже складного там немає, всього-на-всього багато символів.

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Із тригонометричними функціями пов'язано дуже багато різних формул та перетворень. Мабуть, найвідоміші та найпростіші з них походять вже з означення синуса і косинуса гострого кута прямокутного трикутника. З них ми й почнемо. Після цього розглянемо формули, пов'язані з чудовими властивостями графіків тригонометричних функцій. І насамкінець пошукаємо різні формули, що допоможуть обчислювати суму та різницю.

СПІВВІДНОШЕННЯ З ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Розглянемо прямокутний трикутник з довжиною гіпотенузи 1 і гострими кутами α і $\beta = 90° - \alpha$: саме з таким ми мали справу в означенні тригонометричних функцій.



Перше співвідношення між тригонометричними функціями ми знайдемо вже тоді, коли подамо довжину катета a двома способами.

По-перше, ми можемо це зробити за допомогою кута α та протилежного катета, отримуючи в результаті $\sin(\alpha)$. По-друге, ми також можемо знайти довжину катета a за допомогою кута β і прилеглого катета, отримуючи $\cos(\beta)$. Оскільки $\beta = 90° - \alpha$, то отримуємо

$$\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha).$$

Друге відоме співвідношення отримуємо із теореми Піфагора. Ми знаємо, що в прямокутному трикутнику сума квадратів довжин катетів дорівнює квадрату довжини гіпотенузи:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Водночас, ми можемо записати:

$$a = \sin(\alpha),$$

$$b = \cos(\alpha),$$

$$c = 1.$$

Підставивши ці значення в теорему Піфагора, отримаємо, що

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

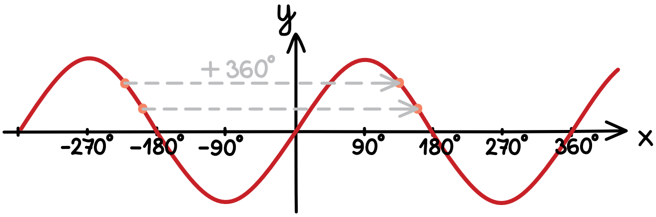
СПІВВІДНОШЕННЯ, ЩО ПОХОДЯТЬ ІЗ ЧУДОВИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГРАФІКІВ

Далі ми розглянемо формули, пов'язані з чудовими властивостями графіків тригонометричних функцій.

Нагадаємо, що перетворення графіка функції і раніше допомагало нам отримати уявлення про функцію – наприклад, незабаром ми побачимо, як за формулою розв'язків квадратного рівняння в певному сенсі насправді ховаються прості геометричні перетворення [с. 278].

У випадку тригонометричних функцій, знову ж таки, перетворення графіків функцій дуже допомагає – а саме, графіки синуса та косинуса є інваріантними відносно кількох геометричних перетворень, тобто, інакше кажучи, переміщуючи та віддзеркалюючи їх відповідно, ми, знову-таки, ще раз отримаємо ті самі графіки. Отже, мислення в межах перетворень допомагає добре пам'ятати формули, пов'язані з функціями синус та косинус.

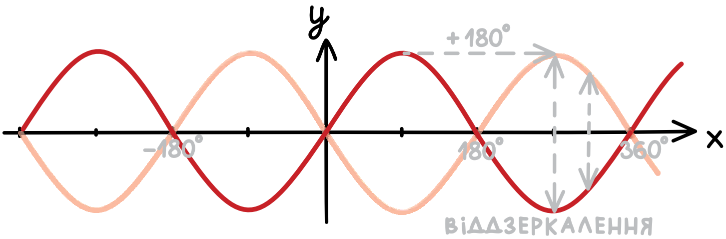
А саме, за допомогою малюнка легко себе переконати, що функція синус періодична – перемістивши її графік на величину кута, що відповідає повному оберту, тобто на $360°$ в тому чи іншому напрямку, знову ж таки, отримаємо той самий графік функції синус.



Звідси випливає, що

$$\sin(\alpha \pm 360°) = \sin(\alpha).$$

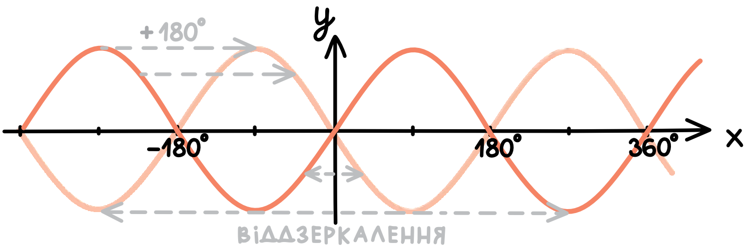
Крім того, функція синус має певну симетрію відносно осі абсцис – перемістивши її графік на величину кута, що відповідає половині повного оберту, тобто на $180°$ в тому чи іншому напрямку, а потім, віддзеркаливши його від осі абсцис, знову отримаємо графік функції синус.



Звідси випливає, що

$$\sin(\alpha \pm 180°) = -\sin(\alpha).$$

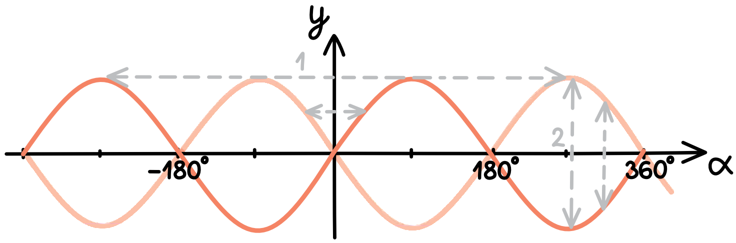
Ще там є певна симетрія також відносно осі ординат – змістивши графік у тому чи іншому напрямку на $180°$, а потім віддзеркаливши його від осі ординат, повернемося до графіка функції синус.



Нагадаємо, що віддзеркалення відносно осі ординат відбувається, якщо аргумент помножити на число -1, а переміщення вправо відбувається, якщо від аргументу відняти (не додати) якусь величину. Наприклад, якщо ми переміщуємо графік вправо, то з цього випливає, що

$$\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha).$$

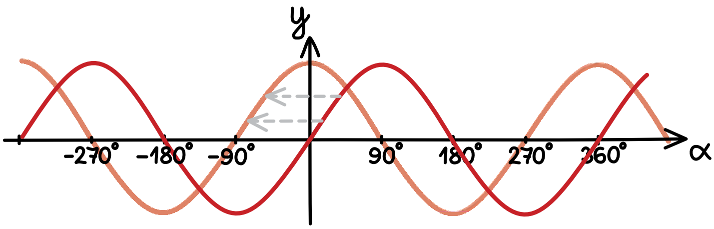
Відобразивши графік функції синуса підряд від вертикальної та горизонтальної осей, знову ж таки, повернемося до графіка функції синус.



Отже,

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha).$$

На додачу до всього, графіки функції синуса та функції косинуса мають однакову форму: змістивши графік функції синус на величину кута, що відповідає чверті повного оберту, тобто на $90°$ вліво, ми отримаємо графік функції косинус.



Звідси випливає, що

$$\sin(\alpha + 90°) = \cos(\alpha).$$

Крім того, звідси, використавши наведену вище властивість $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$, ми ще раз отримаємо встановлене на початку розділу співвідношення:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha).$$

Тепер ми також бачимо, що ця формула є дійсною аж ніяк не лише у випадку гострих кутів, але й для всіх можливих кутів. Душа спокійна, коли все сходиться!

Всі ці властивості насправді потребували б доведень, і ці доведення зовсім не складно написати: необхідно лише витлумачити перетворення графіків функцій як перетворення одиничного кола та використати властивості функцій синус та косинус.

Але для того щоб запам’ятати формули, вистачить лише повірити у ці властивості, адже власне око не обмане!

Аналогічно ми можемо бавитися також і функцією косинуса і, знову-таки, вивести велику кількість формул. Звичайно, їх теж можна було б отримати, використовуючи наведені вище зв’язки між функціями синус і косинус. Деякі з цих формул:

$$\cos(\alpha \pm 360°) = \cos(\alpha),$$
$$\cos(\alpha \pm 180°) = -\cos(\alpha),$$
$$\cos(\alpha + 90°) = -\sin(\alpha).$$

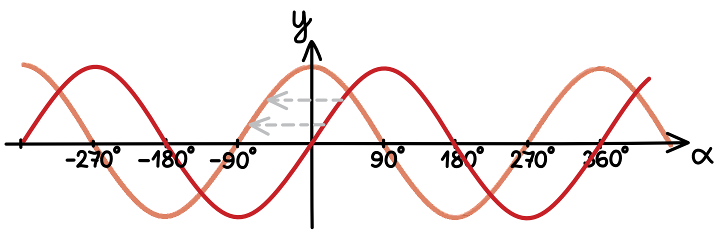
І нарешті, якщо раптом стане дуже цікаво дізнатися про формули для функції тангенс, нам потрібно буде скомбінувати все попереднє із означенням функції тангенс: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Наприклад,

$$\begin{aligned} \tan(\alpha - 90°) &= \frac{\sin(\alpha - 90°)}{\cos(\alpha - 90°)} \\ &= \frac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ &= -\frac{1}{\tan(\alpha)} \\ &= -\cot(\alpha). \end{aligned}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ СУМИ ТА РІЗНИЦІ КУТІВ

У попередньому підрозділі ми побачили, як у результаті ретельного переміщення уздовж осі та дзеркального відображення графіка функції синус, ми, знову ж таки, отримаємо графік функції синус, а іноді – і функції косинус. Однак, чи могли б ми якось описати також і функцію, графіком якої є довільно переміщений графік функції синус?



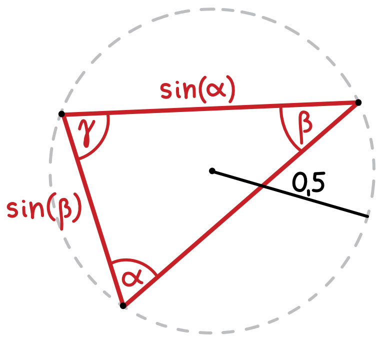
Наприклад, якщо ми перемістимо функцію $\sin(\alpha)$ вліво на β градусів, то отримаємо функцію $\sin(\alpha+\beta)$. Чи можна якось це записати за допомогою основних функцій $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$ і $\cos(\beta)$?

Виявляється, що це можливо. Нагадаємо, що функції синус та косинус дали нам можливість зв'язати кути трикутника із відношеннями сторін. Більше того, довжини катетів прямокутного трикутника з гіпотенузою 1 дорівнюють $\sin(\alpha)$ і $\cos(\alpha)$.

Якби ми хотіли помістити в той самий трикутник як кути α і β, так і сторони з довжинами $\sin(\alpha)$ і $\sin(\beta)$, то мусили б бути лише трішки хитрішими. Спочатку припустимо для спрощення, що кути α та β є гострими – тоді ми безумовно зможемо побудувати трикутник з кутами α і β. Після цього, зможемо знайти протилежні їм сторони a і b за допомогою розширеної теореми синусів [с. 222]:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=2R,$$

де R – радіус описаного навколо трикутника кола. Отже, якщо ми в коло, діаметр якого дорівнює одиниці, впишемо трикутник з кутами α і β, то довжини його сторін, протилежні кутам α і β, будуть дорівнювати $\sin(\alpha)$ та $\sin(\beta)$.



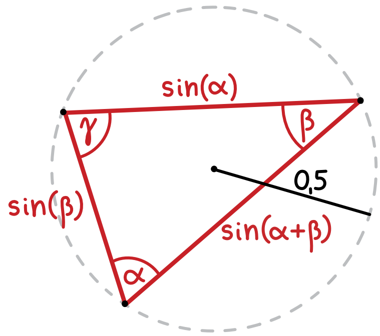
Це вже досить непоганий початок. Однак особливо тішить зауваження, що третій кут трикутника дорівнює

$$\gamma=180°-\alpha-\beta.$$

Тоді, використовуючи одну з формул, наведених вище, одержимо рівність:

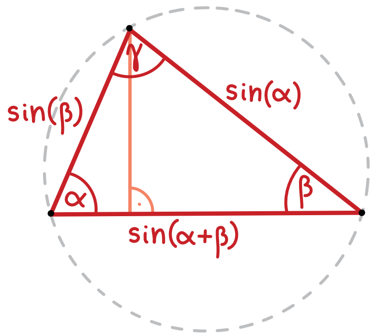
$$\sin(180°-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta).$$

Отож, використавши розширену теорему синусів ще раз, ми бачимо, що довжина третьої сторони трикутника дорівнює $\sin(\alpha+\beta)$. Тепер цілком зрозуміло, що з цього малюнка ми отримуємо красиві формули.

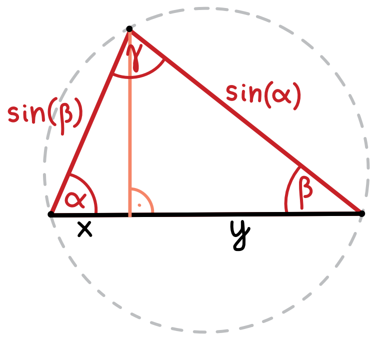


Як і в доведенні теорем синусів та косинусів, бавлячися з тригонометричними функціями, буде гарною ідеєю провести висоту, цього разу – до сторони з довжиною $\sin(\alpha + \beta)$.

Тепер наш трикутник розбито на два прямокутні трикутники, гіпотенуза першого з яких дорівнює $\sin(\alpha)$, а кут при основі – β, а гіпотенуза другого трикутника дорівнює $\sin(\beta)$ і кут при основі – α.



Використовуючи тригонометричні співвідношення між елементами кожного з цих прямокутних трикутників, ми можемо знайти довжину відрізків, на які висота ділить розглядувану сторону трикутника:



Знаходимо довжину відрізка x:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sin(\beta)},$$

звідси

$$x = \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha).$$

Аналогічно можемо знайти також і довжину відрізка y.

Оскільки сума довжин цих відрізків дорівнює довжині самої сторони, то ми отримуємо формулу:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

На цей момент, насправді, ми зробили це лише для гострих кутів α і β, проте використовуючи формули з попереднього підрозділу, читач може переконатися, що формула виконується і для довільних кутів α і β.

Звідси досить легко вивести також і формулу синуса різниці кутів, скориставшись тим, що $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(-\beta) + \cos(\alpha)\sin(-\beta)\\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta),\end{aligned}$$

де у другій рівності ми знову використали формули із попереднього підрозділу.

Після цього знайти формулу для спрощення синуса подвійного кута $\sin(2\alpha)$ ще простіше – підставимо $\beta = \alpha$ у формулу синуса суми:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha + \alpha)\\ &= \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\\ &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).\end{aligned}$$

Тригонометричні формули половинного кута вимагають від нас ще трохи терпіння!

А саме – спочатку ми намагатимемось знайти також і формулу косинуса суми аргументів, тобто розписати $\cos(\alpha + \beta)$ за допомогою $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$.

Ми можемо це зробити, поєднавши кілька вже відомих нам прийомів:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \sin\big(90° - (\alpha + \beta)\big)\\ &= \sin(90° - \alpha - \beta)\\ &= \sin(90° - \alpha)\cos(\beta) - \cos(90° - \alpha)\sin(\beta)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).\end{aligned}$$

Підставивши $\beta = \alpha$, знайдемо також і формулу косинуса подвійного кута:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Якщо ж підставимо $\beta = -\alpha$, то одержимо:

$$\cos(0) = 1 = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha),$$

тобто, інакше кажучи, ми знову отримали зв'язок між функціями синус та косинус, який раніше виводили з теореми Піфагора.

Так само з формули косинуса подвійного кута, легко вивести формули половинного кута: підставивши $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$, ми знайдемо, що

$$\cos(\gamma) = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Тепер, використавши співвідношення, що випливає із теореми Піфагора, ми можемо надати цій формулі двох різних виглядів:

$$\cos(\gamma) = 2\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - 1,$$

$$\cos(\gamma) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Пізніше в нас виникне потреба в цих формулах, щоб знайти похідну функції синус. На додачу, ми можемо використати їх, щоб записати так звані формули половинного кута:

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\gamma)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\gamma)}{2}},$$

причому знак перед квадратним коренем ми повинні вибрати залежно від величини кута $\frac{\gamma}{2}$.

Насамкінець, погляньмо на тангенс. Як завжди, тут у нас немає іншої тактики, окрім як просто використати формули для синуса та косинуса. Тож маємо:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}.$$

Зараз нам вкрай захотілося віднайти серед цієї плутанини функції $\tan(\alpha)$ та $\tan(\beta)$. Для цього ми просто поділимо як знаменник, так і чисельник дробу на добуток $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

Відразу ж отримуємо:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1 - \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}.$$

Отже,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}.$$

Аналогічно ми могли б знайти формули тангенса різниці кутів, тангенса подвійного кута та інші формули, що фігурують у шкільних підручниках. Однак, у цьому місці нам забракло сил.

ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ*

Дотепер ми говорили про те, що відбувається, коли ми виконуємо математичні операції з аргументом тригонометричної функції. Інакше кажучи, ми вивели формули перетворень, скажімо, для синуса суми кутів $\sin(\alpha+\beta)$ або синуса половинного кута $\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

Але ж відразу можна запитати, чи вдасться якось по-іншому записати також і операції з самими функціями.

Наприклад, порівнюючи формули

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta),$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta),$$

ми бачимо, що у разі їх додавання, один член зовсім зникає, і ми отримуємо:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos(\alpha)\cos(\beta).$$

Це ми можемо записати у вигляді:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

або позначивши $\alpha+\beta=\gamma$, $\alpha-\beta=\mu$, також у вигляді

$$\cos(\gamma)+\cos(\mu)=2\cos\left(\frac{1}{2}(\gamma+\mu)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(\gamma-\mu)\right).$$

Це чудово! Ми показали, що добуток косинусів можна представити як суму косинусів, і навпаки. Те саме виконується, звичайно, і для функції синус, а, завдавши собі трохи більше клопоту, ми також знайдемо відповідні формули і для функції тангенс.

Якщо необхідність у всьому цьому на перший погляд також здається сумнівною, то це допоможе, наприклад, краще зрозуміти, як все-таки працює АМ-радіо [с. 259].

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ СИНУС*

Оскільки тригонометричні функції приховані в описі майже кожного періодичного руху, то важливою є також швидкість зміни цих функцій, тобто похідні. Наприклад, нам самим потрібно буде обчислити таку похідну, коли ми почнемо з'ясовувати, як все-таки метнути водяну бомбу якнайдалі [с. 333]. Як уже зазначалося, для знаходження похідних тригонометричних функцій, зручніше користуватися радіанами [с. 234], тому це ми і робимо.

Попередні знання

Для знаходження похідної функції синус (на додачу до розуміння, що таке похідна [с. 320]), нам знадобляться дві виведені раніше тригонометричні формули:

$$1)\ \sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y),$$

$$2)\ \cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Крім того, ми мусимо володіти такими знаннями: якщо аргумент x вимірюється в радіанах, то у випадку дуже маленьких значень аргументу x, значення функції $\sin(x)$ приблизно дорівнюватиме значенню аргумента x. Точніше, буде виконуватися таке співвідношення, у якому йдеться про граничне значення функції [с. 313]:

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Чому це так, ми вже інтуїтивно пояснили в одному з попередніх розділів [с. 99].

Виведення формули для похідної синуса

Тепер ми сміливо приступимо до знаходження похідної функції $\sin(x)$, зважаючи на її означення [с. 321]:

$$\sin'(\mathrm{x}) = \lim_{d\to 0}\frac{\sin(x+d) - \sin(x)}{d}$$

Використовуючи формулу синуса суми, так само ми можемо це записати так:

$$\sin'(\mathrm{x}) = \lim_{d\to 0}\frac{\sin(x)\cdot\cos(d) + \cos(x)\cdot\sin(d) - \sin(x)}{d}.$$

Далі запишемо дріб у вигляді суми двох дробів з тим же знаменником, а оскільки границя суми у будь-яких розумних випадках дорівнює сумі границь, то ми отримаємо:

$$\sin'(\mathrm{x}) = \lim_{d\to 0}\frac{\sin(x)\cdot\cos(d) - \sin(x)}{d} + \lim_{d\to 0}\frac{\cos(x)\cdot\sin(d)}{d}.$$

Далі ми можемо винести з-під знака границі величини, які пов'язані зі змінною x – адже вони не залежать від того, куди ми спрямуємо змінну d:

$$\sin'(\mathrm{x}) = \sin(x) \cdot \lim_{d \to 0} \frac{\cos(d) - 1}{d} + \cos(x) \lim_{d \to 0} \frac{\sin(d)}{d}.$$

Тепер перетворимо перший член, використавши формулу 2), а другий – співвідношення 3). Отримаємо:

$$\sin'(\mathrm{x}) = \sin(x) \lim_{d \to 0} \frac{-2\sin^2\left(\frac{d}{2}\right)}{d} + \cos(x) \cdot 1.$$

Нарешті, ми можемо ще раз для перетворення першого члена використати співвідношення 3), записане цього разу для функції $\sin\left(\frac{d}{2}\right)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}} = 1.$$

Підставивши це у вже знайдений для $\sin'(\mathrm{x})$ вираз, ми побачимо, що перший член цього виразу дорівнює граничному значенню функції – $\sin(x)\sin\left(\frac{d}{2}\right)$:

$$\sin'(\mathrm{x}) = \sin(x) \lim_{d \to 0} \sin\left(\frac{d}{2}\right) + \cos(x).$$

Проте ми знаємо, що функція синус – неперервна, і дорівнює нулю в точці нуль. Отже, виконавши граничний перехід, внаслідок якого сама змінна d перетвориться на нуль, одержимо, що перший член також дорівнює нулю.

Отже, внаслідок граничного переходу збережеться лише другий член, і ми отримаємо

$$\sin'(\mathrm{x}) = \cos(x).$$

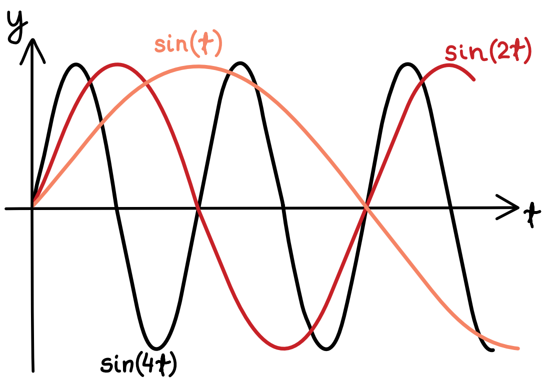
Хух, готово! Похідною функції синус є функція косинус. Фактично, виведення – лише п'ять рядків довжиною, проте, потребувало двох тригонометричних виразів.

ВСЕ КОЛИВАЄТЬСЯ*

Рідко те, що перебуває в стані рівноваги, іноді стає трохи краще, а потім – знову трохи гірше, і так далі. Це гойдання навколо положення рівноваги, що відбувається неодноразово, фізики описують словом коливання. Навколо нас можна помітити багато красивих коливань: гойдалки, маятники, пружини, звуки музики тощо. Для математичного опису коливань ми використовуємо періодичні функції. Функції синус та косинус є, мабуть, найкрасивішими прикладами періодичних функцій. Як ми бачили на прикладі пружинного маятника [с. 236], у якомусь сенсі вони описують найпростіші та найприродніші коливання. Оскільки ці коливання – найпоширеніші та досить красиві, їх також називають гармонічними коливаннями.

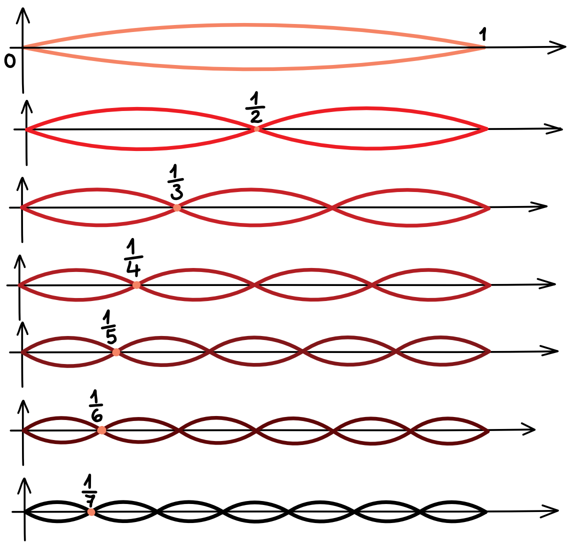
Хоча період тригонометричних функцій $\sin(t)$ та $\cos(t)$ однаковий: рівний 2π, ми також можемо вирішити змінювати кут t швидше чи повільніше, і у такий спосіб описати швидші або повільніші гармонічні коливання. Ми вже пересвідчилися в цьому на прикладі пружини [с. 236], де, залежно від характеристик пружини, одержували швидші або повільніші гармонічні коливання.

Замість функції $\sin(t)$ ми можемо розглядати також функції $\sin(2t)$ або $\sin(4t)$, періоди яких є відповідно у два та чотири рази меншими.

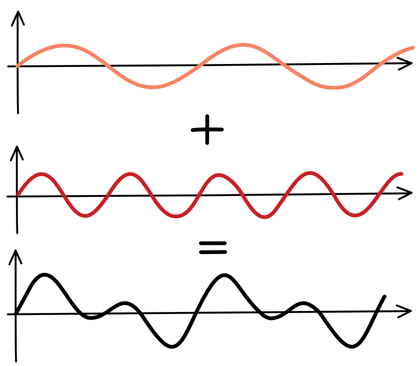


Функції $\sin(nt)$ та $\cos(nt)$, де n є додатним цілим числом, описують функції синусоїдального та косинусоїдального типів, основний період яких кратний довжині відрізка $[0,2\pi]$.

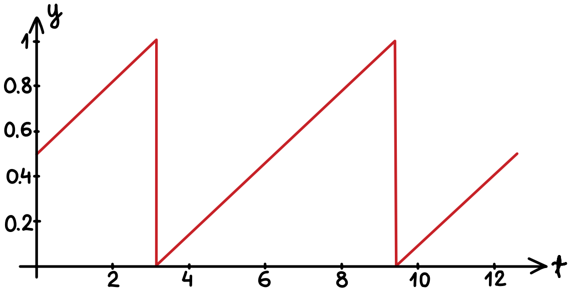
Такі функції описують різноманітні гармонічні коливання, тобто гармоніки, закріпленої з обох кінців струни. Частоти цих коливань (тобто скільки повних періодів вони мають) дають всі частоти простих чистих тонів.



Як ми знаємо з музики, будь-який складний тон, тобто акорд, ми можемо представити як сполучення простих тонів. Так само виявляється, що кожну достатньо красиву періодичну функцію ми насправді можемо подати як суму основних коливань. Звичайно, для подання різних функцій, різні основні коливання слід використовувати різною мірою.



Таке подання періодичних функцій за допомогою гармонік називається аналізом Фур'є. Розглянемо, наприклад, так звану пилкоподібну функцію:

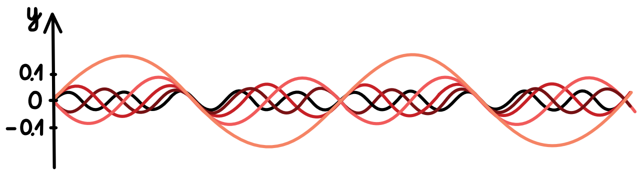


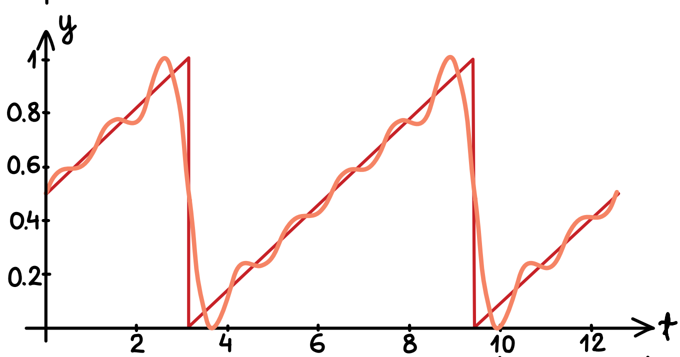
Насторожувати, звісно ж, повинна та обставина, що графік функції має вертикальні відрізки. Отже, складається враження, ніби в точках π, 3π,і так далі, функція має нескінченно багато значень, але як-не-як за означенням функції дозволено мати лише одне значення для кожної точки [с. 64]. І все правильно, але давайте тут трохи схалтуримо, правду кажучи, в цих місцях пилкоподібна функція дорівнює точно $0{,}5$, але це виглядало б набагато гірше.

Ряд Фур'є пилкоподібної функції, тобто подання її у вигляді суми гармонічних коливань, є таким складним утворенням:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt).$$

Як бачимо, повільні коливання потрібно враховувати більшою мірою, ніж швидші – адже коефіцієнт перед синусом постійно зменшується за абсолютною величиною. На наступному малюнку ми, передусім, покажемо п'ять перших графіків синусоїдальних функцій з їх коефіцієнтами. Після цього ми їх додамо, додамо ще $0{,}5$ й отримаємо щось досить схоже на пилку:





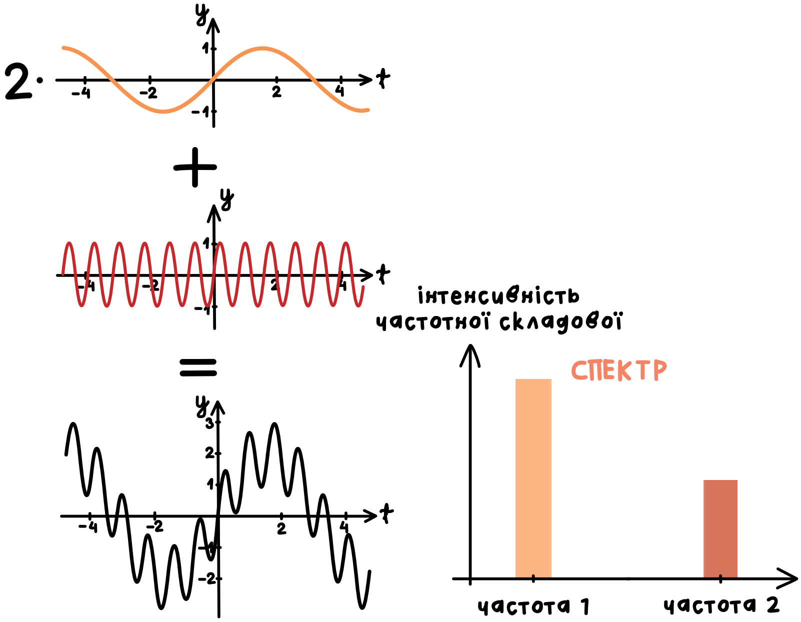
Чим більше синусоїдальних функцій ми додамо, тим більше результат буде схожий на пилку. Як бачимо, наше просте наближення до пилки також не показує, чи бути значенню функції в точці π одиницею чи нулем.

Аналіз Фур'є та спектр

Аналіз Фур'є пропонує хорошу перспективу для вивчення сигналів і процесів. У певному сенсі, аналіз Фур'є змушує працювати аналогове радіо, уможливлює знаходження космічних об'єктів і автоматичне оброблення зображень.

Спрощено, принадність усього цього полягає в тому, що певні сигнали набагато легше зрозуміти, якщо дивитись не на їх розвиток у часі, а лише дізнатися, скільки потрібно використати тих чи інших гармонік для опису сигналу. Часто це єдиний природний погляд. Ряд Фур'є функції можна графічно показати за допомогою так званого спектра: спектр точно показує, наскільки велику частину сигналу утворює той чи інший коливальний елемент.

Наприклад, візьмемо два коливання, одне з нижчою, а друге з вищою частотою. Після цього знайдемо сигнал, у якому амплітуда першого коливання дорівнює двом, а амплітуда другого – одиниці. Вся ця інформація компактно відображена за допомогою спектра, наведеного у правому нижньому куті малюнка.



Звісно, частоти також мають точні числові значення, а частотні складові вказують амплітуду кожного коливання. Але це вже деталі.

Далі ми наведемо ще приклад, коли подання сигналу сумою коливань також може безпосередньо принести користь.

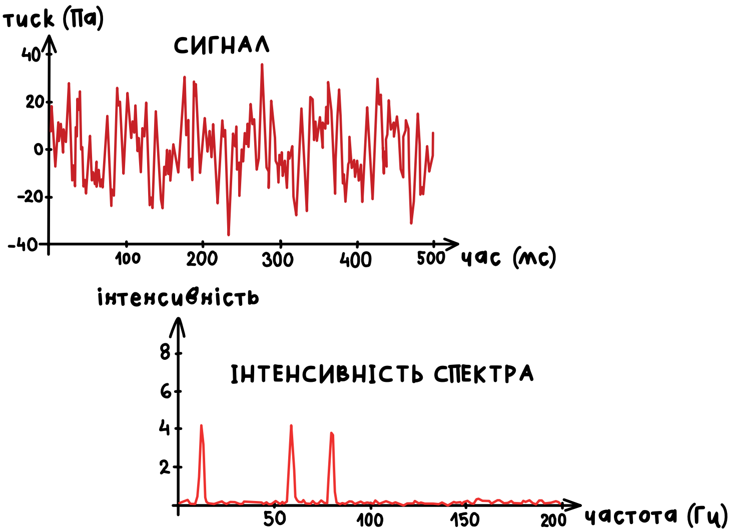
ЯК ЗІ ЗВУКОЗАПИСУ ПРОПАДАЄ ШУМ?

Припустимо, ви вирішили записати другові на день народження своєрідну пісню-привітання. Мікрофон є, комп'ютер – теж, і сам запис так само не викликає жодного занепокоєння.

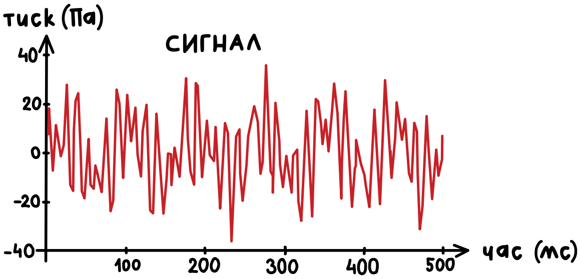
Проте, у записі присутній сильний шум. Чи можливо як-небудь його позбутися?

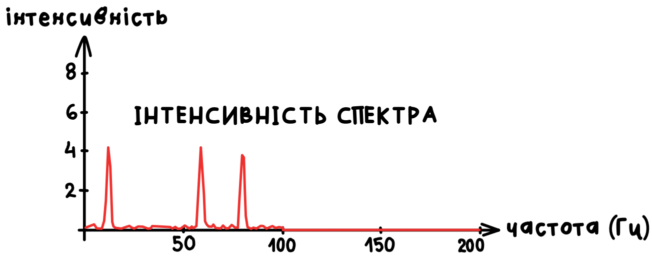
Ключове зауваження полягає в наступному: шум часто пов'язаний, насамперед, із непомірно швидкими коливаннями. Тобто, інакше кажучи, якщо ми поглянемо на наш запис як на ряд Фур'є або як на суму коливань, то там шум записано, значною мірою, складовими із дуже високою частотою.

Оскільки сама пісня, натомість, складається переважно з тонів із набагато меншою частотою, то у ряді Фур'є шум і голос є в певному сенсі розділеними. Ми бачимо це на спектрі, де голосу відповідають насамперед високі піки на графіку спектра ліворуч, а шум – це низька частина праворуч.



Тепер ми можемо геть видалити складову шуму в ряді Фур'є, а решту – знову додати разом. Ми отримаємо новий сигнал, що донесе майже всі коливання, які супроводжують голос, однак більше не міститиме шуму, а отже, звучатиме чистіше. Новий сигнал та його спектр виглядають так:





Приблизно так і працюють цифрові фільтри, наприклад, у програмах для створення музики. Хіба ж не хитро?

АМ-РАДІО

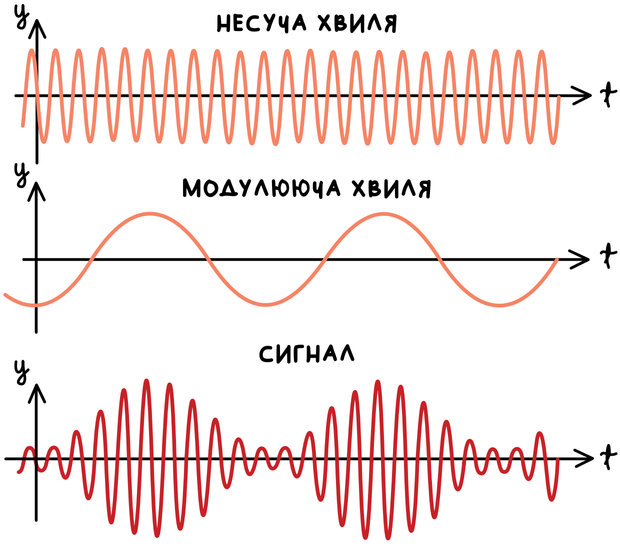
Процес поширення коливань у просторі називається хвилею. Звукові коливання поширюються у вигляді звукових хвиль. У давнину надіслати голосове повідомлення та музику далекому другові було досить складно – звукові хвилі, відправлені з уст, особливо далеко не донесуться.

Хитрий спосіб передати звукові хвилі – перетворити на хвилі електромагнітні і відправити, натомість, їх. Але є там і свої труднощі. Наприклад, відразу ж проблемою буде те, що наш голос і музика мають низькі частоти, і для передачі низькочастотних електромагнітних хвиль, антена має бути довжиною в кілометр! Інша проблема полягає в тому, що можливо, ми захочемо розповсюджувати дуже різний вміст одночасно, і якщо він увесь був записаний на електромагнітних хвилях однакової частоти, то все це між собою перемішається і вийде якесь безладдя. Тому розробити хорошу радіосистему – досить складно.

На щастя, завжди відшукувалися розумники, що знаходили рішення для складних ситуацій. Щоб позбутися зазначених клопотів, радіосигнали почали передавати за допомогою так званої модуляції – низькочастотний вміст записували за допомогою дуже високочастотних хвиль. По-перше, такі хвилі можна відправляти і приймати цілком прийнятною антеною. По-друге, виявляється, що у такий способів ми також можемо паралельно надсилати дуже багато різних сигналів.

Найпростіша з цих технологій є амплітудна модуляція (AM), тісно пов’язана зі спостереженням, що добуток тригонометричних функцій можна представити у вигляді суми тригонометричних функцій і навпаки. Водночас, амплітудна модуляція означає не що інше, як те, що амплітуду однієї хвилі змінюють за допомогою іншої хвилі. Отже, інформація записується на початковій хвилі.

Спрощено можна сказати, що радіосигнал $y(t)$, який відсилається передавачем, складається з однієї несучої хвилі з високою частотою ω_k. Коли ми хочемо прив’язати до неї інформацію, то змінюємо амплітуду несучої хвилі за допомогою якої-небудь хвилі з нижчою частотою.



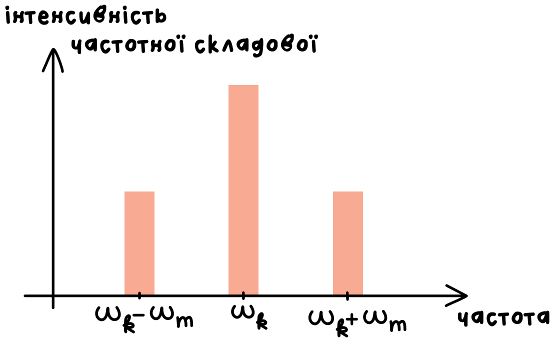
Наприклад, якщо несуча хвиля рухається з частотою ω_k, і її амплітуда змінюється за допомогою косинусової хвилі з частотою ω_m, то сигнал може мати вигляд:

$$y(t) = (1 + \cos(\omega_m t))\cos(\omega_k t).$$

Оскільки ми можемо записати добуток тригонометричних функцій у вигляді суми тригонометричних функцій [с. 250], то можемо, водночас, розглядати сигнал як комбінацію окремих хвиль:

$$y(t) = \cos(\omega_k t) + \frac{1}{2}\cos((\omega_m + \omega_k)t) + \frac{1}{2}\cos((\omega_m - \omega_k)t).$$

Інакше кажучи, наш сигнал складається із суми трьох хвиль: несучої та двох додаткових хвиль. Частотне представлення коливань, прихованих за цими хвилями, тобто спектр, буде тоді таким:



Ці додаткові хвилі або додаткові коливання можна тепер відділити в приймачі, застосувавши аналіз Фур'є [с. 257], зовсім як і у випадку з відділенням шумів. Отже, це дасть змогу нам прочитати сигнал, доданий до несучої хвилі!

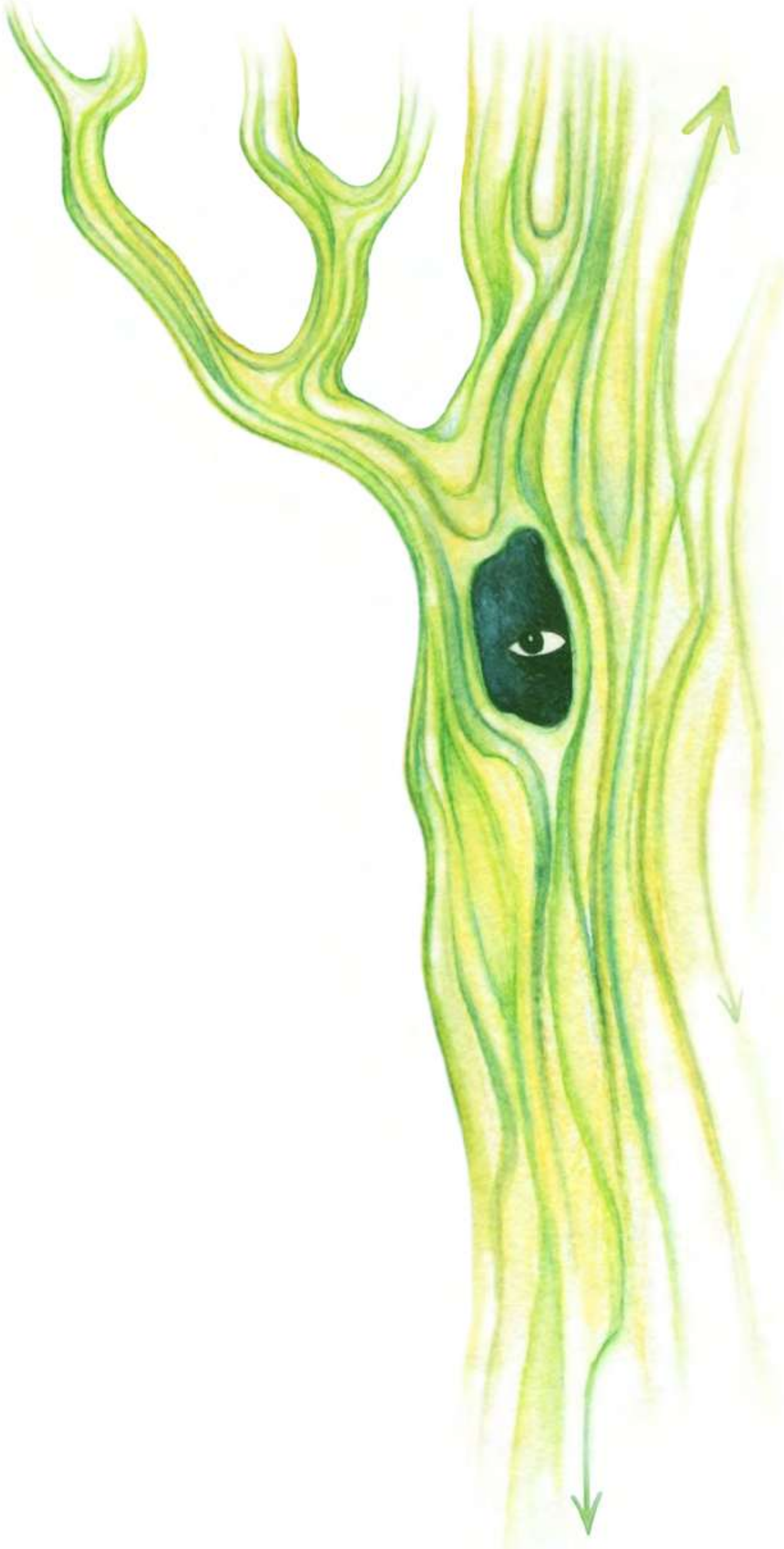
Крім того, якщо наша несуча хвиля має частоту, наприклад, 1000 кГц, а контентом є сигнал з частотою, меншою 5 кГц, то весь сигнал, тобто всі використані складові хвилі, помістяться між 995 кГц і 1005 кГц. Отож, вже на несучій хвилі з частотою 1020 кГц, ми сміливо могли б паралельно передавати сигнал з іншим контентом – використані хвилі не перекривалися б, і у приймачі їх можна було б благополучно окремо зчитати.

Звісно, вміст, що його додають до несучої хвилі, переважно набагато складніший, ніж одна крихітна хвиля, і на додачу, він змінюється ще й із часом, проте принцип залишається незмінним: у передавачі інформація додається за допомогою зміни амплітуди несучої хвилі, а у приймачі сигнал отримується, знову ж таки, за допомогою поділу на складові.

Наш опис був швидким і неточним, але якщо вам цікаво, дізнайтеся більше, це – досить захоплююче! Правду кажучи, АМ-радіо – це, звичайно, досить застаріла технологія. Сьогодні частіше користуються так званим FM-радіо, де змінюється не амплітуда несучої хвилі, а, натомість, частота. І вже найближчим часом, мабуть, повсюди відбудеться перехід до цифрової передачі сигналів. Але, на жаль, це виходить за межі нашої книги.

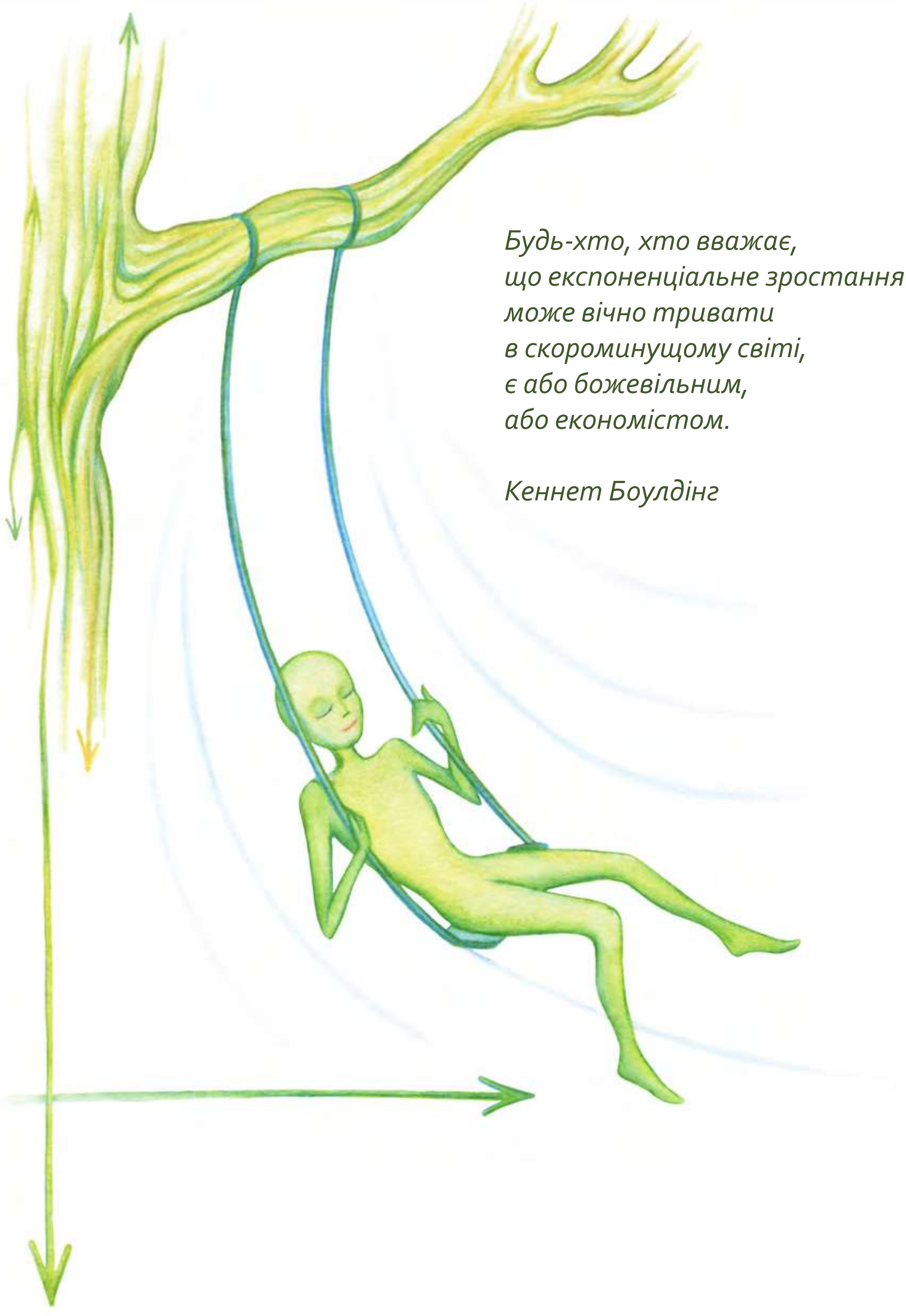
ЧАСТИНА 6 –

ВАЖЛИВІ ФУНКЦІЇ



Будь-хто, хто вважає,
що експоненціальне зростання
може вічно тривати
в скороминущому світі,
є або божевільним,
або економістом.

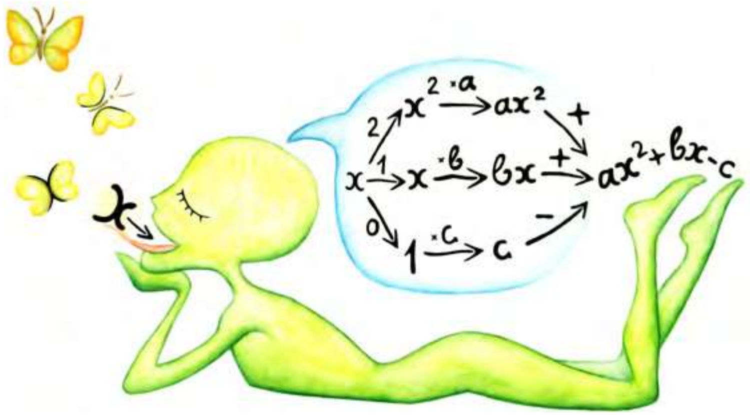
Кеннет Боулдінг



МНОГОЧЛЕН

Многочлен – складне слово, але не варто дозволяти йому тебе залякати – інколи за ще страшнішими словами ховаються просто чудові хлопчиська: наприклад, трубадур чи сейсмолог. У випадку з многочленами ми маємо справу з деякими простими та добре вивченими функціями.

Многочлен може виконувати із вхідними числами лише звичайнісінькі операції: він може піднести їх до різних степенів, що є натуральними числами; може помножити їх на якесь число (коефіцієнт), а потім додавати та віднімати отримані результати. Отож – дуже доброзичливий хлопчина.

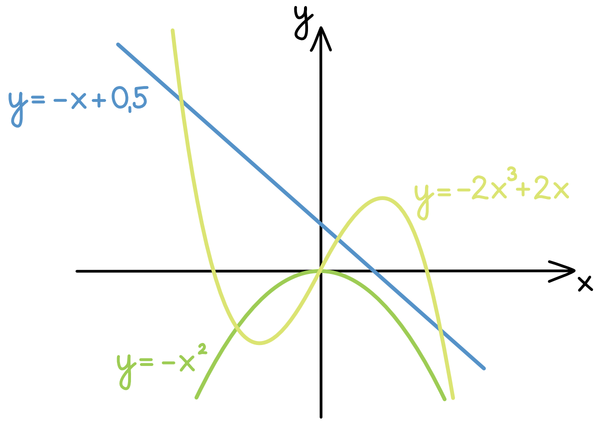


Коли говорять про многочлени над полем дійсних чисел, то тоді як вхідні числа, так і коефіцієнти та отриманий результат є дійсними числами. Наприклад, усі наведені нижче функції є многочленами над полем дійсних чисел:

$$y = 3x^2 + 7x - 10$$
$$y = 6x$$
$$y = 2x^5 + 0{,}49x^3 - 4x^2 - 100.$$

Як і дах на будинку, многочлен завжди супроводжує його степінь. Тут просто мається на увазі найбільший з усіх степенів, до яких піднесено змінну. Наприклад, перший із наведених многочленів є многочленом другого степеня, тобто квадратичною функцією, другий – многочленом першого степеня, тобто лінійною функцією, а третій – многочленом п’ятого степеня.

Степінь многочлена є важливим, оскільки він визначає, скільки вигинів може максимально бути на графіку многочлена – у лінійної функції їх узагалі немає, у квадратичної функції є один, у кубічної функції – до двох і так далі.



ВЛАСТИВОСТІ

Чи вірите ви, що, якщо додати або перемножити два многочлени, то результатом, знову ж таки, буде многочлен?

Ця властивість хороша і корисна тому, що тепер ми завжди можемо сміливо додавати, віднімати і множити многочлени, і нам не доведеться боятися, що попереду чекатиме якась жахлива функція, обчислення якої може бути нам не під силу.

Перевіримо ці властивості на таких многочленах: $3x^2 + 3$ і $x^4 - 2x^2$. Позначимо перший многочлен через $p(x)$, а другий – через $q(x)$. Додаючи, віднімаючи і перемножуючи їх, ми отримаємо три нових многочлени:

$$\mathrm{p}(x) + q(x) = x^4 + x^2 + 3$$
$$p(x) - q(x) = -x^4 + 5x^2 + 3$$
$$p(x) \cdot q(x) = 3x^6 - 3x^4 - 6x^2.$$

Другою хорошою властивістю є плавні й приємні графіки многочленів – їх графіки можна намалювати за допомогою однієї лінії, тобто вони є неперервними. Про поняття та важливість неперервності можна почитати в розділі про неперервність [с. 317].

По-третє, многочлени також дружні щодо двох операцій, що застосовують до функцій дійсної змінної. Перша операція називається похідною – фактично, похідна показує швидкість зміни функції [с. 320]. Друга називається інтегралом, і вона характеризує, скажімо, площу, яка виникає між графіком функції та віссю абсцис [с. 340]. Виявляється, що застосувавши ці операції до многочленів, отримаємо, знову ж таки, многочлени.

- Похідною многочлена є многочлен, степінь якого менша на одиницю.
- Невизначеним інтегралом многочлена є многочлен, степінь якого більша на одиницю.

Сімейство многочленів є досить замкненим – майже все важливе, що з ними можна зробити, у результаті знову дасть многочлен.

ЧОМУ МНОГОЧЛЕНИ ТАКІ ВАЖЛИВІ?

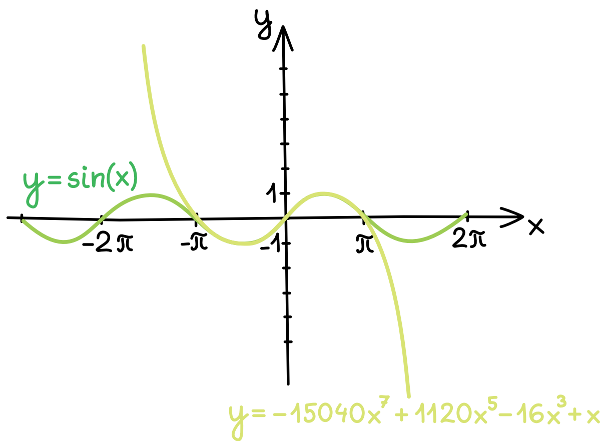
Завдяки простоті операцій, які визначають многочлени, їх просто описати, з ними просто обходитися, їх значення просто знайти як людині, так і комп'ютеру.

Водночас, незважаючи на всю цю простоту, вони – персонажі з неймовірно широким розмахом: для якої завгодно іншої (наприклад, неперервної) функції завжди знайдеться многочлен, який виглядатиме настільки на неї схожим, що їх можна буде сплутати, навіть розглядаючи з лупою.

Наприклад, многочлен

$$y = -15040x^7 + 1120x^5 - 16x^3 + x$$

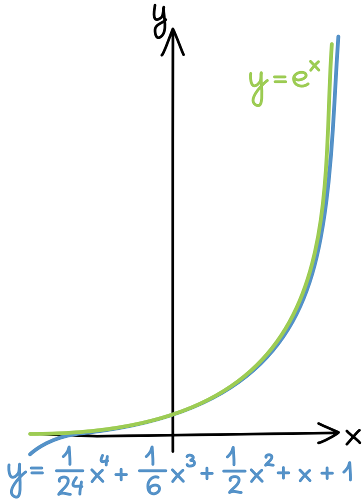
на відрізку від $-\pi$ до π виглядає майже так само, як функція синус [с. 214]:



а многочлен

$$y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

в околі нуля непогано описує експоненту $y = e^x$.



Той факт, що інші функції ми можемо так легко сплутати з многочленами, означає, що у реальному житті та під час обчислень ми не раз зможемо мати справу лише з функціями, які є многочленами – ми зможемо добре з ними справлятися, і водночас, вони дадуть нам достатньо корисної інформації щодо того, що відбувається насправді.

На прикрість читача, ми можемо прямо відкрити одну таємницю: навіть якщо ви накажете своєму калькулятору знайти логарифм, цей негідник обчислить лише значення многочлена, але він зімітує потрібну функцію настільки хитро та добре, що зрозуміти це, зважаючи на точність калькулятора, буде неможливо. Комп'ютери й використовують для всіх своїх обчислень лише многочлени.

НУЛІ МНОГОЧЛЕНА ТА ЗАПИС ЙОГО У ЗРУЧНОМУ ФОРМАТІ

Важливим ключовим поняттям для многочлена є нулі многочлена: числа, за яких значення многочлена дорівнює нулю.

Виявляється, за їх допомогою многочлен можна подати в дуже зручному вигляді: якщо ми знаємо, що нулями многочлена $P(x)$ є числа $r_1, r_2, \dots, r_n$, то многочлен $P(x)$ можна записати у вигляді

$$P(x) = c \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n),$$

де c – дійсне число.

Наприклад, у випадку квадратичної функції $x^2 + 3x + 2$, ми отримаємо

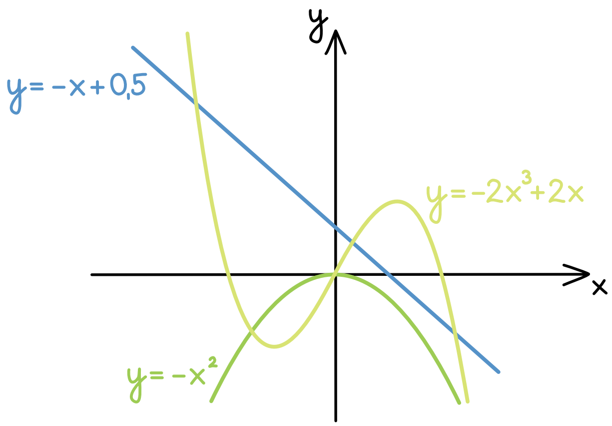
$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2),$$

у чому й полягають усі веселощі від розкладання на множники і всіляких перетворень, які ретельно вивчають у школі, задля подання функцій у більш зручному вигляді.

Може виникнути питання, чому нас повинні цікавити саме нулі, а не, наприклад, «трійки» – місця, де значення многочлена дорівнюватиме трьом. Правду кажучи, відповідь зовсім проста: просто результат, який отримаємо у випадку нуля, є найбільш компактним, а нулі залишаться на місці, навіть якщо функцію помножити на деяке дійсне число.

На додачу, якщо ми вміємо знаходити нулі, то, щоб знайти «трійки», нам потрібно буде відняти від многочлена трійку і знайти нулі отриманого многочлена.

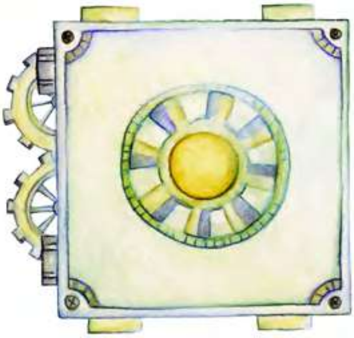
Ми можемо показати, що якщо степінь многочлена дорівнює n, то в нього не може бути більше, ніж n нулів (або «трійок»). Цей результат можна інтуїтивно зрозуміти, якщо припустити, що лінійна функція не має жодного вигину, квадратична функція має один вигин, кубічна функція має максимум два вигини, і аналогічно многочлен степеня n має максимум $n - 1$ вигин. Для того щоб після певного нуля знову повернутися за допомогою многочлена до наступного нуля, нам завжди знадобиться один вигин, а значить, за допомогою $n - 1$ вигинів ми зможемо досягти нуля максимум n раз.



З усього цього можна зробити хитрий висновок, що, якщо два многочлени степеня n рівні в $n + 1$-й точці, то тоді вони будуть рівними абсолютно скрізь (для доведення потрібно просто дослідити многочлен, отриманий за допомогою віднімання цих двох многочленів). У цього дивовижного твердження є застосування і в реальному житті.

ЯК УТРЬОХ ЗАХОВАТИ СПІЛЬНИЙ СКАРБ?

Припустимо, що під час подорожі, повної пригод, ви з друзями знайшли славну кількість діамантів і вирішили заховати цілісіньку здобич у сейф на п'ять років. Тобто, для того, звісно, щоб спочатку добре обдумати, що робити з усім скарбом.



У вас також є надсучасний сейф із 9-цифровим секретним кодом, щоб покласти діаманти у схованку. Але, як упевнитися, що сейф ви зможете відкрити лише разом утрьох? Чудовим помічником виявиться тут знання многочленів, особливо одне додаткове зауваження – многочлен степеня n однозначно визначається $n+1$ точкою, які лежать на ньому.

Отже, якщо дано, наприклад, квадратичний многочлен x^2+ax+b, то, щойно ми дізнаємось про три розташовані на ньому точки, то фактично дізнаємось про всі точки на многочлені. Проте знання двох довільних точок многочлена дуже багато про нього не розкаже.

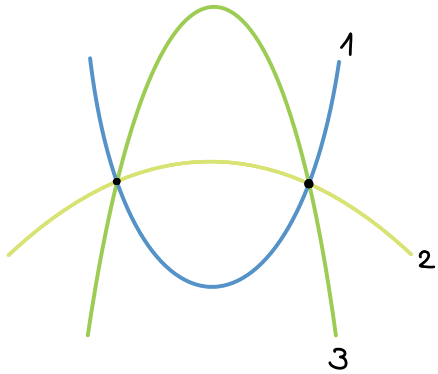
Ідея є тепер зрозумілою: ви дозволяєте комп'ютеру вигадати будь-який довільний многочлен, і з цього многочлена видати кожному рівно одну точку. Секретним кодом може бути послідовність, що складається із записаних підряд значень цього многочлена в точках -1,0 і 2.

Наприклад, якщо таємним многочленом виявиться функція

$$y = x^2 - 36x + 308,$$

то секретним кодом буде послідовність 345308240, адже значення функції, наприклад в точці -1, дорівнює $-1^2 - 36 \cdot (-1) + 308 = 345$ і так далі.

Якщо друг Март отримає точку (1;273), друг Антс – точку (20; -12), а ви самі – точку (9;65), то, як бачимо з графіка, удвох в Марта та Антса буде небагато надії на правильну відповідь: у них, власне, не буде причин надати більшу перевагу жодній комбінації, оскільки дві точки про можливий многочлен майже нічого не кажуть.



Уважний читач міг би посперечатися, чому не можна було вирішити цю ситуацію відчутно простіше: просто давши кожному другові три цифри секретного коду. Це – дійсно можливо, проте тоді код мусив би бути набагато довшим, бо у протилежному випадку, двоє друзів можуть зібратися разом, а невідомі цифри третього друга просто підібрати, що у випадку попереднього рішення було б неможливо.

КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН ТА ЙОГО КОРЕНІ

Квадратична функція або, іншими словами, квадратний тричлен, є, мабуть, найпопулярнішою та найбільш досліджуваною у шкільні роки функцією.

Цю популярність також можна трохи пояснити: вона дуже поширена (може, пам'ятаєте з фізики залежність переміщення від часу для рівноприскореного руху?), її досить легко записати й намалювати, і водночас, для знаходження нулів квадратичної функції маємо нібито складну, на перший погляд, формулу, якою можна нажахати учнів. Чи не так?

Почнемо знайомство із квадратичною функцією з її графіка та покажемо, як всякі-різні квадратичні функції пов'язані між собою через прості геометричні перетворення. Після цього, ми знайдемо формулу коренів квадратного тричлена і надамо їй геометричну інтерпретацію.

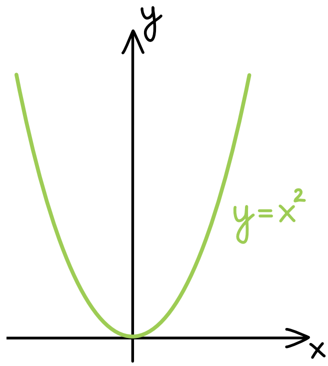
ГРАФІК КВАДРАТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Щойно ми накреслили графік якоїсь функції, можемо почати з нею бавитися. Наприклад, ми можемо змістити цей графік і віддзеркалити його від різних прямих.

Хоча це завжди весело, іноді з цієї процедури можна отримати й вигоду. Наприклад, за допомогою цих перетворень ми можемо запам'ятати формули тригонометричних перетворень [с. 242]. У випадку квадратичної функції, за допомогою таких геометричних перетворень, ми можемо з однієї початкової функції отримати майже всі інші квадратичні функції і, як ми побачимо пізніше, навіть знайти формулу розв’язків квадратного рівняння.

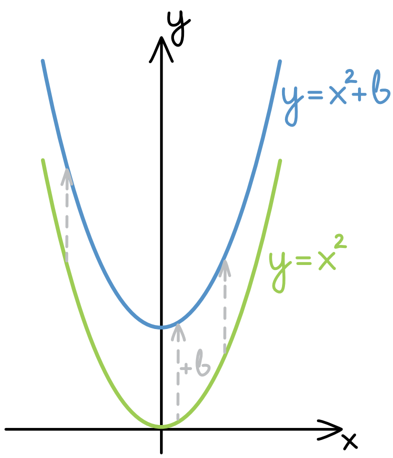
Почнемо з квадратичної функції

$$y = f(x) = x^2.$$



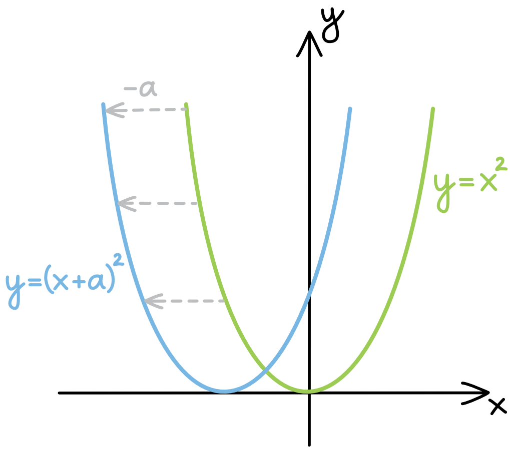
Переміщаючи її графік вгору-вниз, отримаємо графіки функцій виду

$$f(x) + b = x^2 + b$$



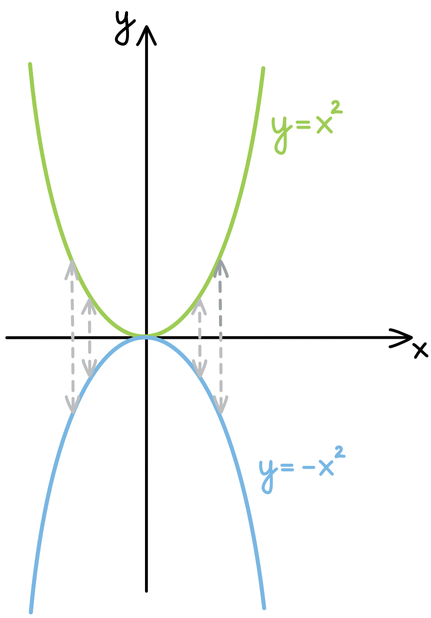
Проте, змістивши графік початкової функції горизонтально, – тобто, інакше кажучи, змістивши відносно неї вісь абсцис – отримаємо всі функції виду

$$f(x+a) = (x+a)^2.$$



Тепер, якщо ми віддзеркалимо графік початкової функції відносно осі абсцис, то отримаємо графік функції

$$-f(x) = -x^2$$



Однак, віддзеркаливши початкову функцію від осі ординат, ми не отримаємо нічого цікавого – графік нашої функції симетричний відносно осі ординат і після відбиття залишиться незмінним.

Усі ці перетворення, звісно, можна також виконати підряд, і, комбінуючи їх, ми знайшли б графіки усіх функцій виду

$$y(x) = \pm x^2 + ax + b$$

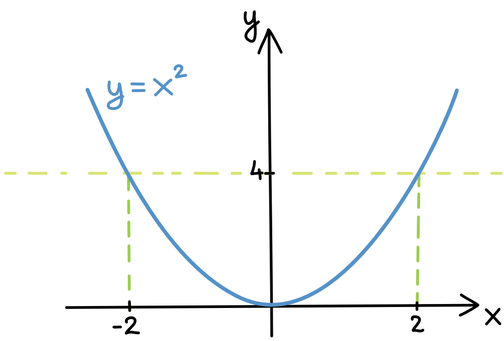
Якщо ми хочемо дійти до квадратичної функції цілком загального виду, то на додачу мусили б також дозволити масштабування осі ординат.

Незабаром ми побачимо, що такі геометричні міркування дають також уявлення про те, звідки виникають формули коренів квадратного тричлена. Однак, перед цим ми розв’яжемо квадратне рівняння суто алгебраїчно.

ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА

Формула коренів квадратного тричлена може залишатися дещо містичною, оскільки часто немає часу вивести її як слід. Насправді в цій формулі немає нічого страшного, якщо знайдеться бажання трішки поміркувати. Ми обіцяємо, що це не займе більше часу, ніж забрало б з’їсти велике вершкове морозиво, а морозиво ми теж обіцяємо захопити. Спробуємо тоді вивести формулу крок за кроком.

Найпростішим рівнянням, що може трапитися, є, звісно, $x^2 + c = 0$, тобто $x^2 = -c$. У цьому випадку – адже знаходити квадратний корінь [с. 111] ми уміємо добре – розв’язками рівняння будуть числа $\pm\sqrt{-c}\pm$. Важливо зазначити, що знак мінус перед с аж ніяк не означає, що нам відразу ж потрібно буде мати справу з від’ємним числом. Наприклад, якщо $c = -4$, то ми отримаємо рівняння $x^2 - 4 = 0$, і розв’язками будуть $\pm\sqrt{-(-4)} = \pm\sqrt{4}$, тобто 2 і -2.



Труднощів не обіцяє також і рівняння $a \cdot x^2 + c = 0$, оскільки в такому випадку, ми можемо просто поділити обидві частини рівняння на a, і аналогічно до попереднього випадку прийдемо до відповіді $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Але що відбудеться, якщо приєднається член $b \cdot x$, тобто якщо квадратне рівняння матиме вигляд $x^2 + bx + c = 0$? Нагадуємо, що розв'язати рівняння, як і раніше, означає знайти відповідь у вигляді

$$x = \text{якась формула}$$

параметрами якої є коефіцієнти даного рівняння .

Однак рівняння у загальній формі містить також і квадрат невідомої величини x. Ми раніше позбувалися його, добуваючи квадратний корінь, і, чесно кажучи, для того, щоб позбутися квадрата, жодного іншого прийому й не існує. Отож, цього разу ми також хочемо добути квадратний корінь. Але з чого?

Ми вміємо добре добувати квадратний корінь лише із виразів, які є квадратами. У першому випадку у нас був простий квадратний вираз x^2, але цього разу тут трапився bx. Як його позбутися?

Варто просто примітити, що насправді ми можемо добути квадратний корінь не тільки з x^2, але й, наприклад, із $(x+4)^2$ або $(x-1)^2$.

Це допоможе, оскільки $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$ дає нам також член зі змінною x! Отже, ми зможемо красиво добути квадратний корінь із виразу $x^2 + 8x + 16$.

$$\sqrt{x^2 + 8x + 16} = \sqrt{(x+4)^2} = x + 4.$$

Отже, для обчислення кореня, потрібно знайти в дужки для змінної x правильного супутника, який після множення дасть член bx.

Нагадаємо формулу квадрата двочлена:

$$(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2.$$

Якщо тепер взяти $k = \frac{b}{2}$, то за x таки буде бажаний коефіцієнт b:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}.$$

Це вже виглядає майже як наше початкове рівняння $x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Єдиною відмінністю у формулі, наведеній вище, є лише один зайвий член $\frac{b^2}{4}$, а член c, натомість, відсутній.

Отже, щоб записати початкову квадратичну функцію, ми просто мусимо відняти від квадрата $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ зайвий вираз $\frac{b^2}{4}$ і додати c:

$$x^2 + b \cdot x + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c.$$

Отже, наше рівняння $x^2 + b \cdot x + c = 0$ отримує вигляд:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0.$$

П'ята частина учасників – вже по інший бік, і ми займаємо дуже добру позицію для ривка:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}-c.$$

Тут ми можемо добути квадратний корінь і отримати відповідь:

$$x+\frac{b}{2}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$$

отже,

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}.$$

Формула розв’язків зведеного квадратного рівняння у нас в руках!

Якщо попереду x^2 все ще стоїть коефіцієнт a, ми повинні просто поділити b і c на a, і прийдемо до щойно розглянутої ситуації. Отже, отримаємо формулу розв'язків квадратного рівняння у загальній формі $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}},$$

що часто записують також у вигляді:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

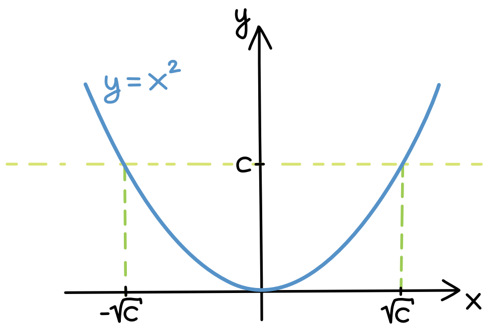
Перевірте, що останнє перетворення також правильне!

За допомогою цієї формули можна розв’язати будь-яке квадратне рівняння. Наприклад, якщо вчитель дасть нам квадратне рівняння $x^2-3x-10=0$, ми можемо дістати свою формулу, підставити туди $a=1$, $b=-3$ та $c=-10$, і у відповідь отримаємо розв’язки -2 та 5.

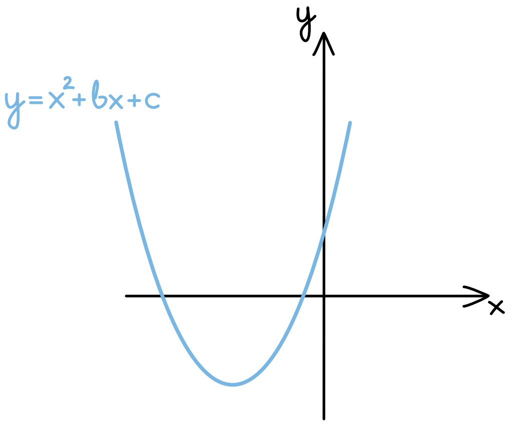
ПРО ФОРМУЛУ РОЗВ'ЯЗКІВ ГЕОМЕТРИЧНО

Ми обіцяли, що для знаходження коренів квадратного тричлена можна міркувати також геометрично. Оскільки насправді формула розв'язків квадратного рівняння в нас уже знайдена, то, звичайно, в якомусь сенсі, це – марна праця. Утім наступні міркування допоможуть підкріпити різні етапи знаходження формули розв'язків квадратного рівняння, а отже, і саму формулу розв'язків, геометричною інтуїцією, і так, можливо, допоможе запам'ятати формулу та її виведення.

Насамперед зауважимо, що розв'язати квадратне рівняння $x^2 = c$ означає знайти абсциси точок перетину графіків функцій $y = x^2$ та $y = c$ з геометричною точністю. Ми, звісно, можемо це зробити, обчисливши квадратний корінь, і відповіддю буде $x_{1,2} = \pm\sqrt{c}$.



Розв'язати квадратне рівняння $x^2 + bx + c = 0$, яке має майже загальну форму, у свою чергу, означає, звісно, знайти точки перетину квадратичної функції $y = x^2 + bx + c$ та осі абсцис.

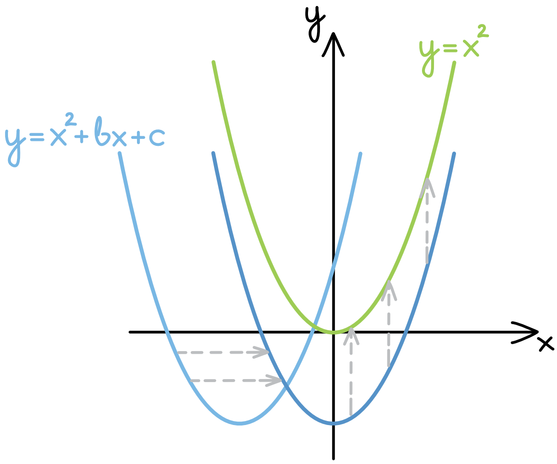


Метою цілої низки перетворень, що знадобилися для знаходження формули коренів квадратного тричлена, було звести другу ситуацію до першої, тобто звести знаходження точок перетину у більш складнішому випадку до знаходження точок перетину в простішому випадку. У певному сенсі це означає, що ми хочемо графік нашої довільної квадратичної функції перетворити на графік квадратичної функції $y = x^2$.

Для цього, найперше, перемістимо графік функції горизонтально на $\frac{b}{2}$ (додатний напрямок – вправо), аби він був симетричним відносно осі ординат.

Після цього перемістимо графік $\frac{b^2}{4} - c$ вертикально (додатний напрямок – вгору) аби сумістити найнижчу точку графіка з початком системи координат.

Так, за допомогою двох перетворень ми отримаємо графік функції $y = x^2$.



Що ми можемо сказати про розв'язки початкового квадратного рівняння? Якщо раніше вони визначалися точками перетину прямої $y = 0$ та початкової квадратичної функції, то в процесі перетворень ми, по-перше, горизонтально змістили ці точки перетину на $\frac{b}{2}$, а після цього – підняли на $\frac{b^2}{4} - c$.

Після цих перетворень точки, які визначали розв'язки початкового рівняння, стали точками перетину функції $y = x^2$ та прямої $y = \frac{b^2}{4} - c$.

Однак абсциси цих точок перетину дорівнюють $\pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

Оскільки вертикальні переміщення вгору-вниз абсциси точок не змінюють, то ми ще маємо врахувати тільки горизонтальне зміщення. Нові точки перетину зміщено на $\frac{b}{2}$ відносно початкових, отож для знаходження абсцис початкових точок перетину, ми мусимо відняти ще $\frac{b}{2}$.

Тож ще раз отримуємо очікувану відповідь: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} - \frac{b}{2}$.

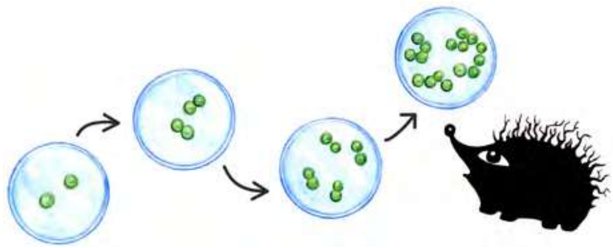
Однак, цього разу обидва члени мають також і першопричину: перший походить від такого переміщення функції вгору-вниз, щоб її графік точно сидів на горизонтальній осі. Другий член виникає в результаті горизонтального переміщення, яке зробило графік функції симетричним відносно вертикальної осі.

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ

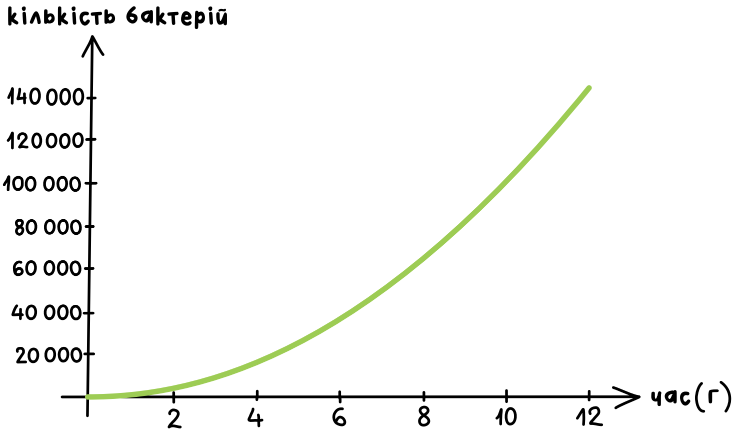
Коли яка-небудь небезпечна бактерія потрапляє в організм, то передчуття щодо цього можна на початку і не отримати, оскільки не кожне сімейство бактерій починає одразу ж спричиняти хворобу, а іноді вичікує ще кілька годин. Чому так?

А саме, одній або двом, або навіть тисячі бактерій немає сенсу починати наносити шкоду та виділяти отруйні речовини, оскільки у відповідь на це імунна система негайно вишле свою вірну армію і знешкодить їх.

Отож, бактерії розмножуються тихо, поки їх не стане достатньо багато, і тільки після цього вони починають робити шкоду. У такому випадку, імунна система вже у скруті. Розмноження не займає у бактерій особливо багато часу, оскільки в ідеальних умовах кожна бактерія ділиться надвоє приблизно через кожні пів години.



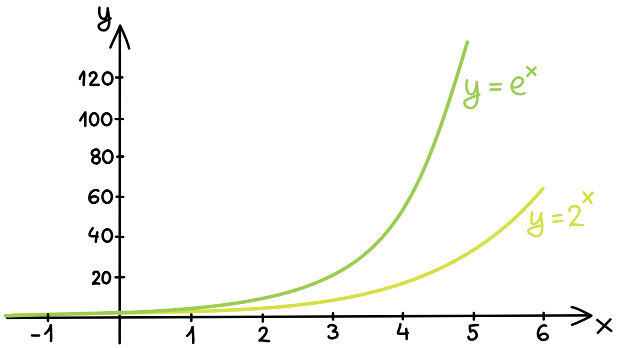
Наслідком цього є дуже швидке зростання! Наприклад, якщо дозволити бактеріям жити в ідеальних умовах, то протягом наступних годин їхня кількість зростатиме так:



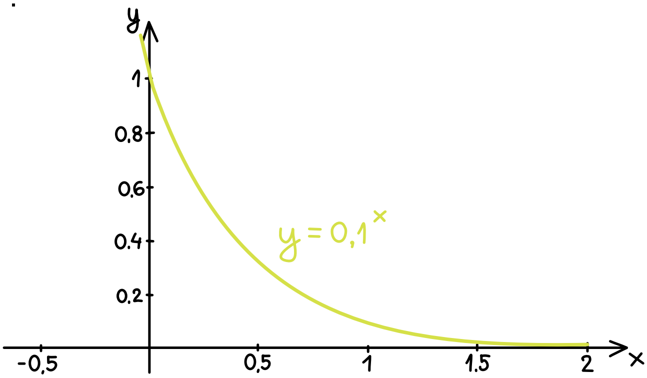
Уже за пів дня із кількох тисяч вийде більше ніж сто тисяч! Виявляється, що отриманий графік точно описує одну красиву та важливу функцію: показникову функцію. І хоча в шлунку немає ідеальних умов для росту бактерій, цього все одно вистачить, аби нагнати достатньо страху – навіть маленька сім'я згубних бактерій є також небезпечною!

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ ТА ПІДНЕСЕННЯ ДО СТЕПЕНЯ

Показникові функції – це, наприклад, функції $y = 2^x$ або $y = e^x$, де змінна x може бути яким завгодно дійсним числом.



Основа показникової функції може так само бути меншою від одиниці, наприклад $y = 0{,}1^x$.

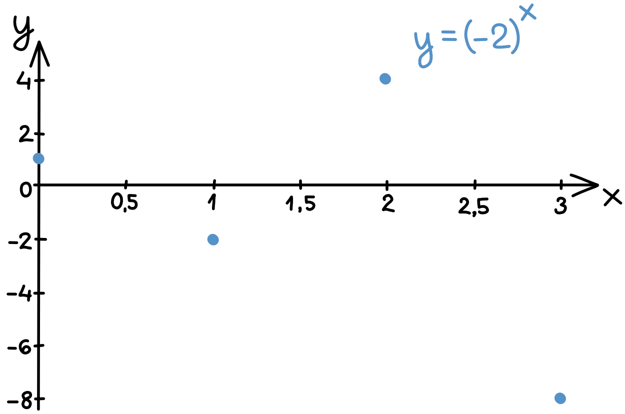


Загальна форма показникової функції має вигляд a^x, де a є додатним дійсним числом. Часто в підручниках також додають умову, що $a \neq 1$. Це просто для того, аби виключити сталу функцію $y = 1$. Іноді додають ще й коефіцієнт: показниковими функціями також вважаються функції виду $b \cdot a^x$, де b є довільним дійсним числом.

Те, чому a повинно бути додатним, найкраще пояснює одне з можливих означень показникової функції: в образі показникової функції ми не маємо справи з чимось більшим, ніж розширенням поняття степеня до степеня з ірраціональним показником, а від основи степеня ми вимагаємо також, щоб він був додатним [с. 110].

Це розширення є точним аналогом розширення множини раціональних чисел до множини дійсних чисел: необхідно просто заповнити крихітні-прекрихітні дірки, що залишились на графіку. Строго кажучи, це означає додавання цих граничних значень до множини раціональних чисел [с. 313]. Але у випадку від'ємної основи степеня графік був би стрибкоподібним, і говорити про заповнення яких-небудь дірок і не йшлося.

Направду, як ми пам'ятаємо з розділу про степені, у випадку від'ємної основи, клопіт виникає вже після переходу від степенів з цілими показниками до степенів з раціональними показниками – аби надати зміст виразу $(-1)^{0.5} = \sqrt{-1}$, нам і взагалі довелося вводити комплексні числа [с. 89]. Одним словом, від'ємні основи ми залишаємо поза грою.



Показникову функцію також можна визначити по-різному. Наприклад, показникову функцію із основою e можна визначити за допомогою виразу, що нагадує многочлен:

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}.$$

Основи цієї формули ми трохи роз'яснили в розділі про «красиві числа» [с. 106].

ВЛАСТИВОСТІ ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ

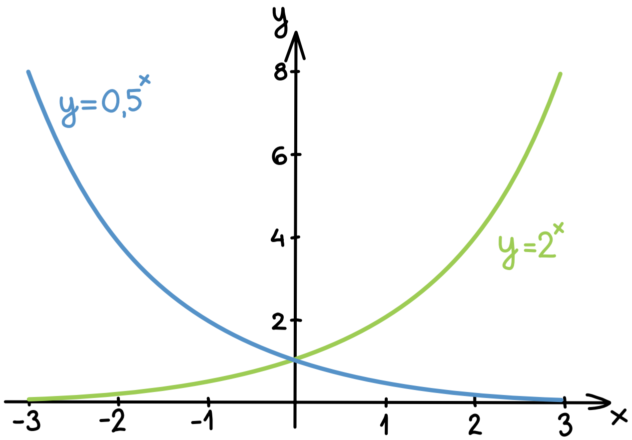
Показникова функція a^x визначена для всіх дійсних чисел, тобто її областю визначення є множина дійсних чисел. Її графік – красивий і неперервний, тобто його можна намалювати, не відриваючи олівець від паперу.

Вигляд показникової функції залежить від її основи.

- Якщо основа a є більшою за одиницю, то функція a^x – зростаюча.
- Якщо основа a знаходиться між нулем та одиницею, то маємо справу зі спадною функцією.
- Якщо основа – одиниця, то ми маємо справу зі сталою функцією, яку часто до показникових функції навіть не зараховують, оскільки вона і не зростає і не спадає.
- Нарешті, як ми вже згадували, у випадку від'ємної основи показникову функцію визначити неможливо.

Виявляється, що те, чи є основа більшою чи меншою, ніж одиниця, у певному сенсі, не змінює сутності показникової функції, а змінює лише її напрямок.

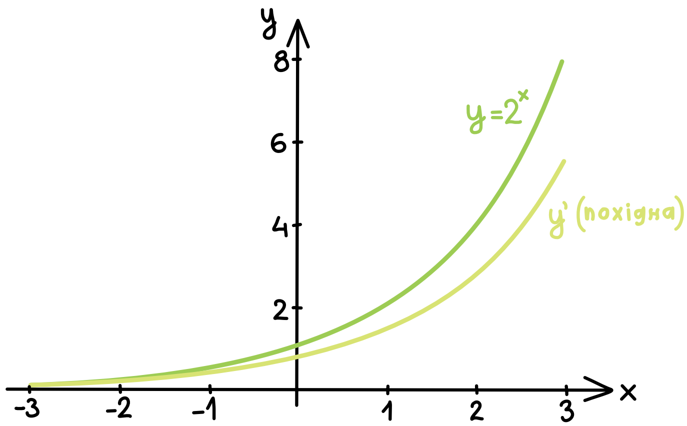
А саме, графіки показникових функцій, основами яких є взаємно обернені числа (наприклад, основи 2 та $\frac{1}{2}$), є дзеркальними відображеннями один одного відносно осі ординат. Одна з цих показникових функцій зростає від нуля до нескінченності, а у друга – навпаки спадає.



Чому це повинно бути так, побачити не дуже важко: адже ми знаємо, що $\frac{1}{a} = a^{-1}$, а отже $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, що саме і є функцією a^x, коли її читають у від'ємному напрямку.

Множину значень показникової функції a^x формують усі додатні дійсні числа. Іншими словами, для кожного додатного дійсного числа b існує таке число x, що $a^x = b$. У цьому можна легко переконатися, лише поглянувши на графік – графік неперервний, з одного боку наближається до нуля, з іншого боку – лине до нескінченності. Йдеться про важливу властивість, що дасть нам пізніше можливість визначити функцію, обернену до показникової, – логарифмічну функцію [с. 290].

Вивчаючи графік показникової функції, ми бачимо, що у випадку більшої, ніж одиниця, основи, вона зростає все швидше і швидше. Виявляється, що швидкість зростання показникової функції, тобто похідна [с. 320], також зростає все швидше і швидше, а також це відбувається і з її прискорення і так далі.



Швидкість зростання функції показує її похідна. Виявляється, що для знаходження похідної показникової функції a^x, функцію потрібно помножити лише на деяку константу, що є дійсним числом: тобто похідна функції a^x дорівнює $b \cdot a^x$, де значення константи b залежить від значення a. Цей факт можна трактувати так: миттєвий ріст показникової функції завжди пропорційний самому значенню функції. Це вважається важливим під час інтерпретації процесів зростання.

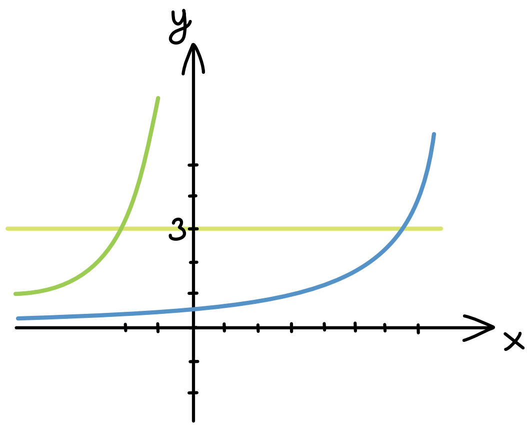
На кожному відрізку однієї й тієї ж довжини показникова функція зростає в одну й ту саму кількість разів. Справді, наприклад, для одиничного відрізка маємо: $\frac{a^{x+1}}{a^x} = a$ для кожного дійсного числа x.

Більш загально можна вважати, що показникова функція перетворює суму в добуток. Це – насправді вже відома властивість, що стосується піднесення до степеня: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Цю властивість, насправді, можна використати для означення показникової функції: це єдина неперервна функція на множині дійсних чисел, яка перетворює суму в добуток, тобто для якої справджується тотожність $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ З РІЗНИМИ ОСНОВАМИ

Ми вже бачили, що поведінка показникової функції a^x залежить від її основи a. Але цікаво, що насправді, ми можемо записати всі показникові функції з однією і тією ж самою основою – для цього, ми мусимо просто змінити показник степеня.

Наприклад, функцію 4^x ми можемо записати з основою 2 як функцію 2^{2x}, так і з основою 16 – як функцію $16^{0,5x}$, адже з одного боку $4 = 2^2$, а з другого – $4 = \sqrt{16} = 16^{0,5}$. Більш загально, якщо ми хочемо описати функцію a^x з основою b, то мусимо просто знайти таке число c, що $b^c = a$. Це можливо у випадку будь-якого додатного дійсного числа a, оскільки множиною значень показникової функції є всі додатні дійсні числа.



Отже, ми можемо записати: $a^x = (b^c)^x = b^{cx}$.

Подання функцій у вигляді степенів з однаковою основою веде до спрощення, оскільки так їх простіше порівнювати – наприклад, було б досить важко сказати, яка функція зростає швидше: $5^{0,5x}$ чи $3^{0,8x}$. Залишається питання – яку спільну основу вибрати.

Іноді використовується основа 10 із десяткової системи, яка говорить про збільшення вдесятеро, іноді – основа 2, яка говорить про подвоєння. Однак найчастіше основою показникової функції обирають красиве число e [с. 102]. Функція e^x, у певному сенсі, дає найбільш природний процес зростання: в цьому випадку миттєва швидкість зростання величини завжди дорівнює значенню величини, тобто мовою функцій: похідна функції e^x у будь-якій точці x дорівнює e^x [с. 320].

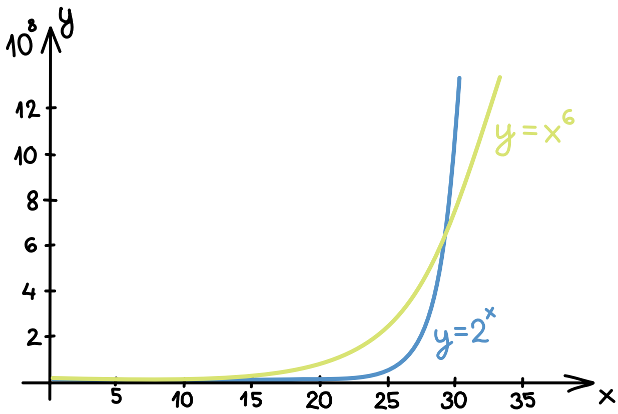
У випадку всіх інших показникових функцій для знаходження похідної нам потрібно помножити саму функцію ще на так званий натуральний логарифм основи функції [с. 295]. Наприклад, похідна функції 2^x дорівнює $\log_e 2 \cdot 2^x$. На додачу, як ми бачили в розділі про відомі числа [с. 102], процес, який описується функцією e^x, має також красиву інтерпретацію – йдеться про процес, який описує прибутковість банківського депозиту зі 100-відсотковою річною ставкою, у якому відсотки нараховуються і додаються до вкладу безперервно, щомиті.

Оскільки основа e робить зручними як обчислення, так і інтерпретації, то зазвичай експоненціально зростаючі процеси подають у вигляді be^{ax}, а експоненціально спадні – у вигляді be^{-ax}, де в обох випадках a є додатним дійсним числом. Тоді b позначає тут початкову кількість, а a характеризує швидкість зростання.

ЗРОСТАЮЧІ ТА СПАДНІ ПРОЦЕСИ

Показникову функцію найкраще розглядати як певний тип дуже швидкого зростання чи спадання, з часом. Як ми бачили, у випадку експоненціального зростання у будь-який момент швидкість зростання – пропорційна самій кількості або величині. Саме через це воно також описує розширення колонії бактерій – адже швидкість росту колонії в будь-який момент залежить точно від того, скільки бактерій діляться в цю мить, тобто насправді, від розміру самої колонії.

Експоненціальне зростання є більш швидким, ніж будь-яке степеневе зростання.

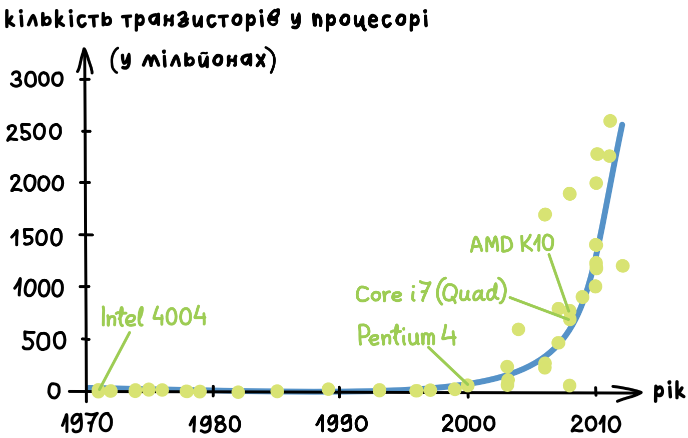


ЗРОСТАННЯ ШВИДКОСТІ КОМП'ЮТЕРІВ Є ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМ

Транзистор – лячне слово, і справді, за ним ховається потужний пристрій. Транзистори використовуються для генерації, посилення, перетворення та перемикання електричних сигналів. На транзисторах базується вся електроніка, а також вони є обчислювальними компонентами комп'ютерних процесорів.

Кількість транзисторів у комп'ютері визначає його швидкість – те, скільки операцій він здатний виконати за одиницю часу. Потужність комп'ютерів швидко зростає, кількість транзисторів у процесорі подвоюється приблизно кожні два роки.

Інакше кажучи, приблизно через кожні два роки, комп'ютер стає удвічі потужнішим:



Цю закономірність уперше помітив Гордон Е. Мур, співзасновник Intel, виробника комп'ютерних процесорів, уже в 1965 році. Тож закономірність іноді називають також законом Мура. Щоб проілюструвати швидкість зростання, сам Мур використав таку аналогію: якби автомобільна промисловість розвивалася так само швидко, як електронна промисловість, то на сьогодні авто могло б проїхати мільйон кілометрів на літрі бензину, і було б дешевше авто списати, ніж припаркувати його в центрі міста на одну годину.

Графік трохи складно прочитати, оскільки здається, що всі перші точки видаються практично нульовими. Це саме через дуже швидке, експоненціальне зростання. Виявляється, що в цьому випадку було б розумно представити вісь ординат, так би мовити, логарифмічно, де одиниці змінюються не через додавання, а множення. Ми покажемо корисність цього прийому в наступному розділі [с. 299].

Але деякі комп'ютерні програми все ще залишаються повільними

Оскільки швидкість комп'ютера подвоюється кожні два роки, то можна вважати, що, яку б складну роботу ми комп'ютеру не дали б, все одно, рано чи пізно, це – лише хвилинне питання.

Однак, ситуація не є такою простою. А саме, багато задач, які можна розв'язати за допомогою комп'ютера, вимагають алгоритму, що виконується за експоненціальний час: це означає, що кожного разу, коли розмір вхідних даних збільшується на одну одиницю, час роботи комп'ютерної програми зростає в певну кількість разів. Наприклад, час роботи програми для кожного додавання елемента в набір даних може збільшуватися удвічі – у цьому випадку, затрати часу опише функція $2^{(\text{довжина даних})}$, і навіть якщо для довжини вхідних даних, рівній 10, потрібно 10 секунд обчислювального часу, то вхідні дані, довжиною 40, потребуватимуть вже 340 років. Але для розв'язання реальних проблем іноді потрібно оперувати вхідними даними, розмір яких дорівнює тисячі або навіть мільйону.

Хоча закон Мура про швидкість процесорів – досить вражаючий, із теперішніми турботами він не справиться. А саме: припустимо, що витрати часу на обчислення і справді описує показникова функція $2^{(\text{довжина даних})}$. У цьому випадку, навіть збільшення вдвічі кількості транзисторів справді означало б збільшення удвічі кількості обчислень за одиницю часу, а отже, виконуючи обчислення на одному комп'ютері, через кожні два роки ми змогли б збільшувати розмір даних лише на одиницю!

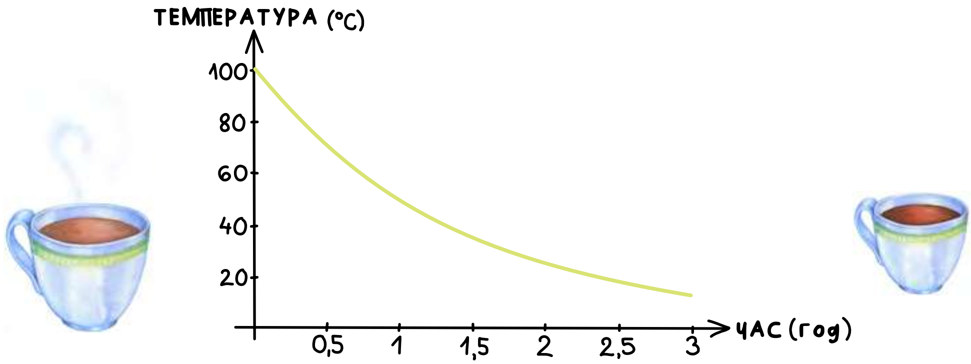
Зважаючи на це, з комп'ютерними програмами не можна бути, як раніше, легковажними – потрібно шукати хороші та ефективні способи створення комп'ютерів, а написання таких хороших програм є однією з основних цілей сучасної інформатики.

ВИРІВНЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРИ

Ви щойно налили собі чашку кави і, почавши відразу ж пити, точно обпекли б собі язик та губи. На щастя, це не страшно. Виявляється, що охолодження кави відбувається з експоненціальною швидкістю, тобто, як ми вже бачили, – дуже швидко.

А саме вже Ньютон помітив зі своїх спостережень, що, якщо помістити одне менше тіло у велике зовнішнє середовище, швидкість зміни температури цього меншого тіла пропорційна різниці температур між зовнішнім середовищем та тілом. Однак, як ми вже знаємо, це означає саме те, що вирівнювання температури описується показниковою функцією. Отже, якщо на початку, менший об'єкт є теплішим за зовнішнє середовище, то зменшення різниці температур добре описує процес експоненціального спадання у вигляді $\Delta T = \Delta T_0 \cdot e^{-at}$, де t позначає час, а ΔT_0 – це просто початкова різниця температур.

Якщо ви хочете точно спрогнозувати, наскільки швидко, все-таки, охолоне кава, то спочатку буде потрібно провести деякі досліди, за допомогою яких ви визначите константу a, яка залежить від властивостей самої кави, а також, наприклад, чашки.



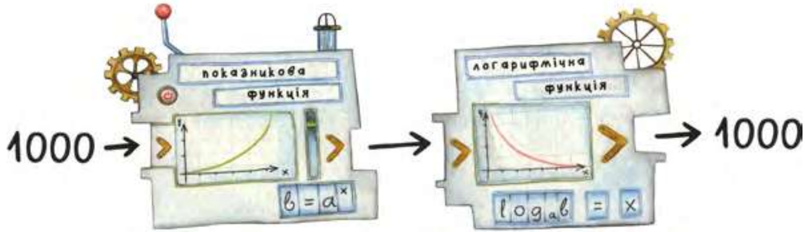
Надалі – принаймні у випадку тієї самої кави та тієї самої чашки – потрібно щоранку вимірювати лише температуру кави та приміщення. Після цього зможете точно передбачити, скільки часу пройде, поки кава стане комфортної температури. Буде природно запитати: якою мірою ці прогнози будуть істинними та якою мірою вони відрізнятимуться для зеленого чаю, гарячих пиріжків та інакших, скажімо, більших та менших горняток? Чесно кажучи, ми точно не знаємо: для зеленого чаю нічого особливо змінитися не повинно, але історія з пиріжками є вже більш сумнівною.

Далі можна ще обдумати, як вчинити, якщо до кави ви додасте також і молока. Як ви вважаєте, після 15 хвилин холоднішою буде кава, до якої відразу додали трохи молока, чи кава, до якої ви додали молока лише тоді, коли 15 хвилин проминуло? Відповідь можна вияснити за допомогою закону Ньютона та деяких додаткових припущень, або просто експериментуючи.

Звичайно, прогнози не завжди є точними на сто відсотків – насправді процес теплопередачі є набагато складнішим, і як завжди, закон Ньютона є спрощеним описом, що виконується лише частково. Однак, те, що класична фізика та трішки простої математики допомагають прояснити та передбачити повсякденні ситуації – просто чудово.

ЛОГАРИФМ

Логарифм є оберненою функцією до показникової [с. 69], тобто, інакше кажучи, якщо спочатку застосувати, наприклад, до числа 1000 показникову функцію з певною основою, а потім до результату – логарифмічну функцію з тією ж основою, то знову ж таки, отримаємо те саме число – 1000.



Інтуїтивно, це означає таке. Нагадаємо, що за допомогою показникової функції ми описуємо зростаючі величини. Задавши їй певний момент часу, у відповідь отримаємо значення зростаючої величини на цей момент. Однак, логарифм відповідає на протилежне питання: скільки часу потрібно, щоб процес експоненціального зростання сягнув тієї чи іншої величини?

Наприклад, припустимо, що ви кладете свої накопичені 1000 євро в банк на депозит, і банк щороку сплачує 5% річних.

Оскільки з кожним роком, сума збільшується у $1{,}05$ раза, ми можемо описати зростання суми за допомогою показникової функції:

через x років у нас буде $1{,}05^x \cdot 1000$ євро.

Але логарифм відповідає на питання, скільки років пройде, поки ця початкова сума не зросте до $10\ 000$ євро, тобто поки сума не стане вдесятеро більшою. Інакши кажучи, логарифм запитує про таке значення змінної x, для якого

$$1{,}05^x \cdot 1000 = 10000,$$

тобто

$$1{,}05^x = 10.$$

Математичною мовою відповідь можна записати так:

$$x = \log_{1{,}05}(10).$$

До речі, це $47{,}2$ років ...

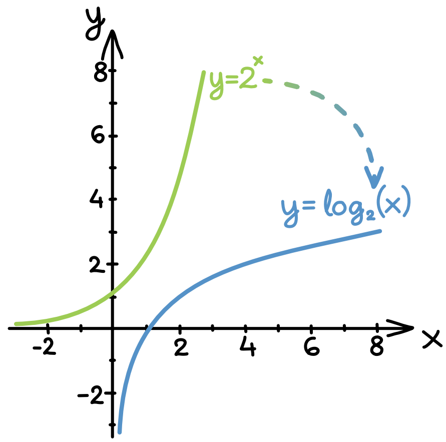
ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ

Припустимо, нам дано деяку основу $a > 0$, $a \neq 1$ як і у випадку показникової функції. Якщо $a^y = x$, то тоді ми запишемо $\log_a(x) = y$ і прочитаємо, що логарифм числа x за основою a дорівнює y. Три символи підряд! Наприклад, оскільки $2^5 = 32$, то $\log_2(32) = 5$, тобто логарифм числа 32 за основою 2 дорівнює 5.

Логарифмічну функцію з основою a ми тепер отримаємо, коли розглянемо число x як незалежну змінну функції. Звичайно, не відразу є цілком ясно, що, все-таки, за звір ця логарифмічна функція, і для яких значень вона взагалі визначена.

Мабуть, краще міркувати геометрично. А саме, оскільки логарифмічна функція є оберненою функцією до показникової, то її можна описати за допомогою графіка самої показникової функції.

Якщо ми накреслимо на координатній площині графік показникової функції $y = a^x$, то отримаємо логарифмічну функцію з основою a тоді, коли просто поміняємо місцями осі абсцис та ординат. Як ми вже бачили, про це можна також міркувати як про віддзеркалення графіка показникової функції від прямої $y = x$.



З графіка ми бачимо, що логарифмічна функція визначена лише для всіх додатних дійсних чисел – причиною, звісно ж, є те, що значеннями показникової функції можуть бути лише додатні числа.

Може виникнути також й інше питання: чому ми наполягали, що основа a повинна бути додатною? Відповідь випливає з попереднього розділу: сама показникова функція, визначеною лише у випадку додатних основ. Адже, як відомо, з від'ємними основами виникли проблеми: наприклад, в межах дійсних чисел ми не можемо обчислити квадратний корінь із числа -4, тобто піднести його до степеня $0{,}5$. Це таки можливо, увівши комплексні числа [с. 89], але наразі ми хотіли б, щоб наші функції як приймали на вході, так і видавали на виході лише дійсні числа.

ЛОГАРИФМ: МАТЕМАТИЧНА ОПЕРАЦІЯ ЧИ ФУНКЦІЯ?

Окрім функції, логарифм деколи трапляється також і в контексті математичних операцій – тоді говорять про логарифмування. Спочатку це може здатися несподіваним, але часто деякий математичний об'єкт або перетворення можна розглядати кількома способами.

Наприклад, піднесення до степеня ми також можемо розглядати як математичну операцію або як функцію. Про степінь як математичну операцію йшлося у розділі «Степінь числа» – ми взяли число a і число b і визначили число a^b – за двома числамил a і b ми побудували ще одне – третє. Однак у попередньому розділі ми зафіксували основу степеня a і говорили, натомість, про показникову функцію a^x – машину, що отримує на вході дійсні числа і навзамін видає додатні дійсні числа.

Так само ми можемо міркувати про логарифм як про математичну операцію: якщо ми візьмемо додатне дійсне число a як основу для логарифма та деяке число b, то можемо визначити логарифм $\log_a(b)$. Але щойно ми вирішили зафіксувати якусь основу, наприклад два, то зможемо розглянути функцію $y = \log_2(x)$.

Звичайно, приклади не обмежуються лише піднесенням до степеня та логарифмуванням, читач може переконатися, що про додавання, наприклад, ми також можемо міркувати як у межах математичних операцій, так і в межах функцій. Така гнучкість цілком притаманна математиці – чим більше поглядів, тим більше можливостей.

У цьому розділі ми також розглянемо логарифм як з першого, так і з іншого погляду.

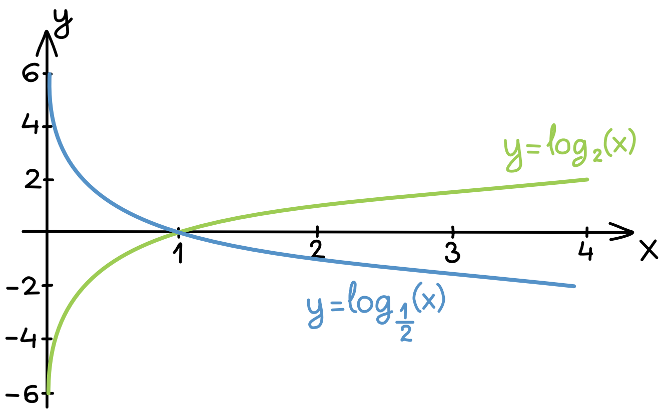
ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Мабуть, найголовнішою властивістю логарифмічної функції є те, що вона є функцією, оберненої до показникової. Ми вже кілька разів про це казали, але перефразовуємо ще раз – схематично-математично!

$$\text{Число} \to \text{логарифм} \to \text{піднесення до степеня} \to \text{число, тобто } a^{\log_a(x)} = x,$$

$$\text{Число} \to \text{піднесення до степеня} \to \text{логарифм} \to \text{число, тобто } \log_a(a^x) = x.$$

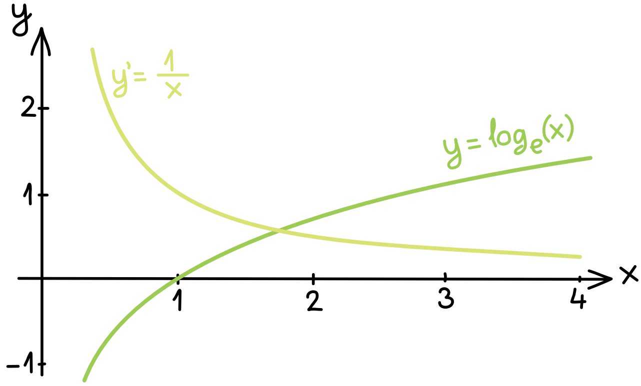
Ми можемо обчислити логарифмічну функцію для будь-якого додатного дійсного числа. Як значення, вона щедро повертає навзамін усі можливі дійсні числа. Поведінка логарифмічної функції також залежить від її основи. Наприклад, графіки логарифмічних функцій з основами 2 та $\frac{1}{2}$ є дзеркальними відображеннями один одного відносно осі абсцис:



Цікаво також згадати, що у випадку показникової функції, якщо її основу замінити на обернене до неї число, то функцію потрібно було віддзеркалити, натомість, від осі ординат.

Чи можете ви пояснити цю закономірність?

Логарифмічна функція також є неперервною. Трохи порозглядавши її графік, наприклад у випадку більшої за одиницю основи, ми помітимо, що логарифмічна функція дійсно зростає без обмежень, проте все повільніше і повільніше.



Дійсно, похідна, що показує швидкість зміни логарифмічної функції, у нашому випадку має вигляд $\frac{b}{x}$, а отже, для великих значень x, вона вже досить мало відрізняється від нуля.

Значення константи b залежить від основи логарифмічної функції, наприклад, якщо основа дорівнює числу e, то b дорівнює одиниці, як на попередньому малюнку.

В загальному випадку ця константа дорівнює $\frac{1}{\log_a(e)}$, де a – основа логарифма.

Чому це так, ми вже скоро пояснимо у розділі про логарифми з різними основами.

Додавання із множення

Якщо показникова функція перетворювала суму в добуток, то логарифмічна функція перетворює добуток на суму. Оскільки йдеться про функцію, обернену до показникової функції, то, звичайно, повірити у це неважко. Але щоб повністю себе в цьому переконати, можна, наприклад, навести такі міркування.

- Оскільки логарифмічна та показникова – взаємно обернені функції, то $a^{\log_a(xy)} = xy$.
- Аналогічно, $a^{\log_a(x)} = x$ і $a^{\log_a(y)} = y$.
- Проте показникова функція перетворює суму в добуток. Отже, $xy = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$.

У підсумку отримаємо:

$$a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}.$$

Чи з цього відразу випливає, що $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$? Цілком автоматично не випливає, мусимо бути обережними. Адже ми знаємо, наприклад, що при піднесенні до квадрату, 3 та -3 дадуть той самий результат, а отже, якби ми знали, що $a^2 = b^2$, то не змогли б зробити з цього висновок, що $a = b$.

На щастя, у випадку показникової функції, ситуація – простіша. З графіка показникової функції ми помітили, що маємо справу або зі строго зростаючою, або строго спадною функцією, а отже, жодного значення кілька разів вона не набуває. Отже, якщо ми знаємо, що $a^x = a^y$, то можемо зробити висновок, що $x = y$. Отже, із того, що

$$a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)},$$

ми дійсно може зробити також висновок, що

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

ЛОГАРИФМИ З РІЗНИМИ ОСНОВАМИ

Як і у випадку показникової функції, характер логарифмічної функції також трохи відрізняється залежно від основи. Водночас, змінити основу логарифмічної функції – досить легко, й аналогічно тому, як це відбувалося з показниковою функцією.

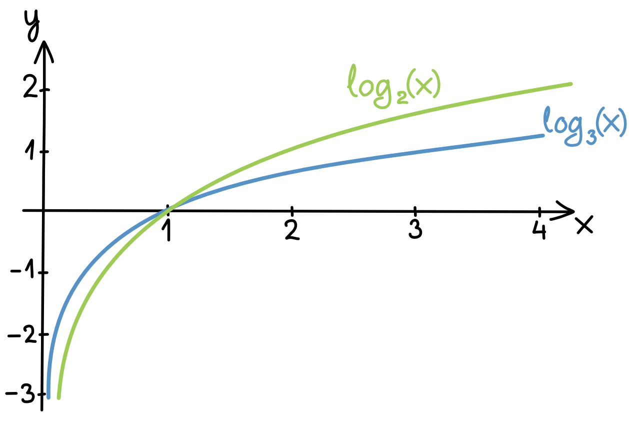
А саме, припустимо, нам дано логарифм якогось числа y за основою 3. Позначимо його $x = \log_3(y)$, що еквівалентно умові $3^x = y$. Як тепер перейти до логарифма за основою 2?

У розділі про показникову функцію ми бачили, що можемо число 3 записати у вигляді степеня числа 2, тобто $2^w = 3$. Далі можемо записати:

$$2^{wx} = (2^w)^x = 3^x = y.$$

Це означає саме те, що $\log_2(y) = wx$. Але ми вже знаємо, що $x = \log_3(y)$, і водночас, з означення маємо: $w = \log_2(3)$.

Отож, отримуємо $\log_2(y) = \log_3(y) \cdot \log_2(3)$, тобто логарифмічну функцію за основою 2 ми отримаємо тоді, коли просто помножимо логарифмічну функцію за основою 3 на одне визначене число. Ми можемо знайти це число: $\log_2(3) \approx 1{,}58$. Отже, $\log_2(x) \approx 1{,}58 \cdot \log_3(x)$.



Зв'язок між логарифмами у переході від основи a до основи b описує загальна формула:

$$\log_b(y) = \log_a(y) \cdot \log_b(a).$$

Знову ж таки, це означає лише те, що для зміни основи ми просто множимо логарифмічну функцію на одне конкретне число – число $\log_b(a)$. Тому ми прийшли до, можливо, дещо несподіваного висновку: логарифмічні функції за різними основами є надзвичайно подібними, ми можемо почати з логарифмічної функції за основою 2 і отримати всі інші логарифмічні функції, просто помноживши цю функцію на відмінне від нуля число.

Яку ж основу вибрати?

У певних ситуаціях обходитися деякими основами також легше та зручніше, особливо з огляду на те, що вчені та інформатики також мають право висловитися. Логарифм за певною основи a стає важливим, коли розглядуваний «порядок числа», тобто суттєві різниці величин, визначаються кратними числа a.

У реальному житті та у фізиці ми проводимо обчислення в десятковій системі. Природні порядки чисел – це одиниці, десятки, сотні, тобто кратні десяти. Отож, зручно використовувати також логарифми за основою 10.

Але, якщо ми працюємо, наприклад, у двійковій системі, то всі числа подаються сумою степенів двійки, тобто після множення чисел на два, відбувається важлива зміна. Отже, природний порядок числа – це також і два, а логарифмування за основою два також є природним. Оскільки комп'ютери роблять все у двійковій системі, то логарифм за основою два, тобто $\log_2 x$, також використовується саме у роботі з комп'ютерами.

Логарифм за основою e називають натуральним логарифмом, і замість $\log_e(x)$ його також іноді позначають просто $\ln(x)$. Як можна здогадатися з назви, є в ньому щось природне і прекрасне.

Наприклад, ми вже бачили, що в цьому випадку похідна має найпростішу форму: $\frac{1}{x}$. Про число e ми вже говорили як в розділі про «красиві числа» [с. 102], так і нещодавно – щодо показникової функції. З ним дуже приємно співпрацювати.

ЗНАЧЕННЯ ЛОГАРИФМА В ІСТОРІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

Історично, логарифми також зробили чудовий внесок у розвиток природничих наук, зокрема астрономії: ще до винайдення комп'ютерів вони дали змогу людям множити великі та складні числа.

Допомога логарифмів була такою суттєвою, що свого часу поважний астроном і математик Лаплас був від логарифмів просто в захваті: «Вартий подиву прийом, що скорочує роботу декількох місяців у працю лише кількох днів, подвоюючи тим самим життя астронома і утримуючи його від помилок та огиди, що супроводжують довгі розрахунки». Звідки це все взялося?

Найбільш мотивуюче, очевидно – трішки порозраховувати в голові: $7323118 \cdot 919222$!

Жах! Що все-таки робити з такими числовими виразами? Сьогодні це, звичайно, дуже просто: берете у сусіда по парті калькулятор або смартфон, і після кількох безуспішних спроб, розрахунок, все-таки, виконано. Можна також множити довго та письмово, але це, безперечно, забере час і не буде ні захопливим, ні веселим.

У 17 столітті в астрономів ще не було калькуляторів, але їхнє розуміння веселощів не було аж настільки відмінним: їм також не подобалося виконувати довгі і нудні розрахунки. Проте часто доводилося множити великі та космічно великі числа у розрахунках руху небесних тіл. На допомогу прийшов логарифм.

То як логарифм спростив обчислення?

Ідея використання логарифма для спрощення обчислень таїться в його знаменитій властивості перетворювати добуток на суму: $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Так, ми зводимо множення до додавання, а додавати ж – безумовно простіше.

Як, наприклад, перемножити 7323118 та 919222?

Насамперед, знайдемо логарифми обох чисел за основою 10, після цього додамо ці логарифми і використаємо результат у поданні добутку у вигляді степеня числа 10:

$$x = \log_{10}(7323118),$$

$$y = \log_{10}(919222),$$

$$x + y = \log_{10}(7323118 \cdot 919222),$$

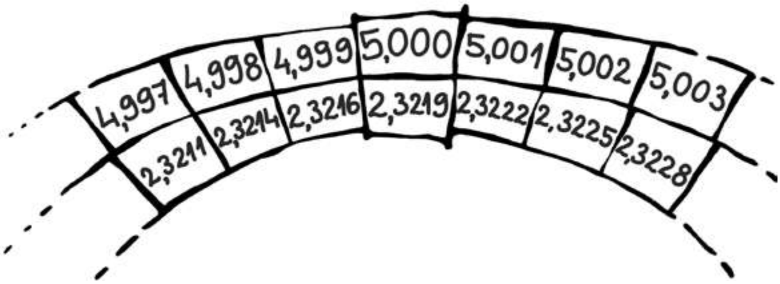
$$7323118 \cdot 919222 = 10^{x+y}.$$

Перші дві операції, звичайно, можливі, оскільки логарифмічна функція за будь-якою основою визначена для всіх дійсних додатних чисел.

Для отримання результату зараз було б достатньо однієї великої таблиці. По-перше, з неї ми повинні мати можливість дізнатися з достатньою точністю логарифми чисел, тобто, як їх подати у вигляді степеня десяти – наприклад, біля 7323118 має бути записано число $6{,}864$, а біля 919222 – число $5{,}963$. По-друге, з таблиці ми повинні мати можливість зчитати також і протилежну інформацію: для кожного числа x – значення степеня 10^x, наприклад, поряд з числом $5{,}001$ має бути записано 100230. Звичайно, в таблиці не може бути нескінченно багато чисел, а отже, числа в таблиці повинні подаватися з певною відомою точністю, наприклад, із трьома чи чотирма десятковими знаками.

Так, ми змогли б виконати наші обчислення дуже швидко. Для початку, ми знайшли б у таблиці числа 6,864 і 5,963, а потім додали б їх, аби отримати 12,827, і насамкінець, подивилися б у таблиці, що значення числа $10^{12,827}$ дорівнює 6 714 000 000 000. Оскільки справжньою відповіддю є 6 731 571 174 196, ми бачимо, що наша точність – цілком прийнятна.

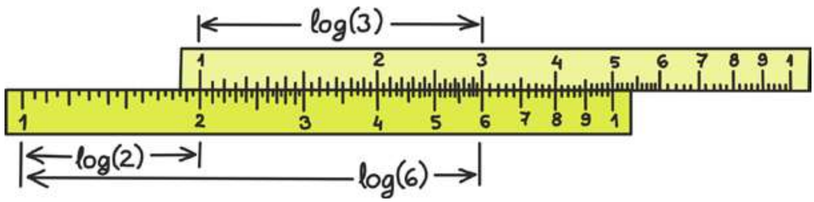
Звичайно, таблиці логарифмів повинні були бути вміло укладеними, щоб вмістити туди якомога більше чисел. Ви можете самі побачити, якою довгою буде таблиця, якщо просто записати числа в один рядок, а в інший – їх логарифми:



У верхньому рядку, із сімома клітинками, ми просунулися вперед лише на 0,006! Дійсно, таблиця логарифмів на малюнку – за зовсім іншою основою і показує зовсім інші числа, але це мало що міняє. До речі, можливо, ви розберетеся, для якої основи складена ця таблиця?

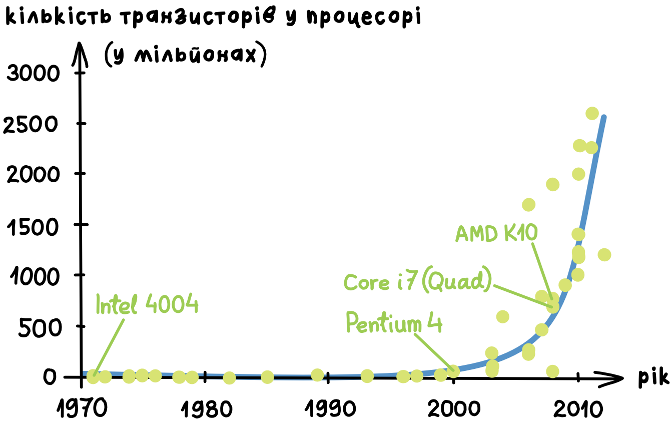
Утім, користуватися великими таблицями, і навіть їх складати – також набридливо, і невдовзі після винайдення логарифмів вигадали ще хитрішу ідею. Назва їй – логарифмічна лінійка і її ще використовували в середині 20 століття, допоки калькулятори не замінили її.

На логарифмічній лінійці, щоб полегшити множення, числа розташовувалися у логарифмічному масштабі, і отже, з операцією множення можна було покінчити, просто перемістивши верхню шкалу лінійки відносно нижньої. Наприклад, на цьому малюнку, показано, як перемножити числа 2 і 3. Для високої точності обчислень використовувалися дуже точні шкали. Кажуть, що у обсерваторіях для важливих розрахунків використовували кількаметрові логарифмічні лінійки, і водночас, шкали розглядали під мікроскопом.



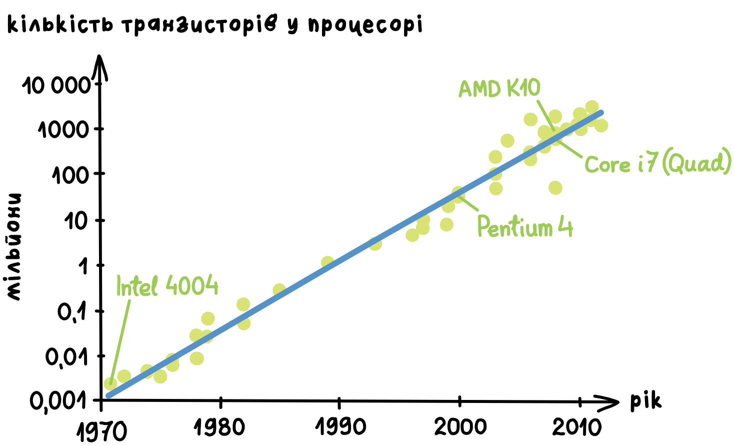
ЛОГАРИФМІЧНА ШКАЛА

Якщо ми бажаємо представити деякі дані графічно, то використання звичайної шкали на числових осях – не завжди найкращий вибір. Під звичайною, тобто лінійною шкалою, ми маємо на увазі те, що одиниці на осі змінюються рівномірно, як наприклад, на вертикальній осі графіка, наведеному у попередньому розділі, на якому відображено зростання кількості транзисторів у процесорі,:



Хоча все виглядало дуже гарно, насправді, більшу частину процесорів майже неможливо розгледіти, адже вони скупчилися біля самісінької горизонтальної осі. Проблема полягає в тому, що величини, які ми відображаємо на графіку, відрізняються на кілька порядків, а лінійна шкала – просто занадто вузька. У певному сенсі, збільшення кількості транзисторів відбувалося не через додавання, а через множення. Це можна відобразити графічно, узявши на допомогу логарифмічну шкалу. У цьому випадку кожен одиничний крок по вертикальній осі означає зміну порядку числа – знову ж таки, замість додавання ми множимо.

Наприклад, у використанні логарифмічної шкали для представлення кількості транзисторів картина – набагато красивіша та наочніша:



Логарифмічною цю шкалу називають через те, що відносно логарифма одиниці вертикальної осі змінюються, знову ж таки, рівномірно, ніби за звичкою. Справді, згадуючи десяткові логарифми, шкалу вертикальної осі ми можемо перетлумачити за допомогою такої таблиці:

x	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	1	10	100	1000	10000
$\log_{10}(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

ЗЕМЛЕТРУСИ

Логарифмічні шкали також використовують для оцінки багатьох явищ, які можуть дуже розрізнятися за величиною.

Для вимірювання сили землетрусів також використовують логарифмічну шкалу. На честь свого першого користувача ця шкала урочисто називається шкалою Ріхтера. Спрощено, сила землетрусу за шкалою Ріхтера показує, на скільки порядків вібрація земної кори є потужнішою, ніж звичайна вібрація земної кори.

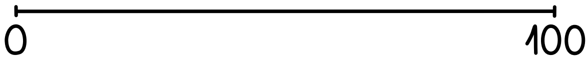
Оскільки у побудові шкали Ріхтера використовується десятковий логарифм, кожен додатковий бал за цією шкалою насправді означає в 10 разів сильніший землетрус.

Малих землетрусів досить багато: землетруси силою $3–4$ бали трапляються понад $10\ 000$ разів на рік. Ці землетруси відчуваються слабко, й, на щастя, зазвичай вони руйнувань не спричиняють. Землетруси, що є в 1000 разів сильніші, тобто від 6 до 7 балів, руйнують слабші будинки в радіусі сотень кілометрів і трапляються на земній кулі в середньому через кожні три дні. Землетруси понад 9 балів трапляються кілька разів на століття, і поблизу них не вистоїть жоден дім.

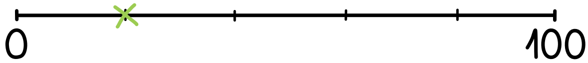
Найбільший землетрус, величину якого було виміряно, стався в Чилі в 1960 році. Його сила взагалі дорівнювала 9,5 балів – отже, навіть від руйнівних 6-7 бальних землетрусів він був ще в 1000 разів потужнішим. Замість того, щоб думати про жахіття, подумайте, натомість, як все це можна описати в лінійній шкалі – наприклад, замість 9 балів, ми мали б використати число $1\ 000\ 000\ 000$.

ЯК РОЗМІСТИТИ ТОЧКИ НА ЧИСЛОВІЙ ОСІ?

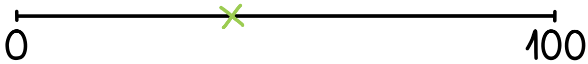
Намалюйте числову вісь. Позначте десь нульову точку, а ще десь – точку 100. Де б ви розмістили число 20?



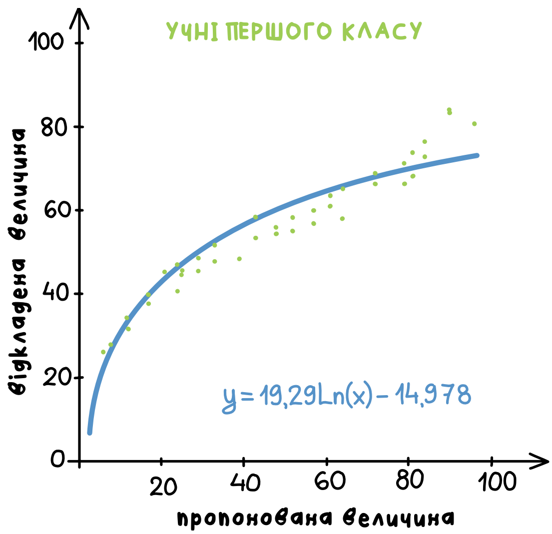
На шкільних уроках, на числовій осі, ми майже завжди використовуємо лінійну шкалу: якщо різниці між числами – рівні, то рівними є також відстані між ними на числовій осі. Міркуючи в такий спосіб, число 20 ви мали б розмістити на одній п’ятій відстані між точками 0 та 100.



Утім виявляється, що, можливо, це не є найприроднішим для нас вибором. Наприклад, було виявлено, що діти в першому класі розміщують на числовій осі число 20 значно далі, ніж ми. Приблизно тут:



Щоб знайти за цим розміщенням яку-небудь логіку, дітей попросили помістити на числовій осі багато інших чисел. Виявилося, що загальною звичкою було залишати більше місця для менших чисел, ніж для більших. Більш детальне дослідження показало, що відстань, яка відкладалася на числовій осі, логарифмічно залежала від величини самого числа, тобто інакше кажучи, на числовій осі діти, натомість, користувалися логарифмічною шкалою!



Можливо, цей вибір можна також пояснити трохи інтуїтивно. А саме, здається, що різниця між числами 87 та 88 є менш суттєвою, ніж різниця між числами 2 та 3. Якщо вимірювати різницю між числами не абсолютно, а відносно, це відчуття також буде з усіх боків точним: 88 є приблизно в $1{,}1$ разу більшим від 87, але 3 від числа 2 – аж у $1{,}5$ рази більше. Використання такої відносної різниці призвело, наприклад, до логарифмічної шкали.

Як побудувати логарифмічну шкалу?

Ми зробили спробу пояснити, що логарифмічна шкала – корисна, широко застосовувана та чудова. Але як її самостійно побудувати? Звісно, найпростіше буде дати це завдання якій-небудь програмі обробки даних – вона швидко побудує логарифмічну шкалу.

Далі ми поміркуємо, як зробити це вручну, і для цього, розглянемо, приміром, величину естонських міст.

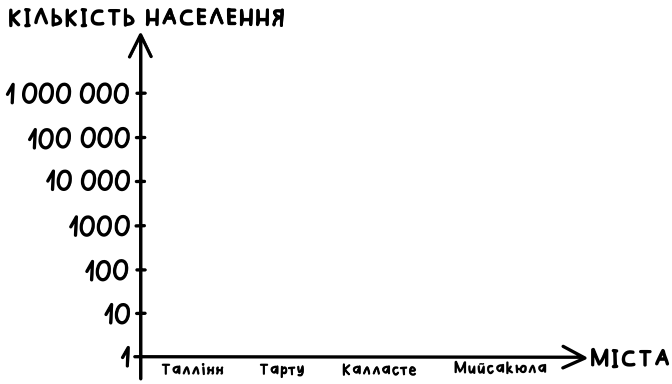
Чи змогли б ми якось відобразити на одній діаграмі кількість населення, що проживає як у найбільших, так і найменших міста Естонії? Населення цих міст варіюється від тисячі людей до майже пів мільйона: Таллінн (400292), Тарту (103740), Калласте (1106) та Мийсакюла (1002).

Знову ж таки, звичайна лінійна шкала нам не дуже допоможе. Оскільки крок на вертикальній осі – рівномірний, то на діаграмі зможуть поміститися лише малі міста, або помістяться Таллінн і Тарту, але менших міст не буде видно. У випадку однотисячного кроку, ми будемо змушені переміститися на 400 одиниць вгору, аби знайти також і Таллінн!

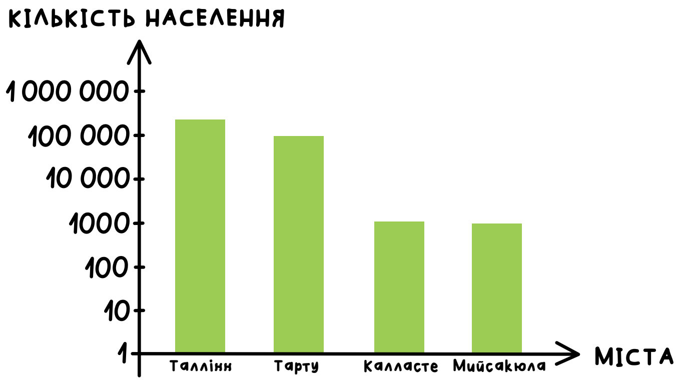
Як ми вже говорили раніше, логарифмічна шкала повинна цю ситуацію виправити, оскільки на ній просування на крок угору означає, натомість, множення.

Щоб побудувати логарифмічну шкалу, спочатку ми повинні зафіксувати розмір кроку, тобто число, на яке ми множитимемо, рухаючись вгору. Популярним вибором є 10, а також 2, але конкретний вибір залежить, насамперед, від контексту – в яких порядках ми насправді хочемо порівняти величини. На цей момент, візьмімо за таке відношення число десять.

Тепер ми почнемо називати кроки вертикальної осі за допомогою степенів, кожен подальший крок означатиме множення на десять. Звідкись треба почати, і в описуванні населення міста ми можемо почати, наприклад, із числа $1 = 10^{0}$. Наступний крок по вертикальній осі збільшить кількість населення в 10 разів, отже, біля наступної поділки ми напишемо вже 10. Ще один крок вперед означав би уже число 100, і так далі, кожен крок – незмінно більший у десять разів. У даному випадку, оскільки жодне місто не має більше, ніж мільйон жителів, ми продовжимо ще на чотири кроки, до мільйона. Отримаємо таку діаграму:



Якщо тепер додамо стовпці, що відображають кількість населення найбільших і найменших міст, то побачимо набагато красивішу картину. На одну діаграму помістяться як найбільші, так і найменші міста:



Відтак, логарифмічна діаграма аж ніяк не є складніша, ніж звичайна, проте іноді – набагато наочніша. Тоді на вертикальній осі слід просто множити, а не додавати.

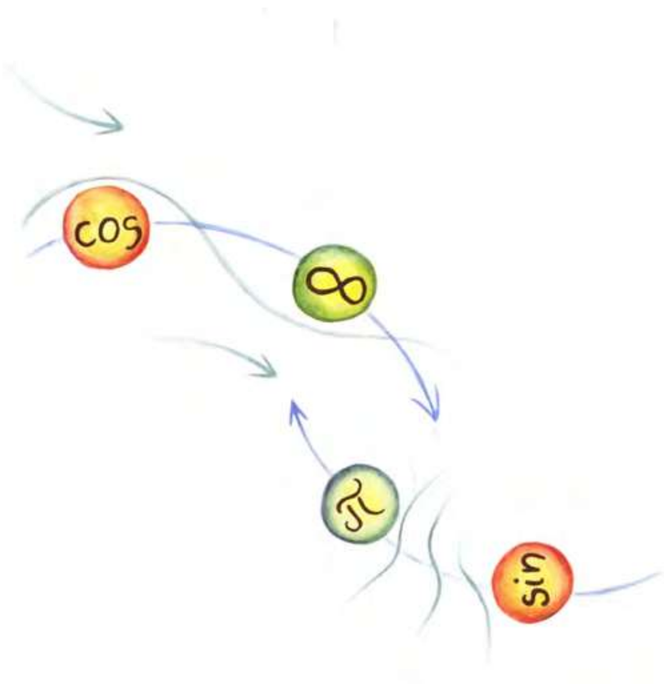
ЧАСТИНА 7 –

ІГРИ З ФУНКЦІЯМИ


cos
x
π
tan
sin
log

Наші математичні труднощі Бога не хвилюють.
Він інтегрує емпірично.

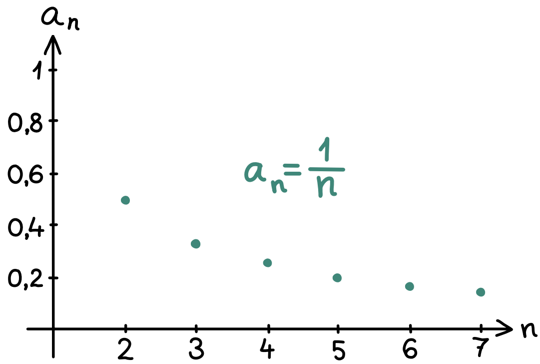
Альберт Ейнштейн



ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

У шкільній програмі з поняттям границі зустрічаються, насамперед, під час вивчення послідовностей та функцій.

Наприклад, члени послідовності $a_n = \frac{1}{n}$ стають меншими й меншими і стрімко наближаються до нуля. І справді: $a_1 = \frac{1}{1} = 1$, $a_2 = \frac{1}{2} = 0{,}5$, $a_3 = \frac{1}{3} = 0{,}3\overline{3}$, $a_4 = \frac{1}{4} = 0{,}25, \ldots$



У такому разі здається логічним поговорити також про те, що відбувається, коли члени послідовності закінчуються. У певному сенсі ми хочемо поговорити про «нескінченно далекого» члена послідовності. У цьому конкретному випадку його значення повинно дорівнювати нулю.

Поняття границі послідовності надає такому «нескінченно далекому» членові точний зміст, допомагає встановити, коли він існує, і знайти його значення.

У випадку функцій ми також можемо говорити про значення змінної, які сягають нескінченно далеко – наприклад, границя функції $f(x) = \frac{1}{x}$, коли змінна прямує нескінченно далеко, дорівнює нулю, аналогічно як у прикладі з послідовністю.

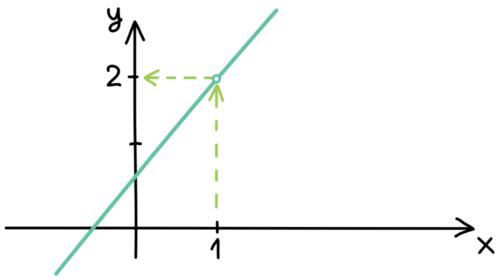
Утім, у випадку функцій границя має також ще одну, приємну роль.

Розглянемо, наприклад, функцію $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Якщо x є відмінним від одиниці, то ми можемо поділити знаменник та чисельник на $x - 1$. Отримаємо, що для будь-якого числа, відмінного від одиниці, наша функція визначає пряму $f(x) = x + 1$. Проте обчислити значення функції в точці 1 нам не дозволено – адже ділити на нуль неможливо.

Тим не менш, будуючи графік функції $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ для всіх відмінних від одиниці значень аргументу x, ми бачимо, що, вибираючи все ближчі до одиниці значення аргументу, значення функції $f(x)$ як завгодно близько наближається до 2.

Наприклад, $f(1{,}2) = 2{,}2$, $f(1{,}05) = 2{,}05$, $f(1{,}0001) = 2{,}0001$, $f(1{,}0000001) = 2{,}0000001$.

Це також гарно ілюструє графік функції:



Отже, здається, що природне значення функції $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ в точці один має дорівнювати саме двом.

У випадку функцій границя надає точний зміст такому природному заповненню дірок.

У підсумку можна сказати, що граничні процеси допомагають нам зрозуміти і чітко визначити, що відбувається там, куди нам не дозволено дивитись, або там, куди наш погляд не сягає.

ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Нагадаємо, що символом ∞ математики позначають нескінченність – дещо, що є більшим від будь-якого іншого дійсного числа. Отже, границю послідовності a_n, тобто її нескінченно далекий член, доцільно позначати так:

$$\lim_{n \to \infty} a_n.$$

Про всяк випадок випишемо ще раз також і трактування: $\lim_{n \to \infty} a_n = A$, яке означає, що, починаючи з певного моменту, значення членів послідовності починають все більше наближатися до числа A, причому дуже далекі члени послідовності та число A майже неможливо розрізнити. Математикам подобається це формулювати, оскільки послідовність a_n збігається до числа A, або що границею послідовності a_n є число A.

Наприклад, границі послідовностей

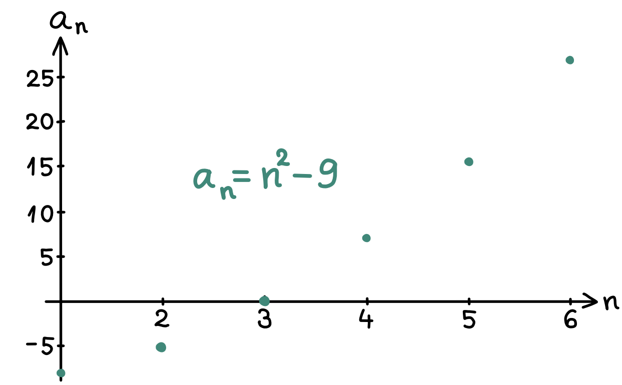
$$a_n = \frac{1}{n} \text{ või } a_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

дорівнюють нулю: члени обох послідовностей стають все меншими та ближчими до нуля.

Також про деякі послідовності кажуть, що вони збігається до нескінченності – у цьому випадку вважається, що в якийсь момент члени послідовності стають все більшими й більшими за абсолютною величиною, і для цього немає жодної перешкоди. Позначається це так:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty.$$

Наприклад, границею послідовності $a_n = n$, як і послідовності $a_n = n^2 - 9$, є нескінченність.



Насправді те, коли взагалі можна говорити про граничне значення, аж ніяк не очевидно. Якими є умови для того, аби границя послідовності існувала?

КОЛИ ГРАНИЦЯ ІСНУЄ?

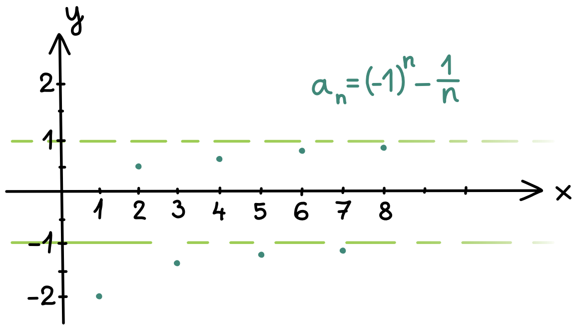
Досі ми говорили про те, що границя знаходиться інтуїтивно, і описували, як про неї міркувати, проте ми уникали точного математичного означення.

Формулювання математично точного означення границі не є страшенно складним, проте потребує певної точності та уваги – до цього дійшли лише в 19 столітті, саме тоді, коли романтизм вимагав емоційної точності.

Надалі ми спробуємо на прикладі послідовності відповісти на питання: коли було б резонно сказати, що границя існує, і як її визначити з математичною точністю? Тут ми лише розглянемо випадок, коли границя є скінченною.

Поміркуймо ще раз про наведену у вступі послідовність $a_n = \frac{1}{n}$, границею якої є число 0. Здається, що першою розумною вимогою для знаходження границі є те, чи можемо ми дістатися до певного числа так близько, як захочемо.

Утім, лише цього недостатньо, адже, наприклад, у випадку послідовності $a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$, зі збільшенням номера n, значення a_n наближається як до 1, так і до -1.



Оскільки ми блукаємо поблизу цих двох чисел, визначити границю резонним не здається. Все ж таки у граничних процесах нам хотілося б побачити певну перевагу одного з варіантів!

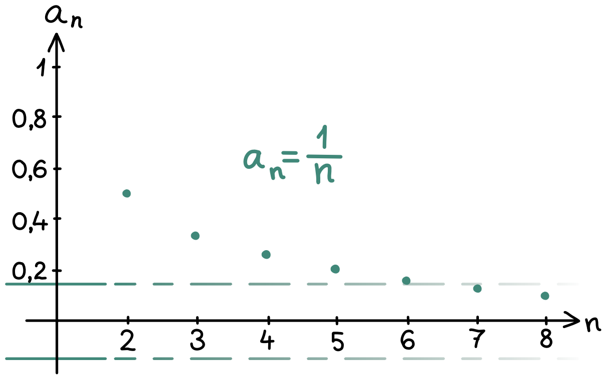
Отже, на додачу до того, що значення членів послідовності підбираються дуже близько до деякого числа, ми вимагаємо також того, щоб там, близько до нього, вони й залишалися. Виявляється, що цих двох умов уже цілком вистачає.

Число A можна вважати границею послідовності a_n, якщо ми завжди можемо знайти деякий член послідовності a_n:

- який до числа A настільки близько, наскільки ми лише захочемо,
- і наступні після нього члени послідовності є до A принаймні настільки ж близько.

Графічно ми можемо міркувати про це так.

Проведемо обабіч числа A дві горизонтальні прямі. Послідовність збігається до числа A якраз тоді, коли, незалежно від того, наскільки близько до числа A ми ці лінії провели, з певного номера всі члени послідовності як-не-як перебуватимуть між цими двома прямими. Наприклад, наша перша послідовність цю властивість, безумовно, має.



Якби ми провели прямі набагато ближче до нуля, наприклад на відстані $0{,}001$ від осі абсцис, то тоді нам довелося б чекати тисячного члена послідовності, перш ніж ми з послідовністю опинилися між цими двома лініями. Якби обрали відстань рівну $0{,}000001$, то довелося б чекати мільйонного члена. Хай там що, між дві лінії ми завжди потрапимо, і через те ми й стверджуємо, що границею послідовності є число 0.

Всім охочим ми дамо також і математичне означення, яке для розуміння варто перечитати декілька разів:

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ тоді і тільки тоді, коли для кожного додатного числа R, можна знайти певне натуральне число N таке, що для будь-якого натурального числа n, більшого ніж N, виконується нерівність $|a_n - A| < R$.

Звісно ж, насправді, ми просто переформулювали геометричну ідею – число R визначає тут те, наскільки далеко від числа A ми провели прямі, а N є тим номером, починаючи з якого, всі члени послідовності опиняються між цими прямими.

Може виникнути запитання: навіщо взагалі потрібне таке складне математичне означення? По-перше, в інтуїтивних описах, наведених у першому та другому пунктах, все ще є багато свободи для трактування, а отже, вони не дуже добре підходять для занять математикою. По-друге, складне на початку означення полегшує розуміння після. Такий короткий опис допомагає швидко, не будуючи графік, з'ясувати, чи має послідовність границю, та якою вона якраз є.

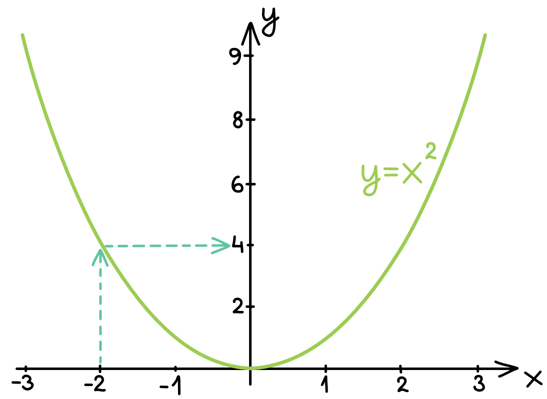
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Границя функції $f(x)$ в точці x_0 позначається аналогічно до того, як позначається границя послідовності:

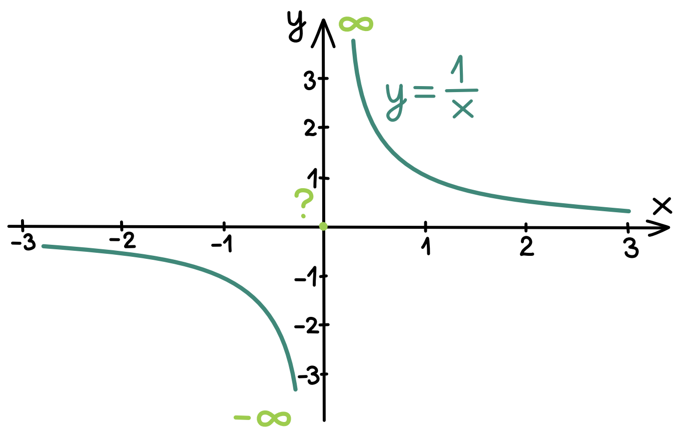
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Трактування границі – аналогічне. Наведений запис означає, що, якщо значення аргументу функції x наближається до значення x_0, то значення функції $f(x)$ послідовно наближається до числа a. Іноді також кажуть, що в точці x_0 функція $f(x)$ прямує до числа a, або що границею функції $f(x)$ у точці x_0 є число a.

Іноді знайти границю функції досить легко. Наприклад, у випадку квадратичної функції $y = x^2$ границя функції в будь-якій точці дорівнює значенню самої функції у цій точці. Отже, наприклад, у точці -2 границею буде 4. Це витікає всього-на-всього з того, що квадратична функція – це гарна неперервна функція, її графік можна побудувати, не відриваючи олівця від паперу.



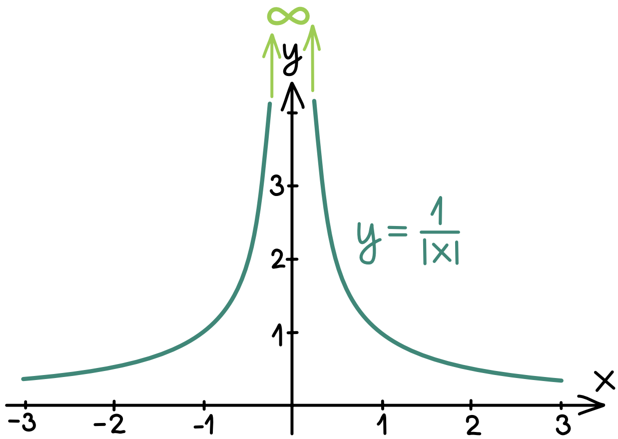
Проте границя функції $y = \frac{1}{x}$ у точці 0 не існує, оскільки поблизу нуля функція набуває як дуже великих додатніх, так і дуже малих від'ємних значень, і знову ж таки, ми не можемо вирішити, що, все-таки, слід тоді вибрати як граничне значення.



Водночас, границею функції $y = \frac{1}{|x|}$ у точці 0 є нескінченність.

Тут ми уникли зусиль із прийняттям рішення, по обидва боки від нуля значення функції весь час стає все більшим і більшим. Математичною мовою це можна записати так:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty.$$



Звичайно, про існування границі функції в точці можна помізкувати ще довше.

Коли існує границя функції в точці?

Як ми бачили, цього разу аж ніяк не ясно, у яких функцій та в яких точках існують границі. Виявляється, що строгі умови існування границі функції в точці – більш-менш подібні до тих, які й у випадку границі послідовності. Відмінність полягає лише в тому, що цього разу ми розглядаємо не усі достатньо далекі члени послідовності, а усі достатньо близькі аргументи функції.

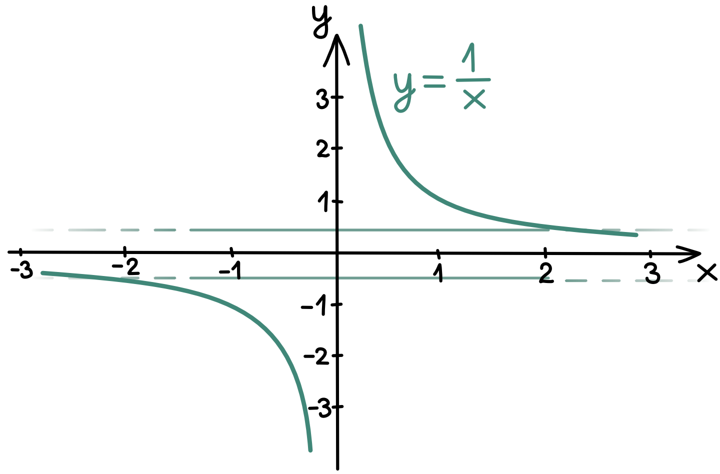
Вочевидь, найпростіше міркувати про це, знову ж таки, геометрично.

Припустимо, що ми хочемо знати, чи є число а границею функції $f(x)$ у точці x_0. Як і у випадку з послідовностями, проведемо знизу та зверху, обабіч точки a, пару горизонтальних прямих. Якщо тепер, незалежно від вибраних прямих, ми завжди зможемо знайти окіл точки x_0, для якого графік $f(x)$ потрапить поміж цих прямих, то границя функції $f(x)$ у точці x_0 таки дорівнюватиме числу a.

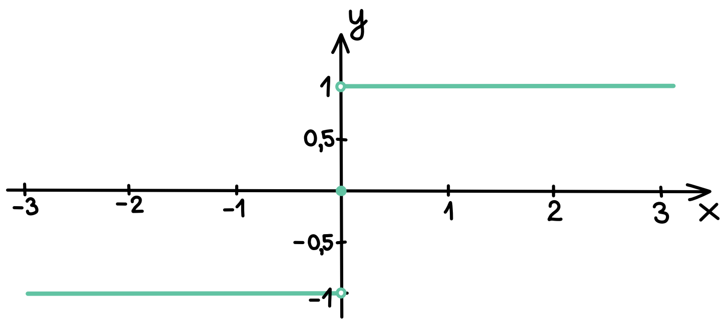
Наприклад, границя попередньої функції $y = \frac{1}{x}$ за умови, що x прямує до нескінченності, дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

тому що ми можемо провести обабіч нуля дві як завгодно близькі горизонтальні прямі і переконатися, що для усіх достатньо великих значень аргументу x, графік функції буде розташований між цими прямими.



До речі, це може бути трохи несподівано, але залишається відкритою така можливість: функція таки має певне значення у певній точці, але границі функція там не має. Наприклад, можна розглянути функцію, яка дорівнює мінус одиниці при від'ємних значеннях аргументу; плюс одиниці, якщо аргумент – додатній; і дорівнює нулю в точці нуль. Якою повинна бути границя цієї функції в точці нуль?



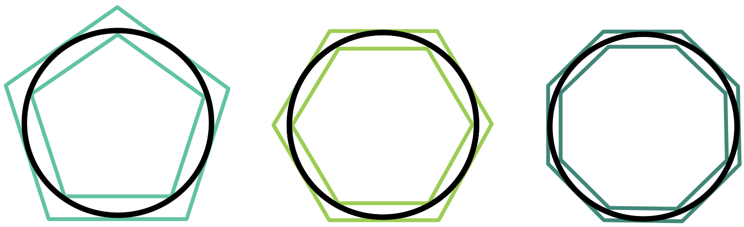
ВАЖЛИВІСТЬ ГРАНИЦІ В МАТЕМАТИЦІ

На перший погляд, границя функції в точці може здатися чи не дрібницею, мовби всього-на-всього якесь заповнення дірок. Несподівано її роль у вивченні функцій – дуже поважна. Чому?

По-перше, границя допомагає строго описувати математичні поняття, які стосуються «нескінченно малих». Наприклад, за допомогою границі визначено похідну – миттєву швидкість зміни функції. Ми можемо сприймати це, як середню швидкість за нескінченно малий проміжок часу.

Так само, за допомогою границі визначено інтеграл [с. 340], про який ми можемо міркувати як про площу криволінійної фігури, і який ми можемо обчислити, знайшовши суму площ нескінченно малих прямокутників, на які вона розбивається.

Інтересу додає ще й те, що за допомогою границі, ми також можемо визначити, наприклад, числа e та π, й інші цікаві числа [с. 96]. До речі, водночас в означенні числа π, граничний процес за своєю природою є геометричним: погляньмо, як правильні многокутники все більше і більше нагадують круг. Насправді, важливими виявляються не лише числові, а й геометричні граничні процеси.



Правду кажучи, множину дійсних чисел також можна побудувати із раціональних чисел та добре підібраних границь: наприклад, до числа π збігається послідовність $3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415\ldots$, де ми просто беремо в поміч усе більше й більше десяткових знаків числа π.

Використовуючи границі, на додачу до знаходження ірраціональних чисел , ми можемо також почати виконувати з ними математичні операції. А саме, виявляється, що якщо границі існують і мають скінченну величину, їх можна дуже непогано додавати і множити.

Наприклад, якщо ми хочемо знайти границю суми функцій x^2 та x у точці 2, то можна

- спочатку знайти границю функції x^2 у точці 2 – відповіддю буде 4,
- після цього – границю функції x у точці 2, відповіддю буде 2,
- а потім додати отримані границі – остаточною відповіддю буде 6.

Математично ми б написали:

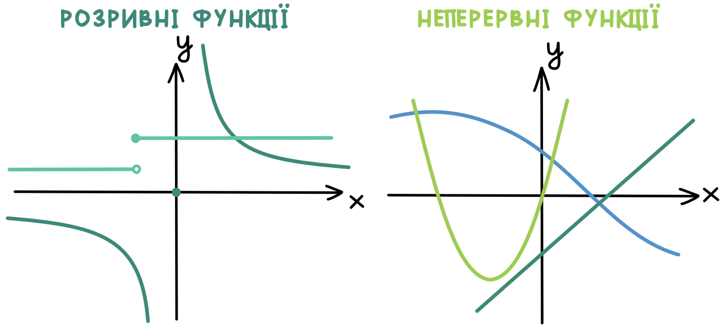
$$\lim_{x\to 2}(x^2 + x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} x = 4 + 2 = 6.$$

Проте, у разі використання цього правила слід бути обережним: завжди потрібно перевіряти, чи існують границі обох доданків поодинці. Аналогічне правило діє також і щодо границі добутку функцій, тут потрібно бути настільки ж обережним.

Однак найкращим другом границі є поняття неперервності.

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

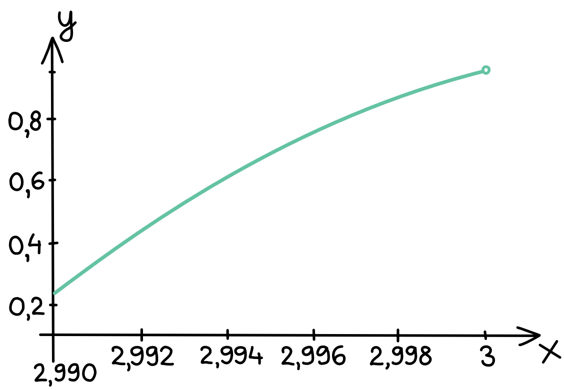
Інтуїтивно зрозуміло, що функція є неперервною тоді, коли ми можемо побудувати її графік, не відриваючи олівця від паперу. Але чи змогли б ми, не будуючи графік, якось дізнатися, чи є функція неперервною?



Для цього ми повинні спробувати зрозуміти, що, все-таки, означає те, що ми не мусимо відривати олівець від паперу.

Припустимо, ми вже побудували графік функції, наприклад, на проміжку від нуля до майже трьох, і тепер хочемо продовжити графік далі, дійшовши включно до значення аргументу, рівного трьом. Для того щоб ми намалювали точку, яка відповідає трьом, не відриваючи олівця від паперу, кінчик нашого олівця повинен був підібратися до неї вже дуже близько, можна навіть сказати «нескінченно близько».

Пропущеним не може залишитися навіть наймініатюрніший отвір – адже в такому разі нам би довелося зробити олівцем певний стрибок:



У наведеному описі можна, знову ж таки, розгледіти ідею згущення – ми вивчаємо, як змінюються значення функції, коли ми значення аргументу як завгодно близько наближаємо до числа 3. І справді, неперервність функції можна строго записати саме за допомогою границі.

Про неперервність функції спочатку говорять локально, навколо однієї обраної точки. Функцію називають неперервною у певній точці, якщо функція має в цій точці границю, і ця границя є такою ж, як і значення самої функції.

Задля більш математичного та компактного подання деякі слова ми можемо замінити також і символами.

Функція $f(x)$ є неперервною в точці a, якщо існує границя $\lim_{x\to a} f(x)$, і вона дорівнює $f(a)$ – значенню функції у точці a.

Наприклад, $f(x) = x^2$ є неперервною в точці 2, тому що

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

і водночас,

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

Звичайно, це ні для кого не є новиною, адже ми знаємо, що графік квадратичної функції можна побудувати одним швидким помахом олівця, навіть не помітивши, як проминемо точку 2.

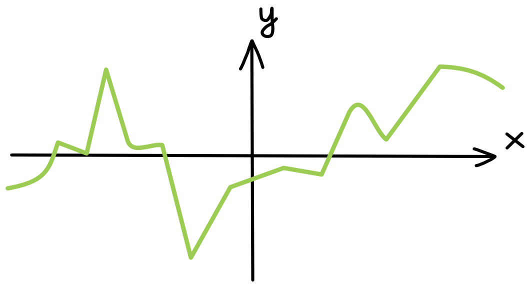
Квадратична функція є неперервною у будь-якій точці числової осі, і загальніше, такі функції, що є неперервними в усіх точках своєї області визначення, називаються неперервними функціями.

Усі функції, з якими ми зустрічалися в попередній частині, а саме: показникова функція, логарифмічна функція та многочлени є неперервними. Так само неперервними є тригонометричні функції. Можна, звісно, вважати, що функція тангенса робить дивний стрибок, але цей стрибок не належить до її області визначення.

Можна вважати, що неперервність певною мірою додає функціям регулярності, правильності, а отже, робить їх простішими, а саме: неперервна функція не може робити стрибки, значення функції можливо передбачити в кожній точці за допомогою значень, що її оточують.

Утім, неперервна функція може також виглядати дуже стрибкоподібною, і, наприклад, існують неперервні функції, що не мають похідної в жодній точці [с. 320] – в жодній точці неможливо побудувати дотичну до графіка такої функції!

Це виявили лише наприкінці 19 століття, і після цього багато поважних математиків називали такі функції чудовиськами.



ТРЮК ІЗ НЕПЕРЕРВНІСТЮ: ВІД ФУНКЦІЇ РАЦІОНАЛЬНОГО АРГУМЕНТУ ДО ФУНКЦІЇ ДІЙСНОГО АРГУМЕНТУ*

Про неперервні функції можемо говорити також і у випадку функцій раціонального аргументу: просто у цьому випадку всі граничні процеси визначаються лише множиною раціональних чисел.

Наприклад, бесідуючи про числа, спочатку ми визначали степінь числа з раціональним показником, і в результаті отримали неперервну функцію раціонального аргументу [с. 110].

Загалом, існує дуже багато способів розширити область визначення неперервної функції раціонального аргументу на множину дійсних чисел. Зрештою, для кожного ірраціонального числа значення функції ми можемо вибрати довільно.

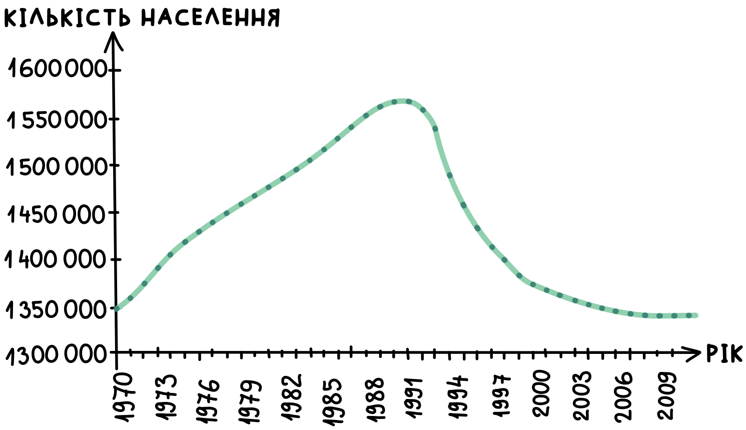
Наприклад, була б цілком допустимою функція, яка кожне раціональне число відображає в те саме число, а кожне ірраціональне число – натомість, у нуль. Ця функція особливо гарною не була б, але вона – в кожному разі дозволена.

Якщо водночас ми вимагаємо, щоб отримана функція дійсного аргументу також зберігала неперервність, для розширення області визначення є рівно одна можливість: усі дірки на графіку функції потрібно заповнити за допомогою граничних значень.

Цей трюк часто дає нам можливість почати з визначення деякої функції на множині раціональних чисел, і лише після цього за допомогою неперервності визначити функцію на множині дійсних чисел. Наприклад, саме за допомогою цієї хитрості ми змогли перейти від степеня з раціональним показником до прекрасної неперервної показникової функції [с. 280]. Точно такий самий метод допоможе нам також, наприклад, у визначенні площі прямокутника за допомогою поділу його на частини [с. 362].

ПОХІДНА

З погляду держави, кількість населення є важливим показником, що відображає чисельність та могутність якогось народу, а в нашому випадку, мабуть, все-таки його нечисельність і вразливість. Це – графік, що відображає кількість населення Естонії за останні пів століття:

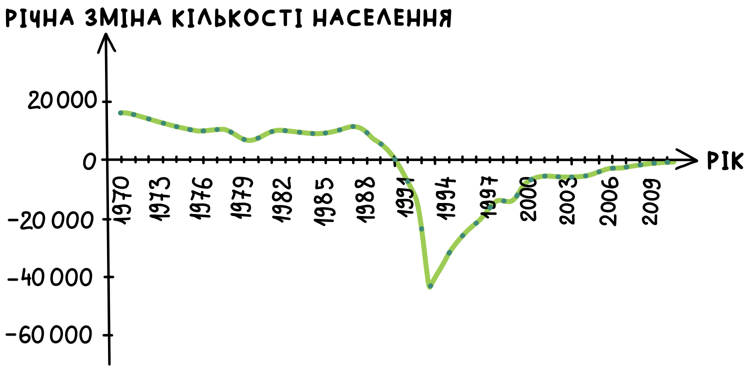


Кількість населення визначає те, скільки держава може зібрати податків і скількома громадянами повинна опікуватися. Отже, нам недостатньо лише знати кількість населення, але потрібно також розуміти, як кількість населення змінюється.

Хіба ж не цікаво, як перехід від зростання кількості населення до її скорочення збігається з відродженням естонської держави? Або те, що, хоча на сьогоднішні скорочення кількості населення сповільнилося, однак, зростання все ще не відновилося? А ще бачимо, що на початку 1970-х, зростання, здається, було найшвидшим. Чому саме тоді?

Аби отримати кращий огляд зміни кількості населення, варто було б відобразити це за допомогою відповідного графіка. Якщо ми бажаємо побачити, на скільки людей змінювалася кількість населення за рік, то можемо відняти від кількості населення кожного року кількість населення попереднього року.

Якщо ми зробимо це для кожного року і з’єднаємо отримані точки красивою лінією, то отримаємо такий графік:



Цей графік – це вже майже графік похідної від функції, що описує кількість населення! Похідна дає нам швидкість зміни функції в кожній точці, хоча більш точне означення – трохи хитромудріше.

Додатковою складністю є те, що у нашому випадку ми повинні шукати швидкість зміни, використовуючи певні періоди часу, такі як рік, місяць чи тиждень – адже за занадто короткий період (наприклад, одну наносекунду), часто нічого і не відбудеться. На додачу, ми повинні вибрати, чи розглядатимемо зміни у найближчому майбутньому чи в недалекому минулому. Однак, в математиці щось відбувається постійно, і тому похідна описує миттєву швидкість зміни значення функції – зміни, яка відбувається швидше, ніж яка завгодно нано- чи пікосекунда, і це все – як у минулому, так і в майбутньому.

У цьому розділі ми розглянемо, як, все-таки, міркувати про цю миттєву швидкість, а також, як знайти її для заданої функції.

ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

Для функції, що залежить від часу, похідна – немовби спідометр: вона показує миттєву швидкість зміни функції у кожен момент часу. Але, як знайти показники спідометра, якщо відома лише пройдена відстань?

Відповідаючи на це питання, ми також дійдемо строгого визначення похідної, і все це – на прикладі однієї зимової історії.

ЗИМОВА ІСТОРІЯ

Уявіть, що, катаючись серед лісу на лижах, ви піднялися на вершину великої гори, і тепер можете помчати вниз у вільному стилі. Вас дуже цікавить, наскільки великою буде ваша швидкість, скажімо, на десятій секунді. Як би ви змогли її оцінити?

Одним із способів було б просто виміряти, як далеко ви дісталися за десять секунд, і скільки часу це зайняло. Поділивши відстань на час, ви могли би знайти середню швидкість, що відповідає першим десяти секундам, а за її допомогою – встановити свою швидкість також і на десятій секунді. Однак з досвіду ми знаємо, що швидкість зростає досить стрімко, і очевидно, ця оцінка не була б особливо точною.

Але більш точну оцінку швидкості ви б отримали, наприклад, тоді, якби знали, як далеко ви дісталися також за п'ять секунд. Ви змогли б установити свою швидкість на десятій секунді як середню швидкість спуску, що відповідає проміжку від п’ятої до десятої секунди. Але, якби ви знали, як далеко дісталися за дев'ять секунд, то змогли б подивитися, скільки ви пройшли за останню секунду, і відповідь була б ще точнішою. І так далі – якби ви знали свою пройдену відстань за 9,99 секунди, ваша відповідь була б майже такою ж точною, як і в GPS. Адже GPS також має ж якось обчислювати швидкість!

У разі використання все менших проміжків часу знайдена швидкість стає все точнішою, проте, якою є точна відповідь? Точна відповідь так і називається – похідною або миттєвою швидкістю. Якщо ми хочемо знайти її, то повинні знайти середню швидкість для все менших і менших проміжків, і сподіватися, що, зрештою, з’явиться одна чітка відповідь.

Вивчення таких усе менших і менших проміжків ми бачили у попередньому розділі про граничні процеси. Похідна визначається граничним процесом [с. 313]: у певний момент часу похідна дорівнює граничному значенню середньої швидкості, якщо тривалість досліджуваного проміжку часу стає настільки крихітною, що майже перестає існувати. Використовуючи математичні символи це можна записати так:

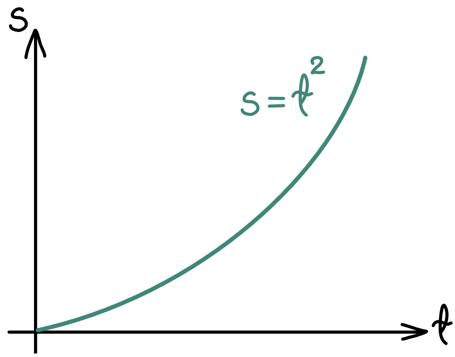
$$\text{миттєва швидкість у момент часу } t = \lim_{h\to 0} \frac{\text{пройдена відстань, що відповідає проміжку від } t - h \text{ до } t}{\text{тривалість часового періоду, тобто } h}.$$

КОНКРЕТНИЙ ПРИКЛАД

На практиці, знайти миттєву швидкість справді можливо лише в тому випадку, якщо ми опишемо наш рух математично – адже врешті-решт знайти довжину шляху, пройденого за кожну наносекунду, неможливо. Вимірюючи щось, ми завжди отримуємо наближену відповідь.

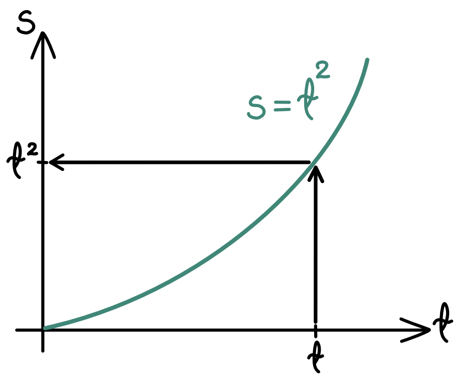
Але з точністю нам допоможе, приміром, фізика. З'їжджання з гори ми запросто можемо математично описати за допомогою знань з уроків фізики. А саме: якщо кут нахилу гори – постійний, якщо ви забудете про силу тертя, силу вітру, що протидіє рухові, та інші умови, і якщо почнете спуск із вершини гори з нульовою швидкістю, то тоді довжина пройденого шляху задається квадратичною функцією виду ct^2, де t – час.

Константа c повинна бути конкретним дійсним числом, яке залежить від гравітаційної константи та кута нахилу, але заради простоти скажемо, що ви обрали найкрасивішу на цьому світі гору, і $c = 1$. У цьому випадку пройдена відстань виражається формулою $s = t^2$, тож, наприклад, за 10 секунд після початку спуску, ви проїдете відстань у 100 метрів.

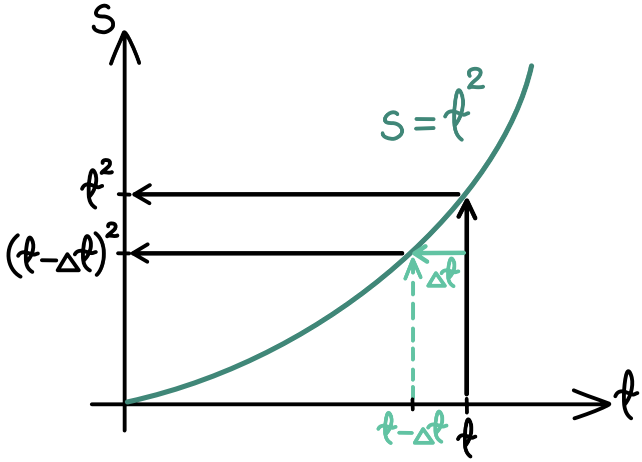


Спираючись на цю формулу, ми тепер можемо легко обчислити також і свою миттєву швидкість. І водночас більше немає різниці, чи будемо ми це робити лише для моменту часу, що відповідає 10 секунді, чи для будь-якого довільного моменту часу t. Тривалість короткого періоду часу ми позначаємо символом Δt, але, як завжди, це – умовно.

Ми знаємо, що у довільний момент часу t, пройдена нами відстань, дорівнює t^2 метрів.



Водночас, на момент часу $t - \Delta t$ ми пройдемо відстань $(t - \Delta t)^2$:



Тепер у нас є все для знаходження середньої швидкості, що відповідає проміжку часу від $t - \Delta t$ до t:

$$v = \frac{t^2 - (t - \Delta t)^2}{\Delta t}.$$

Далі ми можемо трішки спростити отриману формулу. Розписавши квадрат різниці, звівши подібні члени та скоротивши дріб, отримаємо оцінку швидкості:

$$\begin{aligned} v &= \frac{t^2 - (t - \Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= \frac{t^2 - t^2 + 2t\Delta t - \Delta t^2}{\Delta t} \\ &= \frac{2t\Delta t - \Delta t^2}{\Delta t} \\ &= 2t - \Delta t. \end{aligned}$$

Звернімо увагу, що тривалість періоду часу Δt,безсумнівно, впливає на нашу оцінку швидкості. Водночас, якщо ми робитимемо цей період все меншим і меншим, то його вплив безперервно йтиме на спад. Зрештою, його взагалі буде неможливо відрізнити від нуля, і залишиться тільки $2t$. Тому, миттєва швидкість зміни функції t^2, тобто похідна в довільний момент t, дорівнює $v = 2t$.

Отож, із наведених вище фізичних міркувань випливає, що під час спускання з цієї ідеальної гори, швидкість спуску щосекунди збільшуватиметься на $2\ \text{м/с}$. Отже, наприклад, на п'ятій секунді швидкість становитиме $10\ \text{м/с}$, а на десятій – уже $20\ \text{м/с}$, тобто понад $70\ \text{км/год}$. Якщо ви боїтеся швидкості – за довгий спуск не беріться!

МАТЕМАТИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ

Звісно, математикам не хочеться кожного разу так довго упорядковувати слова, а отже, знаходження похідної можливе також просто за допомогою кількох рядків символів. Використовуючи замість довжини шляху та часу звичніші імена – функція f та аргумент x, отримаємо функцію $y = f(x)$. Насамперед, ми можемо з гордістю оголосити:

похідна функції $f(x)$ у точці x визначається так:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Звернімо увагу, що, якщо в нашій історії ми визначили похідну функції в певній точці, за допомогою проміжків ліворуч від аргументу, то тепер від величини проміжку Δx ми вимагаємо лише те, щоб вона прямувала до нуля. Вона може мати або лише додатні (погляд у майбутнє), або лише від'ємні (погляд у минуле), або перемінно – як додатні так і від'ємні, значення. Як ми побачимо пізніше, така загальність є важливою, аби ми змогли говорити про похідну однозначно.

Тому, попередні міркування щодо знаходження похідної функції $y = x^2$, можна також компактно записати «з поглядом у майбутнє»:

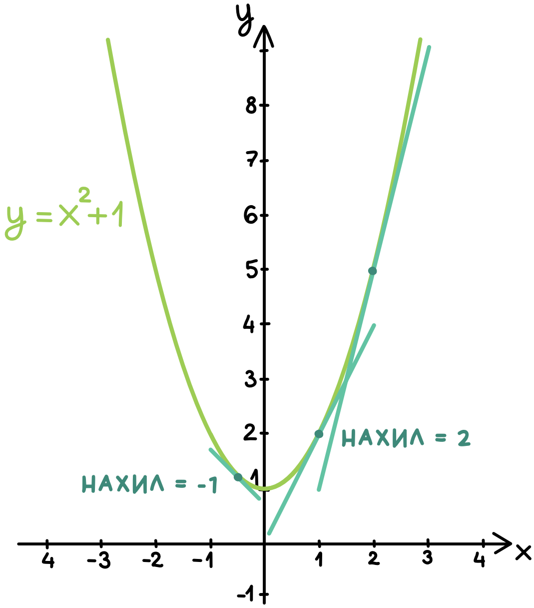
$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Чудово, що відповідь – така сама!

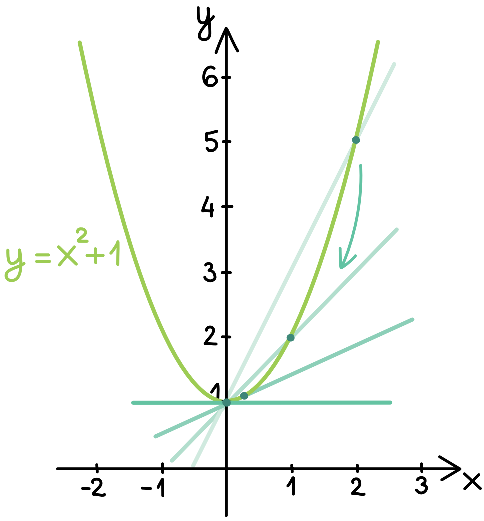
Про всяк випадок нагадаємо, що позначення $f'(x)$ та y' означають абсолютно одну й ту саму річ. Функції дійсної змінної часто позначають за допомогою y, адже нам подобається будувати графіки функцій на координатній площині, використовуючи осі абсцис та ординат. У цьому випадку зазначати, що аргументом є змінна x, часто взагалі забувають – це вважається зрозумілим. Іноді функцію позначають як $f(x)$, оскільки f – це перша буква слова «функція», записаного латиницею. Тоді задля уникнення плутанини також зазначається, що все-таки, аргументом функції є саме змінна x. Символ ' на позначення похідної ввів у вжиток французький математик італійського походження Ж. Л. де Лагранж тільки наприкінці 18 століття.

ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Про похідну функції можна також міркувати, використовуючи дотичну до графіка функції. А саме: похідна функції в кожній точці дорівнює нахилу, тобто кутовому коефіцієнту прямої, що дотикається до графіка функції в цій точці.

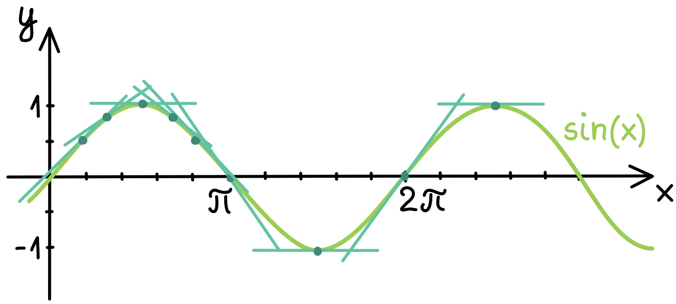


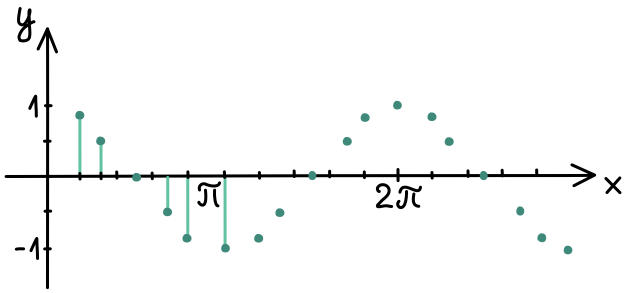
Чому це має бути саме так? Сама ідея середньої швидкості вже пов'язана із побудовою прямих – замість того, щоб вивчати, як змінюється довжина шляху в деталях, беремо кінцеві точки часового проміжку і проводимо через них пряму. Тоді її нахил також є середньою швидкістю, що відповідає цьому проміжку.



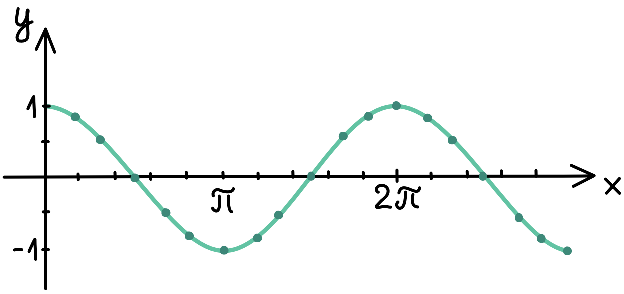
Однак, аби знайти похідну, ми беремо часовий проміжок нескінченно малим, тобто, інакши кажучи, спрямовуємо кінцеву точку проміжку до початкової: так пряма стає дотичною.

Як приклад, розгляньмо ще графік функції синус, за допомогою якого можна описати багато періодичних процесів, зокрема, скажімо, рух маятника [с. 236]. Щедро проведемо до графіка функції синус різні дотичні:





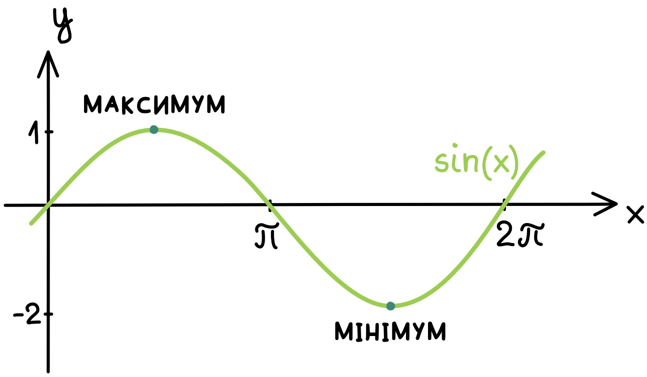
Побудувавши новий малюнок, на якому відобразимо нахили, тобто кутові коефіцієнти цих дотичних, ми побачимо, що він мало чим відрізняється від попереднього графіка – лише зміщенням. Трохи перебравши у пам'яті, ми виявимо, що отриманий малюнок дуже нагадує графік функції косинус:



І справді, виявляється [с. 251], що похідна функції синус – це функція косинус, а похідна функції косинус – це функція синус, віддзеркалена від горизонтальної осі. Отже, тригонометричні функції – це досить ізольоване сімейство.

ЕКСТРЕМУМИ

Графічний спосіб мислення також допомагає зрозуміти те, чому нулі похідної такі важливі. А саме, ми бачимо, що похідна дорівнює нулю саме в тих точках, де дотична є паралельною осі абсцис – тобто, інакши кажучи, в точках, де функція набуває найбільше або найменше значення, порівнюючи з усіма точками із її околу. Такі точки називають екстремальними. Екстремальну точку з найбільшим значенням функції для деякого її околу називають точкою максимуму, а з найменшим – точкою мінімуму.



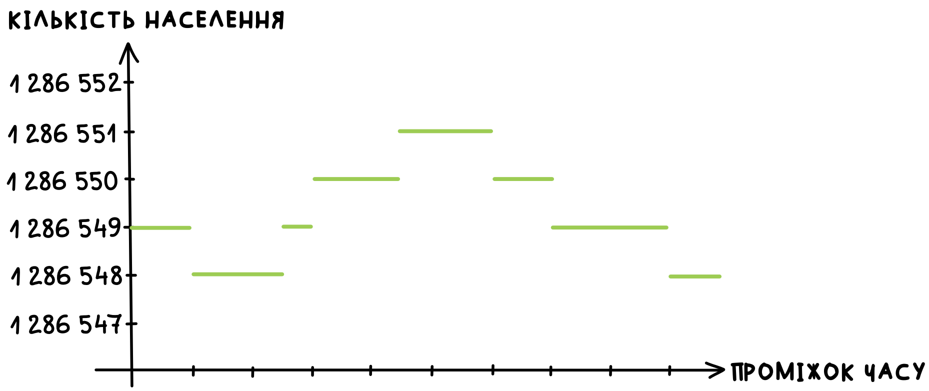
Дослідження екстремумів є досить важливим, оскільки сьогодні незмінно прийнято все максимізовувати або мінімізовувати: економісти хочуть максимізувати прибуток, інженери Формули-1 бажають максимальних швидкостей, а учні – подовше поспати.

Точніше про те, як це працює, ми поговоримо, вирішуючи проблему, дуже важливу, наприклад, під час підготовки до свята останнього дзвоника: під яким кутом кидати водяні бомби, сидячи на велосипеді [с. 333]? Але спочатку – ще трішки чогось математичнішого.

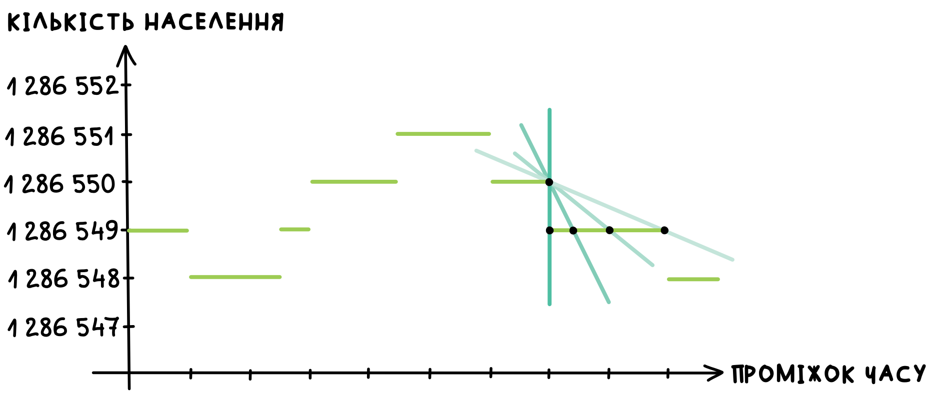
КОЛИ ПОХІДНА ІСНУЄ?

У вступі ми говорили про зміну кількості населення. У контексті похідної, це трохи вводило в оману, оскільки для функції, яка точно описує кількість населення, знайти похідну скрізь неможливо.

А саме: зміна кількості населення, насправді, аж ніяк не безперервний процес, зате зміни відбуваються через конкретні випадки: хтось народжується, хтось помирає. Отже, у збільшеному масштабі, графік кількості населення нагадує сходи:



Отож, за досить малий проміжок часу зміна кількості населення завжди дорівнює або нулю, або принаймні її модуль дорівнює одиниці – якраз хтось народився або помер. У першому випадку похідна дорівнює нулю, а у другому випадку – вона, натомість, невизначена. Дійсно, якщо немає змін у жодному напрямку, відповідно означенню похідна дорівнює нулю. Але, з іншого боку, якщо зміна зафіксована для певного проміжку часу, і все одно, наскільки малим він є, то у разі зменшення проміжку середня швидкість весь час збільшується або зменшується і сягне нескінченності. Якщо це залишилося незрозумілим, то можна звернути увагу, наприклад, на дотичну у точці стрибка, вона взагалі стає вертикальною, тобто нахил стає нескінченно великим або нескінченно малим:



Отже, в житті похідна не дає якоїсь особливої інформації щодо зміни чисельності населення. Її навіть неможливо добре скрізь визначити, і у вивченні чисельності населення мусимо використовувати більш неточні оцінки, як це ми робили у вступі, мусимо вивчати зміни, що відбулися протягом одного року, одного місяця чи іншого скінченного часового періоду.

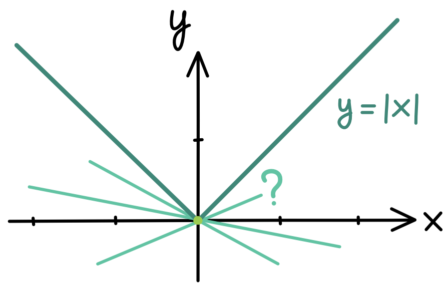
Знайти похідну деяких інших функцій у деяких точках також неможливо, і виявляється, що існують взагалі функції, які є неперервними, але похідну від них неможливо обчислити в жодній точці! Вони – досить величенькі монстри, і деякі з них якоюсь мірою нагадують фрактальну сніжинку, про яку можна буде прочитати вже в наступній частині [с. 377].

І навіть, якщо фізики майже завжди мають справу з функціями, що похідну мають, – як, наприклад, вже розглянута квадратична функція або функція синус – важливо запитати, коли взагалі можна говорити про похідну. Надалі це ми й обговоримо.

Нагадаємо, що ми визначили похідну функції у певній точці через граничний процес. Отож, похідна функції існує в цій точці саме тоді, коли існує граничне значення в даному граничному процесі.

Після трохи детальнішого вивчення цієї умови виявляється, наприклад, що кожна функція, яка має в якійсь точці похідну, повинна обов’язково бути в цій самій точці також і неперервною. Це – саме та проблема, із якою ми зіткнулися кілька сторінок назад, вивчаючи функцію, що описувала чисельність населення, – у точці стрибка обчислити похідну неможливо.

Виявляється, що для існування похідної просто неперервності недостатньо – наприклад, функція модуля $y = |x|$ не має похідної в точці 0. Це також легко зрозуміти саме геометрично. Знову ж таки, в точці 0 дуже важко провести дотичну. При наближенні справа, здається, що дотична повинна збігатися з прямою $y = x$, при наближенні зліва – з прямою $y = -x$. Яку з них двох ми мали б вибрати?



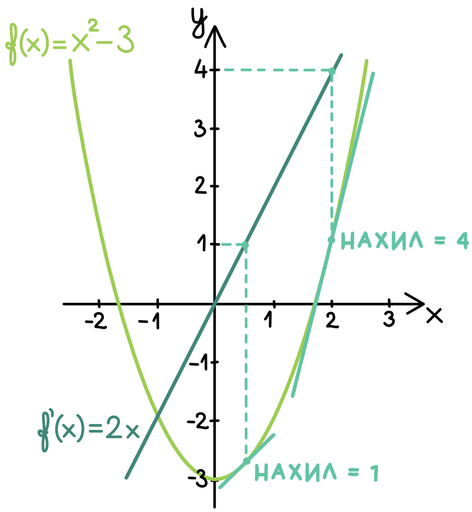
Чи, натомість, щось середнє? Жодна пряма не описує зміни функції одночасно як у від’ємному, так і в додатному напрямку.

Загалом, справедливим є те, що, якщо в якоїсь функції існує похідна в кожній точці, то графік цієї функції гладенький, без кутових точок. Спробуйте самі – лише тоді ви можете однозначно провести дотичну в кожній точці. Але наявність дотичної означає, що принаймні в крихітній області функція змінюється досить лінійно, тобто досить маленька частина її графіка здається прямолінійним відрізком , приблизно так само, як в околицях дому, поверхня сферичної Землі здається з кожного погляду плоскою.

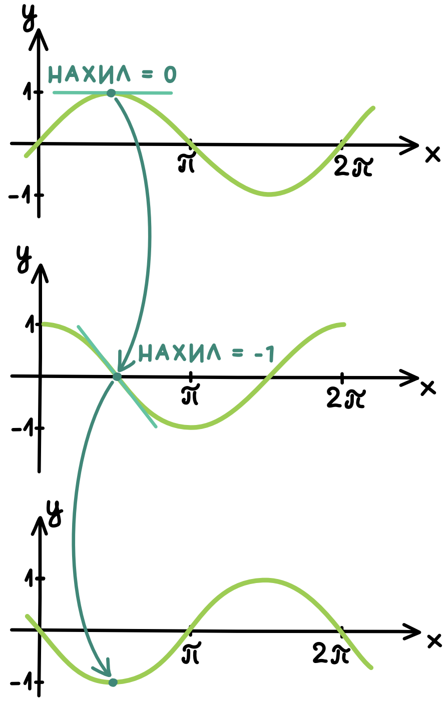
ДРУГА ПОХІДНА, ТРЕТЯ ПОХІДНА І Т.Д.

Похідна – захоплива, оскільки в певному сенсі, ми приступили до перетворення більш складних, ніж числа, об'єктів.

Якщо якась функція має похідну в кожній точці, то тоді про знаходження похідної ми можемо думати як про перетворення однієї функції на нову функцію: у разі знаходження похідної функція $y = f(x)$ стає новою функцією, яку, зазвичай, позначають $y' = f'(x)$ і значення якої в кожній точці якраз і дає значення похідної початкової функції в цій точці.



Тепер y' – також функція, а отже, ми можемо так само вивчити, як вона змінюється. Якщо вона змінюється достатньо гарно, то ми можемо знайти і її похідну й отримати функцію y''. Якщо тепер, так само, функція y'' – приємна і гладенька, то можемо знайти ще й третю похідну, і так далі. Функції, від яких ми можемо послідовно знайти багато похідних, є особливо гладенькими та плавними. Хорошими прикладами є, знову ж таки, многочлени або тригонометричні функції синус та косинус. Як ми вже згадували, у разі знаходження похідної, функція синус стає функцією косинус, а функція косинус – функцією синус, віддзеркаленою від осі абсцис. Отже, ми можемо продовжувати знаходити похідну безкінечно:



Друга похідна трапляється у фізиці дуже часто і визначає прискорення, тобто швидкість зміни швидкості. Другий закон Ньютона записується саме за допомогою прискорення: $F = ma$, тобто добуток прискорення та маси тіла дорівнює силі, що на нього діє! Знаючи, що прискорення – це перша похідна від швидкості, ми могли б написати $F = mv'$, і тепер, пригадавши, що саму швидкість ми знаходимо як похідну від довжини шляху, могли б також написати $F = ms''$. Замість штриха, у фізиці часто використовують точку, наприклад $F = m\dot{v}$ і $F = m\ddot{s}$.

Отже, рух маятника, наприклад, ми можемо досить точно описати трьома функціями: по-перше – відстань маятника від нульової точки, після цього – похідна цієї функції, тобто швидкість руху маятника, і, нарешті, – похідна функції, що описує швидкість, тобто прискорення руху маятника.

МЕТАННЯ ВОДЯНОЇ БОМБИ*

Із фільмів про гангстерів ви набралися трохи нехорошого натхнення і вирішили покидатися з велосипеда водяними бомбами. Під яким кутом слід кидати водяні бомби, щоб вони полетіли якомога далі?

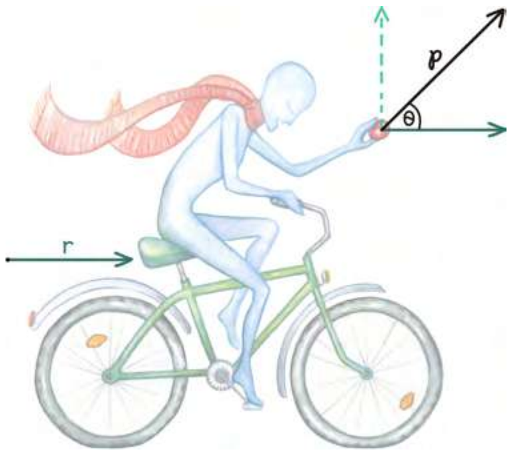
На сьогодні, мабуть, є досить поширеною премудрістю те, що кидати м'яч або водяну бомбу, якщо ви стоїте на місці, найкорисніше точно під кутом $45°$. Але як зміниться цей кут тоді, коли ви, виконуючи кидок, їдете на велосипеді чи на машині або біжите?

Надалі ми спробуємо знайти обґрунтування народній мудрості, й одночасно також вичислити найкращий кут метання у випадку, коли ви переміщуєтесь. Для цього ми мусимо, по-перше, знайти для ситуації вдалий фізичний опис, трохи математично його проаналізувати, а тоді – поспішити до висновків. Водночас, у цьому місці аналіз означає пошук деякого оптимального значення, і у гру вступає похідна, яка дорівнює нулю саме в точці максимуму функції.

ФІЗИЧНИЙ ОПИС

Основою хорошого фізичного опису є визначення чинників, які слід враховувати під час розв’язування задачі про кидання водяної бомби, а які – ігнорувати.

Падіння водяної бомби спричиняє сила тяжіння, так що відректися від неї ми не зможемо. Позначимо прискорення, якого набуває тіло під дією сили тяжіння, буквою g. Так само обов’язково відіграють свою роль і швидкість велосипеда, а ще – початкова швидкість, яку ми надаємо водяній бомбі. Оскільки їх точних значень ми не знаємо, то швидкість велосипеда позначимо буквою r, а швидкість кидка кульки з водою – буквою p. Нарешті, важливим є, звичайно, також і сам кут кидка, який ми шукаємо – позначимо його через θ.

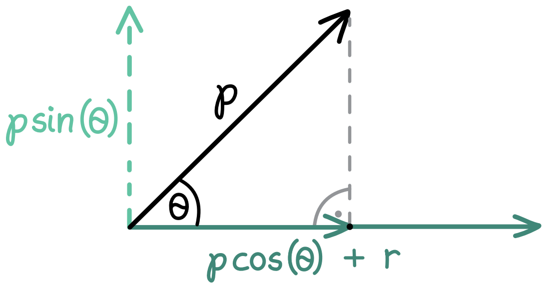


Пізніше такий загальний розв’язок дасть нам можливість дослідити, як відповідь залежить, наприклад, від швидкості велосипедиста або швидкості кидка.

Але все інше ми вирішили насамперед ігнорувати – якщо водяна бомба є досить компактною, то опір вітру не мав би грати надто великої ролі. Також ми ігноруємо, наприклад, той факт, що точка кидання не лежить на самій земній поверхні, а розташована трохи вище.

На основі другого закону Ньютона ми можемо описати рух тіла під дією прикладених до нього сил – швидкість руху тіла теж змінюється лише тоді, коли на тіло діють сили. У цій ситуації ми маємо лише одну силу – силу тяжіння, що діє вертикально вниз. У горизонтальному напрямку сила не діє, а отже, горизонтальна швидкість залишається незмінною протягом усього польоту.

Ми також можемо записати ці швидкості за допомогою тригонометричних функцій:



Горизонтальна швидкість є сталою: $v_x = p\cos(\theta) + r$.

Початкова вертикальна швидкість дорівнює $v_y = p\sin(\theta)$, і зразу ж починає зменшуватися завдяки силі тяжіння, поки не стане рівною нулю (найвища точка!), а потім знову збільшуватиметься, поки водяна бомба не впаде на землю.

Саме за допомогою цього опису вертикальної швидкості ми можемо знайти також і час польоту.

Знайдемо спочатку час,за який водяна бомба досягне найвищої точки. Ми знаємо, що похідна вертикальної швидкості, тобто прискорення, під час руху вгору дорівнює – g. Отже, ми можемо записати вертикальну швидкість у момент часу t у вигляді:

$$v_y(t) = p\sin(\theta) - gt.$$

У найвищій точці вертикальна швидкість дорівнює нулю, і ми отримуємо рівняння відносно часу T, протягом якого висота збільшувалася:

$$0 = p\sin(\theta) - gT.$$

Звідси ми можемо знайти час, необхідний для досягнення найвищої точки:

$$T = \frac{p}{g}\sin(\theta).$$

Якщо трохи задуматись, виявиться, що на політ униз теж витратиться точно стільки ж часу. Один зі способів у цьому переконатися – використати закон збереження енергії. Як у момент кидка, так і в момент приземлення повна енергія тіла повинна бути такою самою. Оскільки в ці моменти потенціальна енергія однакова, так само, як і горизонтальна швидкість, то рівними за величиною повинні бути також і вертикальні швидкості – лише протилежно напрямленими. Отже, під час падіння вертикальна швидкість змінюється на стільки ж, на скільки під час піднімання. Оскільки зміну швидкості, як і раніше, визначає лише прискорення сили тяжіння, то й на зміну швидкості витратиться точно стільки ж часу.

Отож, для знаходження усього часу польоту ми мусимо час, витрачений на підйом, помножити на два. Позначивши весь час польоту через t, отримаємо:

$$t = \frac{2p}{g}\sin(\theta).$$

Тепер, використовуючи горизонтальну швидкість, ми можемо також знайти довжину кидка. Оскільки швидкість в горизонтальному напрямку – постійна, для цього ми просто повинні перемножити швидкість та час.

Отримуємо:

$$s = (p\cos(\theta) + r)\cdot t,$$

$$s = (p\cos(\theta) + r)\cdot \frac{2p}{g}\sin(\theta),$$

$$s = \frac{2p^2}{g}\cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{2pr}{g}\sin(\theta).$$

Використовуючи формулу синуса подвійного кута [с. 245] $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$, можемо ще трішки це спростити:

$$s = \frac{p^2}{g}\sin(2\theta) + \frac{2pr}{g}\sin(\theta).$$

Як-не-як, досить страхітлива формула! Принаймні ми бачимо, від чого залежить довжина кидка: від швидкості кидка p, швидкості велосипедиста r, кута кидка θ та прискорення вільного падіння g. Саме так, як ми й очікували. Приступимо тепер до аналізу цієї довжини кидка!

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

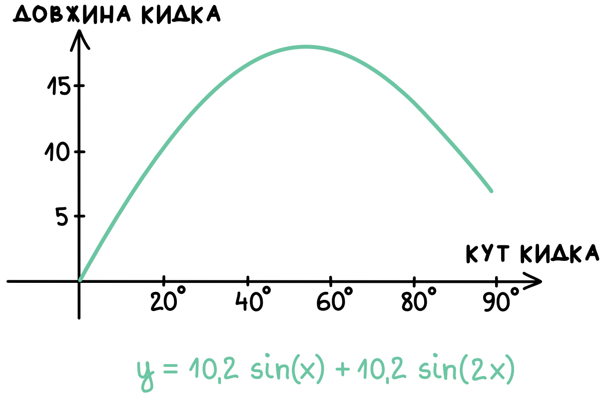
Наша мета – дослідити, за якого значення кута θ довжина кидка найбільша.

Спочатку ми можемо поглянути на те, що відбувається в деякому конкретному випадку.

Ми знаємо, що прискорення вільного падіння $g = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Припустимо, наприклад, що початкова швидкість водяної бомби $p = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, а швидкість велосипедиста – це, скажімо, $r = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

У цьому випадку залежність відстані кидка від кута кидка можемо описати таким графіком:



Ми бачимо, що водяна бомба летить найдалі, коли кут кидка – трохи більший, ніж $55°$, і трохи менший, ніж $60°$.

Але, якщо ми хочемо знайти оптимальний кут кидка, який зазвичай залежить від швидкості кидка та швидкості велосипедиста, то маємо розв'язати задачу на екстремум: у випадку максимальної відстані похідна від відстані, що є функцією кута, дорівнює нулю. Справді, як ми бачили, у точках максимуму та мінімуму функції дотична паралельна осі абсцис, а отже, її похідна в цих точках дорівнює нулю [с. 328].Водночас, з того факту, що похідна в точці дорівнює нулю, не завжди випливає, що маємо справу з максимумом, мова так само могла б іти і про мінімум. Утім, поглянувши на попередній графік або довірившись фізичній інтуїції, ми можемо не брати це занепокоєння до уваги – у цьому конкретному випадку, екстремумом буде саме максимум.

Знайдімо тоді цю похідну. Ми знаємо, що похідною функції синус є функція косинус [с. 251], і аналогічно, можна показати, що похідною від функції $\sin(2\theta)$ буде функція $2\cos(2\theta)$. Отож, ми отримуємо:

$$s' = \frac{p^2}{g} 2\cos(2\theta) + \frac{2pr}{g}\cos(\theta).$$

Аби знайти екстремум, а в цьому випадку – саме максимум, ми повинні прирівняти похідну до нуля, тобто розв'язати рівняння:

$$0 = \frac{p^2}{g} 2\cos(2\theta) + \frac{2pr}{g}\cos(\theta).$$

Ми можемо спростити це рівняння, помноживши обидві частини на вираз $\frac{g}{2p}$:

$$p\cos(2\theta) + r\cos(\theta) = 0.$$

Тепер у нас є тригонометричне рівняння для знаходження оптимального кута кидка, і ми вже в хорошому становищі: із параметрів у грі – лише швидкість кидка та кут кидка. Хіба ж не цікаво, що величина прискорення вільного падіння не відіграє жодної ролі, тобто те, що на Місяці оптимальним є точно такий самий кут кидка, як і на Землі!

Далі, щоб знайти розв'язок рівняння відносно кута θ, мусимо трохи схитрувати.

Використавши формулу подвійного кута [с. 245] $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, перепишемо рівняння у вигляді:

$$2p\cos^2(\theta) + r\cos(\theta) - p = 0.$$

Тепер ще тільки залишається розв'язати квадратне рівняння щодо $\cos(\theta)$, що ми зробимо за допомогою формули розв'язків квадратного рівняння [с. 275]:

$$\cos(\theta) = \frac{-\mathrm{r} \pm \sqrt{r^2 + 8p^2}}{4\mathrm{p}}.$$

Очевидно, що розумну відповідь дає лише один із двох розв'язків. Ми можемо припустити, наприклад, що кидок та рух відбуваються в одному напрямку, і що рух відбувається в додатному напрямку. Отже, кут кидка повинен бути між $0°$ та $90°$. Оскільки функція косинус на цьому проміжку – додатна, то розв'язок ми повинні вибрати також додатний:

$$\cos(\theta) = \frac{-\mathrm{r} + \sqrt{r^2 + 8p^2}}{4\mathrm{p}}.$$

Це і є загальний розв'язок. Тепер у кожному конкретному випадку ми могли б підставити сюди числа і зробити висновки.

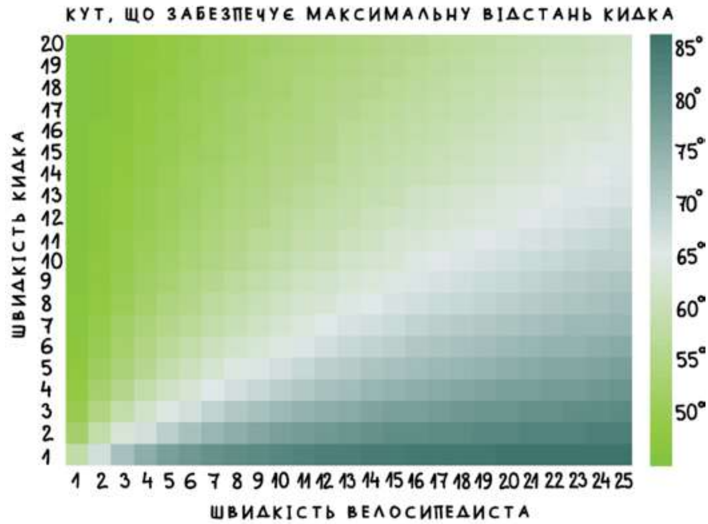
ЯКІ ВИСНОВКИ РОБИТИ?

Але висновки ми можемо відобразити на діаграмі у більш загальному вигляді.

А саме, оскільки ми знаємо, що на проміжку від $0°$ до $90°$ функція косинус – строго спадає, то для кожного значення функції косинус на графіку, що відповідає цьому проміжку, ми також можемо знайти відповідне єдине кутове значення. Зв'язок, що його надає, називають також арккосинусом і позначають $\arccos\theta$. Таким чином, можемо записати розв'язок:

$$\theta = \arccos\left(\frac{-\mathrm{r} + \sqrt{r^2 + 8p^2}}{4\mathrm{p}}\right).$$

Тепер за допомогою цього розв'язку ми можемо побудувати діаграму, на якій відображено, як оптимальний кут кидка залежить від швидкості кидка та швидкості руху.

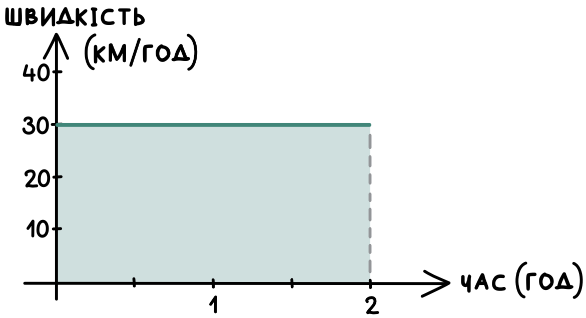


Як бачимо, у випадку високих швидкостей нам дійсно доведеться змінювати свою стратегію. Наприклад, якщо швидкість велосипедиста дорівнює $20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а швидкість кидка – $5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, то найдовший кидок буде досягнуто приблизно за 77 градусів, що вже суттєво відрізняється від 45 градусів. Водночас, за низьких швидкостей, різниця великою не буде.

ІНТЕГРАЛ

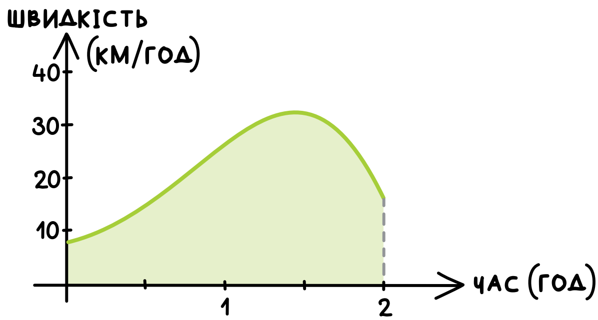
Після довгої зими настала весна, ви кидаєте лижі в куток і на велосипеді починаєте досліджувати природу, що пробуджується. Ви їдете подалі від дому, однак бажали би знати, як далеко дісталися – адже сил повинно залишитися і на повернення. У будь-який момент, у вас є можливість прочитати показники спідометра велосипеда, тобто поточну швидкість. Як би ви могли знайти довжину всієї проїханої дороги?

Якби перші дві години ви їхали з постійною швидкістю $30\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$, то за цей час змогли би подолати $2 \cdot 30 = 60$ кілометрів. Це також можна зобразити графічно, побудувавши залежність швидкості від часу. На цьому графіку подолана за перші дві години відстань точно визначається площею прямокутника між прямою швидкості та віссю часу:



Із абсолютно сталою швидкістю їздять дуже рідко. Насправді, ваша швидкість, імовірно, змінюється майже весь час. Як у цьому випадку знайти довжину проїханого шляху?

Цю ситуацію можемо теж описати графічно, як і раніше. Також виявляється, що довжина проїханого шляху, знову ж таки, визначається площею області, що лежить між графіком швидкості та віссю часу. Але площа під графіком функції, а отже і довжина проїханого шляху, визначається інтегралом.



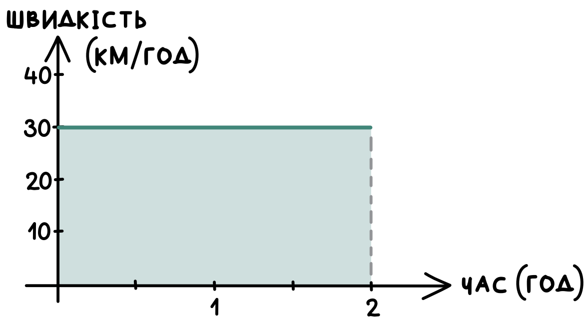
ІНТЕГРУВАННЯ

Якщо похідна була спідометром функції, що описувала залежність від часу і показувала миттєву швидкість зміни функції, то значення інтегралу – протилежне: на основі показань спідометра функції інтеграл знаходить повну її зміну. Надалі ми почнемо з пояснення ідеї інтегралу, і сподіваємось все-таки дійти, зрештою, до його математичного означення [с. 44]

ІСТОРІЯ

Оскільки інтеграл та похідна тісно пов'язані, почнемо з подібної історії: ви мчитеся з гори. Звичайно, як ми вже згадали у вступі, зараз – весна, і замість лиж ми подарували вам велосипед. На додачу, цього разу у нас під рукою є спідометр, і ми хочемо розрахувати проїхану відстань.

Як це зробити? Ми вміємо знаходити довжину шляху за допомогою швидкості та часу тоді, коли швидкість – постійна. У цьому випадку, фігура, що утворилася під графіком швидкості, також є гарним прямокутником, а формула його площі точно співпадає з формулою для знаходження відстані: $s = vt$.



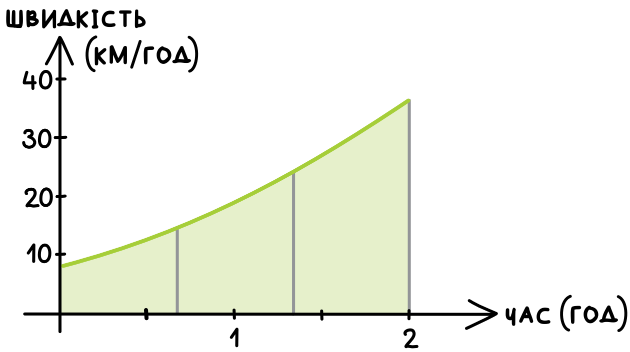
Але проблема полягає в тому, що, коли ви котитеся з гори, швидкість весь час збільшується. Отже, для знаходження подоланої за десять секунд відстані більше не буде достатньо, скажімо, подивитися на спідометр лише в останню секунду і використати це значення швидкості для знаходження усієї пройденої відстані. Утім, вирішення проблеми – досить просте: поділимо час на короткі часові проміжки, тобто поглядатимемо на спідометр досить часто.

Ідея полягає в тому, що протягом дуже короткого проміжку часу, швидкість особливо не змінюється. Отже, ми можемо досить точно знайти пройдену відстань, що відповідає кожному короткому проміжку часу, якщо просто перемножимо тривалість проміжку та швидкість, яку показав спідометр. Додавши після цього відстані, що відповідають кожному короткому періоду, отримаємо досить точну відповідь.

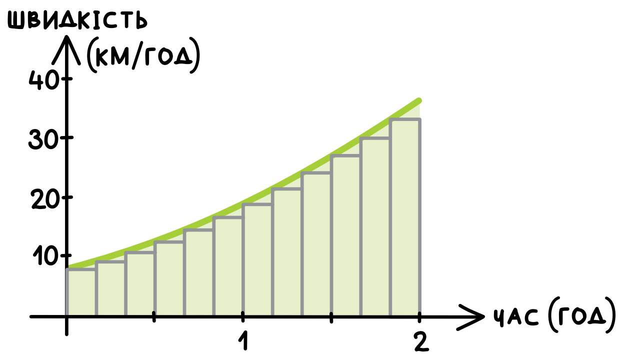
Як і в розділі про похідну, чим менші періоди ми візьмемо, тобто, чим частіше дивитимемося на спідометр, тим точнішою буде також і наша відповідь. Цього разу інтеграл дає ту точну відповідь, яку ми шукаємо – точну довжину шляху – і знову в математичну гру вступають граничні процеси [с. 308]. Як побачимо пізніше, цього разу їх лише трішки складніше описати.

Все це також можна уявити геометрично.

По-перше, поділити час на короткі проміжки геометрично означає просто поділити на маленькі шматочки фігуру під графіком швидкості.



По-друге, використання звичайної формули відстані для кожного проміжку означає, що площу кожного маленького шматочка фігури ми наближаємо площею вписаного в нього прямокутника.



Нарешті, додамо всі ці площі разом.

Якщо детальніше придивитися до малюнка, стає цілком зрозуміло, що, чим менші проміжки часу, тим точніша відповідь. Використавши наближення прямокутниками, в обчисленні кожної маленької площі, ми зробимо певну похибку, але, чим меншим є проміжок, тим менше ми помилимося у своїй оцінці.

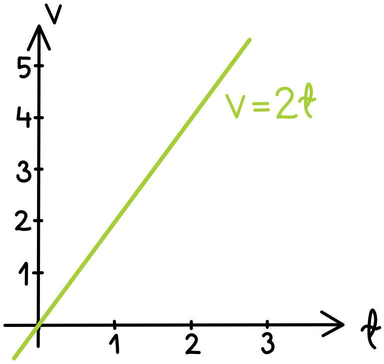
Отже, у висновку, точна довжина пройденого шляху є інтегралом від функції швидкості, який дорівнює площі криволінійної трапеції (так вони це називають...), що лежить під графіком даної функції швидкості.

Знову ж таки, знайти за допомогою спідометра точну довжину шляху , тобто інтеграл, на практиці неможливо: адже неможливо як завгодно часто придивлятися до спідометра. Але щойно у нас в руках є математичний опис, можемо негайно приступити до інтегрування.

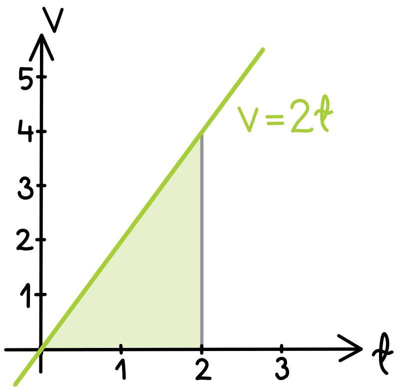
КОНКРЕТНИЙ ПРИКЛАД

Уточнімо, що ви мчите вниз на велосипеді, знову ж таки, із уже відомої нам ідеальної гори. Із розділу про похідну нагадаємо також, що в цьому випадку залежність вашої швидкості від часу задається формулою $v = 2t$. Оскільки спускатися – не дуже довго, ми знову вимірюватимемо час у секундах.

Як ми вже помітили, зв'язок між швидкістю та часом ми можемо описати графічно:



Отже, вже через дві секунди швидкість $4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ буде досягнута. Якщо тепер ми хочемо знайти довжину шляху, пройденого за ці дві секунди, то мусимо просто знайти площу фігури під прямою.



Хитруни можуть відразу побачити, що це можна зробити, наприклад, скориставшись формулою площі трикутника, і отримати відповідь:

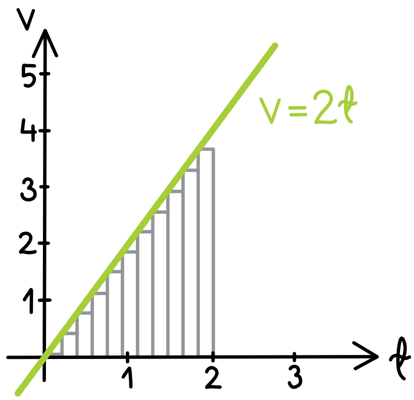
$$\frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ (m)}.$$

Другий і найпоширеніший спосіб знайти цей інтеграл – використати зв'язок між похідною та інтегралом: оскільки в певному сенсі, інтеграл та похідна є оберненими операціями, ми можемо звести знаходження інтеграла до знання похідної і навпаки. Розлогіше про це – у розділі про інтеграл та похідну [с. 352].

Але наостанок ми покажемо, як знайти інтеграл «на пальцях», поділивши фігуру під графіком швидкості на невеликі шматочки та додавши разом їх площі, або коротше – як інтегрувати вручну.

Поділимо наш короткий період, що тривав 2 секунди, на n маленьких проміжків, довжина кожного з яких дорівнює $\frac{2}{n}$.

Тоді i-й проміжок тривав від моменту часу $\frac{2(i-1)}{n}$ до моменту $\frac{2i}{n}$.



У кожному з цих проміжків, ми оцінюємо швидкість за допомогою кінцевої швидкості проміжку.

Використовуючи формулу $v = 2t$, одержимо оцінку кінцевої швидкості i-го проміжку: $\frac{4i}{n}$.

Тоді одержимо оцінку пройденої відстані, що відповідає цьому часовому проміжку: $\frac{8i}{n^2}$.

Додавши усі ці маленькі відстані разом, отримаємо:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{8i}{n^2} = \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\,.$$

Ця кривулька, з якою ми вже зустрічалися раніше [с. 50], є знаком суми, але для нагадування, випишемо суму розлогіше теж:

$$S_n = \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{8}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n - 1 + n).$$

Ми вже знаємо (із формули суми n членів арифметичної прогресії, наприклад), що

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2},$$

Отже,

$$S_n = \frac{8}{n^2}\cdot\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2} = 4\frac{n-1}{n} = 4 - \frac{4}{n}.$$

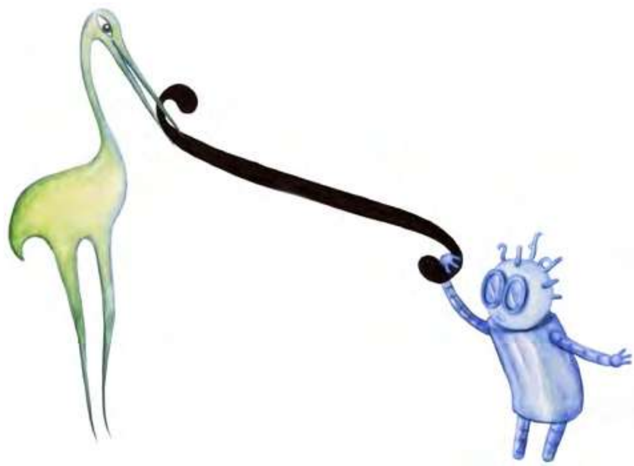
Наш оцінка очевидно залежить від кількості часових періодів n, оскільки містить член $\frac{4}{n}$.

Водночас, якщо зробити n як завгодно великим, цей член стане неймовірно крихітним, і, натомість, зникне у результаті граничного процесу. Отже, у відповіді ми отримаємо 4, що і є довжиною усього шляху, тобто інтегралом, який ми обчислювали. Одиниці виміру, звісно ж, потрібно припасувати окремо, щоб, як і раніше, отримати у відповіді 4 метри.

Знак інтеграла та математичний запис

Для більш математичного опису математики-поціновувачі мистецтва позначають інтеграл символом, що є просто-напросто розтягнутою літерою s.

$$\int$$



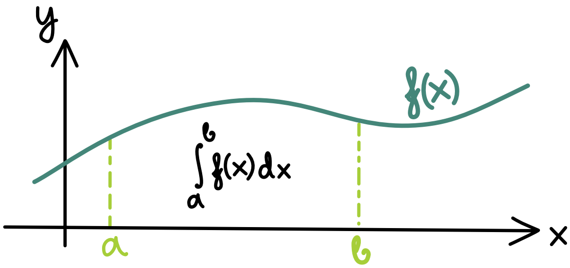
Літеру s використовують саме тому, що сам інтеграл – неначе розтягнута сума, що виникає після додавання нескінченної кількості речей.

Але в самій цій кривульці – ще досить багато інформації. Для того щоб розумно її використовувати, потрібно ще вказати, що ми інтегруємо, відносно чого і на якому відрізку.

Якщо нам дано якусь функцію $f(x)$, що описує зміну, то тоді інтеграл від неї, тобто сумарну зміну відносно x на відрізку [a,b] , ми позначаємо так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

З геометричного погляду цей інтеграл дорівнює площі області, обмеженої віссю абсцис, прямими $x = a$ та $x = b$, і графіком функції $f(x)$:



У наведеному вище прикладі, ми інтегруємо швидкість $v(t)$ відносно часу t, на відрізку від моменту часу 0 до моменту 2, і в цьому випадку ми можемо записати інтеграл у вигляді:

$$\int_0^2 v(t)dt.$$

Отже, у нашому конкретному прикладі, ми знайшли наступний інтеграл:

$$\int_0^2 2t\;dt = 4.$$

А ДЕ ОЗНАЧЕННЯ?

Але як щодо математичного означення інтеграла?

Відповідь – проста: значна частина точного означення залишається чекати університету. Для розсудливого означення інтеграла треба бути досить старанними.

Нагадаємо, що інтеграл на основі показань спідометра визначав загальну зміну відстані за певний часовий проміжок. Щоб його обчислити, ми ділили проміжок на менші проміжки і знаходили зміни, що відповідали цим проміжкам. Додавши ці зміни разом, ми отримали оцінку інтеграла. У граничному процесі, коли проміжків було все більше, і вони ставали все коротшими, ми й отримали сам інтеграл.

У конкретному прикладі для знаходження довжини шляху ми використовували часові проміжки однакової довжини, і на кожному проміжку визначали швидкість на основі значення в кінцевій точці проміжку.

Узявши все це за зразок, ми могли б математично визначити, що інтеграл означає. Цей підхід полягає в тому, що ми ділимо проміжок на все більше і більше частин, завжди вибираємо кінцеві точки малих проміжків і використовуємо їх, щоб знайти довжину шляху. Ми отримуємо інтеграл як результат граничного процесу, коли n прямує до нескінченності.

Після перекладу на мову символів це формулювання набуде такого вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2\frac{b-a}{n}\right)+\cdots+f(b)\right).$$

Але стоп! Тут ми робимо два досить довільних рішення. По-перше, довільним є те, що ми ділимо увесь проміжок на рівні частини. По-друге, чому ми повинні оцінювати зміну саме на основі правої кінцевої точки проміжку?

Якої-небудь дуже вагомої причини немає для жодного з них, і це вже повинно насторожувати – чи зробили ми вибір правильно? Чи інший вибір дав би, все ж таки, той самий інтеграл? Чи існує який-небудь «правильний» вибір? Чи можна визначити інтеграл якось більш загально, без точної деталізації, як відбувається розбиття на проміжки, і яку точку в них вибираємо?

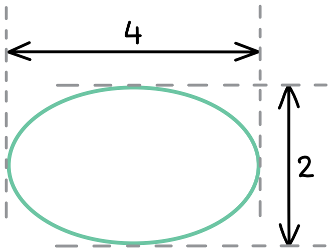
Усі ці питання є хвилюючими, але, на жаль, вони вже заходять далі, ніж межі цієї книги. Насправді, існує кілька різних способів строго визначити інтеграл – але інтуїтивне розуміння завжди залишається однаковим, таким самим, яким ми користувалися також і вище. При цьому, можливо, важливо ще додати, що конкретний вибір, зроблений тут, не є найкращими – використовуючи його, ми можемо інтегрувати лише достатньо «красиві» функції, усе складніше вже призводить до проблем.

Наостанок, навіть якщо відсутність означення дійсно опечалює, інтеграл можна визначити, спираючись на зв'язок між похідною та інтегралом. Ми це зробимо вже в розділі про похідну та інтеграл [с. 352].

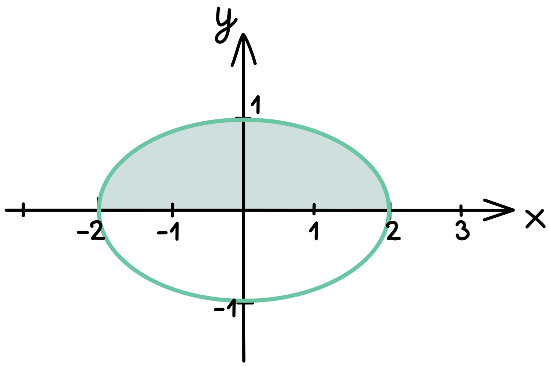
ІНТЕГРАЛ ТА ПЛОЩІ БІЛЬШ СКЛАДНИХ ФІГУР

Ми говорили про те, що інтеграл можна також розглядати як площу області між певною лінією та віссю абсцис. Насправді, трохи схитрувавши, за допомогою інтегрування ми можемо знайти площі багатьох інших фігур.

Один спосіб схитрувати – не такий уже й складний. Розглянемо, наприклад, одне гарне розтягнуте коло, тобто еліпс.

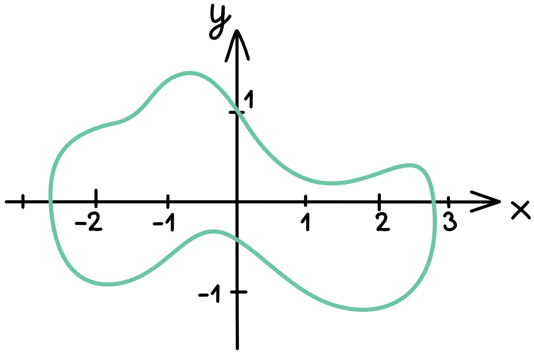


Як за допомогою інтеграла знайти площу фігури, обмеженої цим еліпсом? Звичайно, передусім, ми мусимо розмістити його на координатній площині. Як бачимо, ми маємо дві дуги – верхню та нижню – які ми можемо розглядати як графіки функцій від змінної x:



Знайшовши інтеграл від функції, яка описує верхню дуги, ми отримаємо площу верхньої половини фігури. Але ж еліпс – добряче симетричний, і тому ми можемо просто помножити результат на два і отримати загальну площу!

Більш загально, навіть якщо у нас немає гарної симетрії, що прийшла б нам на поміч, для знаходження площі якоїсь криволінійної фігури ми можемо поділити фігуру горизонтальною віссю надвоє, знайти інтеграли від функцій, які задають верхню та нижню дуги, і нарешті, відняти від першого інтеграла другий інтеграл. Відняти мусимо через те, що інтеграл від функції, що задає нижню дугу, дає нам від'ємну відповідь – адже частина, що знаходиться під віссю абсцис, означає від'ємну зміну.



Але це ще не все! Насправді ділити фігуру на частини за допомогою саме прямокутників не завжди природно. Наприклад, щоб знайти площу круга, ми могли б розділити його, натомість, на невеликі кільця і знайти площу круга за допомогою їх. Але розлогіше про це – вже в розділі про площі [с. 367].

Наостанок – немає, звісно, жодної причини обмежуватись лише площами, тобто двовимірними обсягами. Інтегрування ми можемо використовувати також, скажімо, для обчислення об’ємів. У частині 8 ми і знайдемо таким способом, наприклад, формулу об’єму кулі [с. 375].

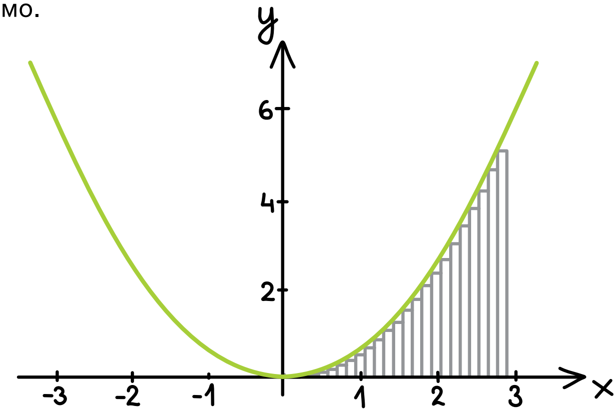
ЯК ІНТЕГРУЄ КОМП'ЮТЕР?

Вирішуючи життєво важливі завдання, ми іноді стикаємось із функціями, інтегрування яких – велика мука. Інтеграл неможливо знайти, скориставшись якоюсь хитрою формулою для обчислення площі, а від його зв’язку з похідною також немає помочі – ми просто не знаємо, похідною якої функції є підінтегральна функція. Отже, невизначений інтеграл ми повинні шукати вручну, використовуючи олівець та папір.

Робити це абсолютно вручну було б, звичайно, неабияким жахом, проте, на щастя, сьогодні у нас є комп’ютери, які вміють виконувати мільйони елементарних операцій за секунду. Отже, ми можемо використати вищевказаний спосіб знаходження інтеграла – поділити проміжок на велику кількість малих проміжків, знайти зміну на кожному проміжку і додати ці зміни разом – зробити зрозумілим для комп’ютера.

Наприклад, ми можемо запропонувати комп’ютерові поділити відрізок інтегрування на мільйон рівних проміжків, знайти зміни на цих проміжках та сумарну зміну і обчислити наближене значення інтеграла.

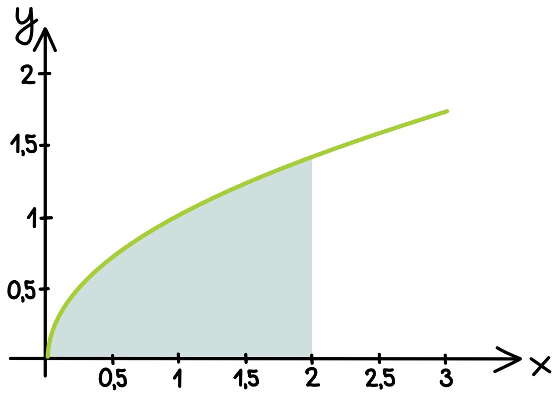
Звичайно, в такому разі ми завжди отримуватимемо трохи неточне значення, проте водночас, ми можемо зробити цю неточність настільки малою, наскільки лише забажаємо.



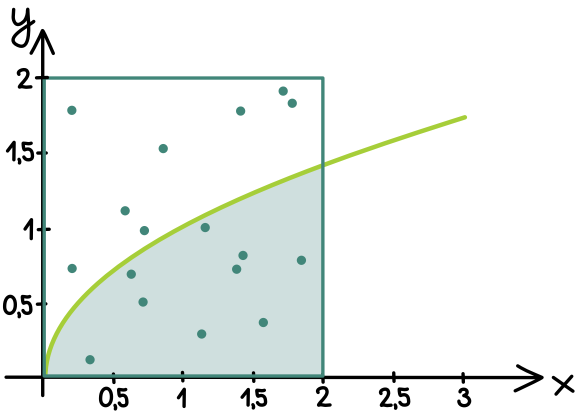
Але цей метод не є найбільш ефективним для обчислення інтегралів, і на сьогодні розроблено десятки алгоритмів, які є точнішими, надійнішими та ефективнішими.

Наприклад, інколи для обчислення інтегралів від дуже складних функцій та функцій багатьох змінних найкращим алгоритмом виявляється так званий метод Монте-Карло. Відрекомендуємо його простим прикладом: припустимо, що ми бажаємо знайти значення інтеграла

$$\int_0^2 \sqrt{x}\, dx.$$



Ідея методу Монте-Карло полягає у використанні так званої геометричної ймовірності [с. 402]: якщо ми візьмемо якусь випадкову точку з квадрата $[0;2] \times [0;2]$, то ймовірність того, що вона буде розташована під графіком функції $\sqrt{x}$, дорівнює відношенню площі під графіком до загальної площі квадрата.



Далі нам просто потрібно згенерувати випадкові точки і оцінити цю ймовірність. Але генерування відповідних випадкових точок – досить просте, і перевірити, чи розташована точка під графіком функції так само не вимагає багато часу. Отак і отримуємо один досить ефективний метод для наближеного обчислення інтегралів. Цього разу наша відповідь буде тим точнішою, чим більше випадкових точок ми використаємо.

ІНТЕГРАЛ ТА ПОХІДНА

Обернені операції в математиці – досить поширені. Можливо, найпростішим прикладом є обертання навколо точки: якщо ми обернемо наш малюнок на площині навколо деякої точки на 90 градусів за годинниковою стрілкою, то, обернувши його після цього на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо тієї ж точки, повернемо його назад у початкове положення. Про додавання і віднімання можемо так само думати як про обернені операції: якщо до деякого числа додамо три, а потім від результату віднімемо три, то повернемося на початок.

Інтеграл і похідна також поводяться по-різному щодо одне одного. Наприклад, можна вважати, що похідна обчислює швидкість зміни функції, а інтеграл додає зміни функції разом.

В описі руху історія є, приміром, такою:

- за допомогою відомої залежності довжини шляху від часу похідна дає нам швидкість руху,
- а інтеграл, так само, на основі швидкості руху обчислює пройдену відстань.

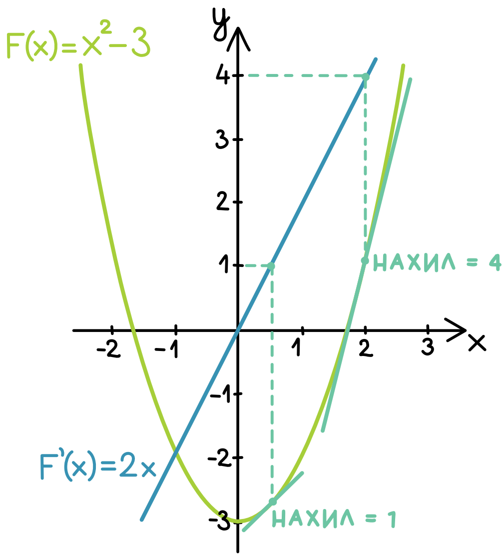
Отже, ми дійсно начебто маємо справу з оберненими щодо одна одної операціями. Точний зв'язок між інтегралом та похідною – лише трохи заплутаніший, трохи уваги потребує, наприклад, розрізнення між визначеним та невизначеним інтегралом.

Зв'язок між похідною та інтегралом також є корисним на практиці. З одного боку, користь – суто обчислювальна: ми можемо використати у знаходженні інтегралів знання похідних, і навпаки. З іншого боку, цей зв’язок дає певну концептуальну основу для опису багатьох явищ природи: для того щоб описати сумарну зміну, тобто інтеграл, якоїсь величини в часі, вистачить того, що ми опишемо її миттєву зміну швидкості, тобто похідну. Для застосування цієї простої ідеї існують диференціальні рівняння, що заклали основи більшої частини класичної фізики. Утім, на них ми довше зупинятися не будемо.

ПЕРВІСНА ТА НЕОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Нагадаємо, що якщо нам дано достатньо гладеньку функцію, для якої ми можемо в кожній точці знайти похідну, то ми можемо думати про похідну як про перетворення, що встановлює відповідність між функцією $F(x)$ та функцією, яка є її похідною $F'(x)$.

Як ми пам'ятаємо, геометрично це означає, що синій графік складений із нахилів дотичних до світло-зеленого графіка:

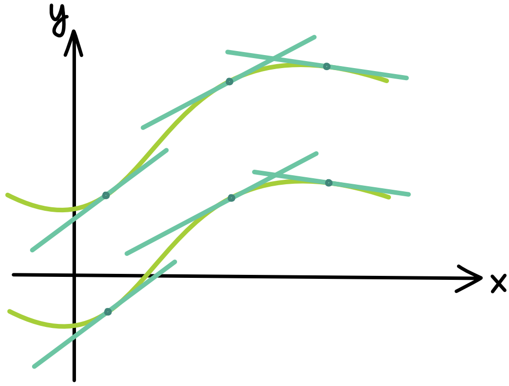


Тепер можна подумати і про перетворення, обернене до цього перетворення, – тобто запитати, що станеться тоді, коли ми захочемо почати, натомість, із синього графіка, і знайти функцію, нахили дотичних до графіка якої утворювали б цю синю пряму?

Інакше кажучи, ми б хотіли знайти функцію, для якої в кожній точці буде справджуватися рівність $F'(x) = f(x)$.

Усі можливі на це відповіді називають первісними для функції $f(x)$, і множину ми тут використовуємо цілком доречно – адже можливих відповідей багато!

Справді, якщо $F(x)$ – первісна для якоїсь функції $f(x)$, то первісною також буде і функція $F(x) + C$ при будь-якій константі C. Адже додавання константи C лише зміщує графік функції $F(x)$ вгору-вниз, проте не змінює швидкість її зміни – дотичні у відповідних точках залишаються паралельними. Направду виявляється, що більше нічого й не поробиш – ми отримуємо всі можливі первісні винятково завдяки переміщенню вгору-вниз.



Тепер невизначений інтеграл від функції $f(x)$ збирає всі можливі відповіді, тобто інакше кажучи, первісні, в тому самому виразі $F(x)+C$. Функція $F(x)$ позначає тут одну з можливих первісних, а C – довільну константу. Знаком невизначеного інтеграла є кривулька інтегралу без верхньої та нижньої межі. Отже, ми можемо написати:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

ПЕРВІСНА ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Насправді, за допомогою первісної, ми могли б визначити також і визначений інтеграл.

А саме, ми могли б сказати, що визначений інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ дорівнює зміні деякої її первісної на цьому відрізку. Тобто тоді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

де знову ж таки, $F(x)$ – це одна довільно вибрана первісна для функції $f(x)$.

Важливо зазначити, що від того, яку первісну ми обираємо, значення інтеграла не змінюється. Дійсно, адже у процесі віднімання константи знищуються. Міркуючи геометрично: якщо ми зміщуємо вгору чи вниз графік функції $F(x)$, то однаково змінюються її значення у початковій та в кінцевій точках відрізка, а отже, різниця між ними залишається незмінною.

ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРВІСНОЇ

Знайдений зв'язок також дає нам досить простий спосіб інтегрування – нам просто потрібно вгадати відповідну первісну, тобто знати похідні!

Справді, скажімо, для знаходження інтеграла

$$\int_0^2 2t dt$$

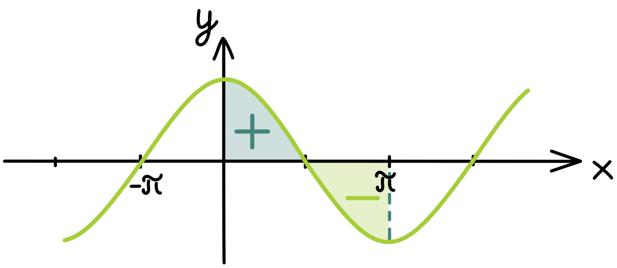
з яким ми зустрічалися в розділі про інтеграл, достатньо знати, що однією з первісних лінійної функції $2t$ є функція t^2. Після цього можемо записати:

$$\int_0^2 2t dt = t^2 \Big|_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4.$$

Або, наприклад, оскільки похідною функції синус є функція косинус, ми могли б записати:

$$\int_0^\pi \cos(t)\, dt = \sin(t) \Big|_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0.$$

Звичайно, це можна побачити також і на графіку, враховуючи симетрію графіка функції косинус і пам'ятаючи, що площа під віссю абсцис показує від'ємну сумарну зміну:



ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

Формулою Ньютона-Лейбніца називають уже наведений зв'язок між функцією $f(x)$, визначеним інтегралом від неї та зміною первісної:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Це – і є найточніше та найкорисніше формулювання зв'язку між інтегралом та похідною. Творці цієї формули, Ісаак Ньютон та Ґотфрід Лейбніц, ніяк не спромоглися дійти між собою згоди щодо того, хто з них, все-таки, заслужив більшого визнання. Обидва вважали саме свій внесок важливішим, і тому конфлікт продовжувався до смерті Лейбніца. Досить дріб'язковий конфлікт з приводу прекрасної математики.

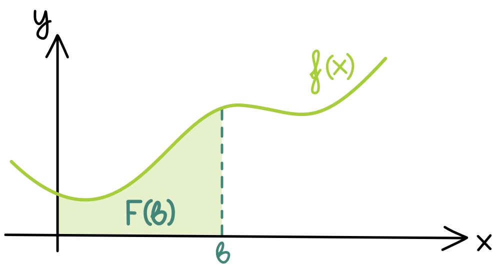
Якщо визначити через цей сумнозвісний зв'язок сам визначений інтеграл, то, звичайно, доводити цей зв'язок не потрібно, йдеться, скоріше, про закон чи аксіому.

Водночас зовсім незрозуміло, чому, все-таки, визначений через цей зв'язок інтеграл повинен бути пов'язаним із площами та їх знаходження через поділ на маленькі частини.

Переконати себе в існуванні цього зв'язку найпростіше геометрично. Розгляньмо, наприклад, одну прекрасну неперервну функцію $f(x)$ на відрізку $[0, b]$ і почнімо з того, що визначений інтеграл

$$\int_0^b f(x)dx$$

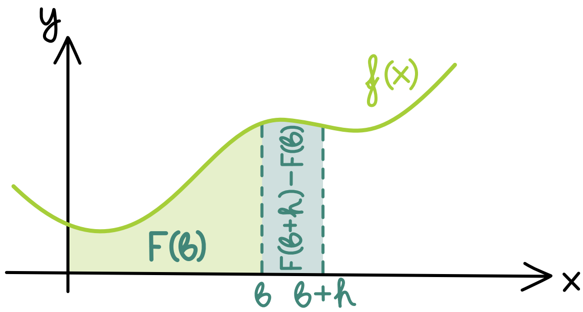
дає нам площу фігури між графіком функції $f(x)$ та віссю абсцис від нульової точки аж до точки b. Позначимо цю площу $F(b)$.



Похідна функції $F(x)$ в точці b означає тепер миттєву зміну площі. Згадаймо визначення:

$$F'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

Отже, про чисельник дробу ми можемо геометрично міркувати як про різницю площ фігур під графіком функції $f(x)$, що сягають точок $b+h$ і b відповідно:



Тобто,і площа правої частини фігури дорівнює $F(b+h)-F(b)$. Але для дуже малих значень h ця різниця – майже площа прямокутника. Отже, оскільки ширина прямокутника дорівнює h, то частка

$$\frac{F(b+h)-F(b)}{h}$$

дає нам висоту прямокутника.

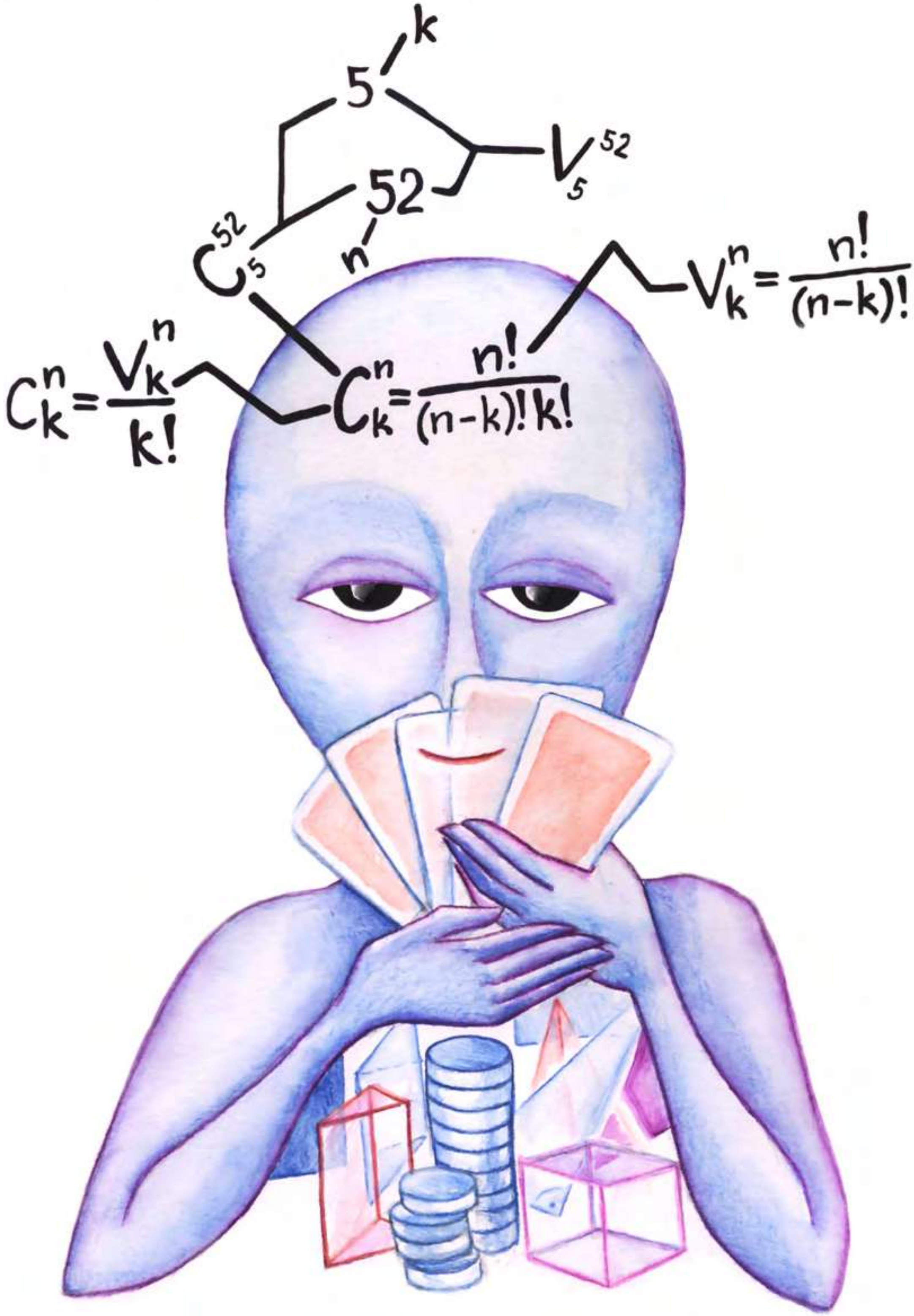
Але чим є ця висота? На малюнку ми бачимо, що висотою є значення функції f в точці, що лежить між b та $b+h$. Якщо зробити значення h нескінченно малим, то, звичайно, тоді висота дорівнюватиме значенню функції f у точці b. Отже, ми бачимо, що

$$F'(b)=\lim_{h\to 0}\frac{F(b+h)-F(b)}{h}=f(b).$$

Тобто, інакше кажучи, інтеграл, визначений через площу, славно дає нам первісну, і все сходиться.

ЧАСТИНА 8 –

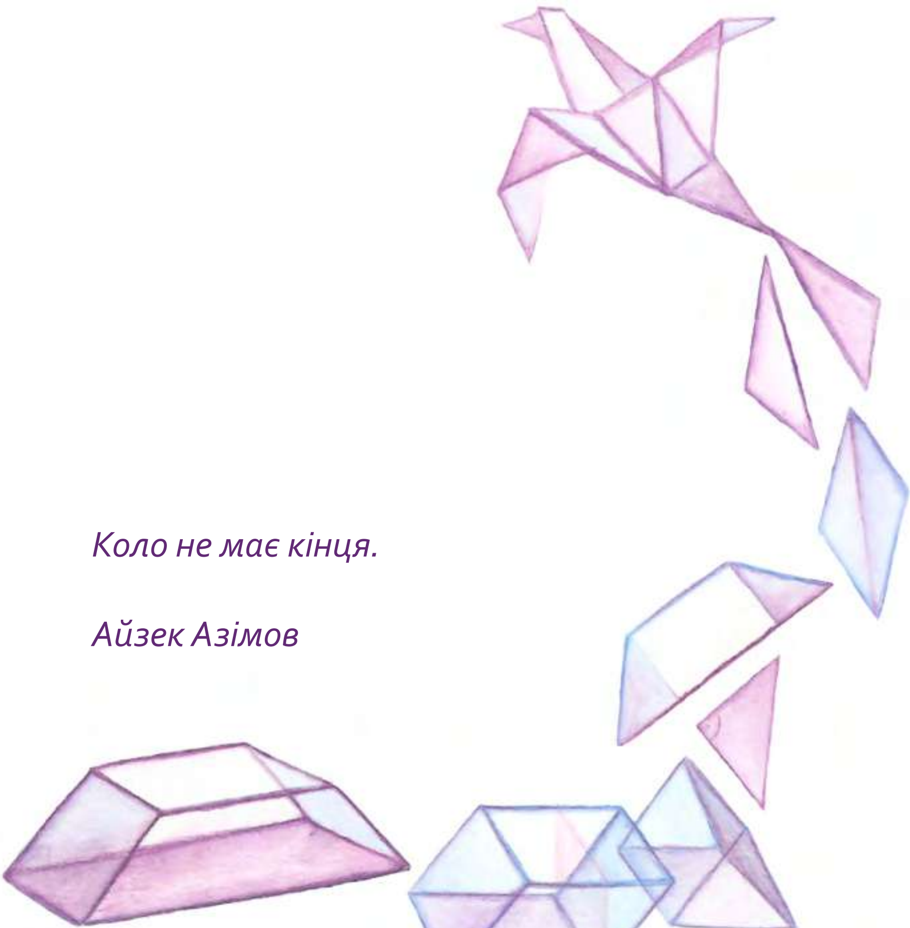
ПІДРАХУНКИ ТА ВИМІРЮВАННЯ



k
5
V_5^{52}
52
C_5^{52}
n
$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$
$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!}$
$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Коло не має кінця.

Айзек Азімов



ПЕРИМЕТР, ПЛОЩА ТА ОБ’ЄМ

Почнемо з невеликого роздуму над темою, що взагалі означає вимірювання. Що саме ми робимо, коли вимірюємо речі у щоденному житті?

Один із способів – розглядати вимірювання як певне порівняння із певною визначеною величиною. На лінійці або рулетці точно позначено, що ми можемо вважати одним сантиметром, а що – одним метром, і, порівнюючи з цими домовленими зразковими величинами, ми і знаходимо довжину своєї ноги чи носа. Для вимірювання ми можемо так само використовувати мотузку, про яку знаємо, що її довжина – один метр, керамічну плитку площею сто квадратних сантиметрів, або чому б і не пів літра води: ідея – знову і знову та сама, ми знаходимо, скільки разів уже відома нам величина покриває якусь довжину, площу чи об’єм.

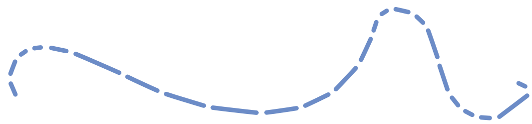
Отож, для вимірювання нам потрібен якийсь розумний «еталон», чию величину ми знаємо через його простоту, а крім того, потрібно мати хороші навички прикладати його до різних відрізків або поверхонь. Надалі ми покажемо, якими є математичні «еталони» і як їх хитро використовувати.

У реальному житті кожне вимірювання також супроводжується певною похибкою вимірювання – ми самі неточні у вимірюваннях, а також самі тіла не мають цілком ідеальної форми. Але в цьому розділі, ми займатимемось математикою, у якій зможемо всі вимірювання довести до абсолютної точності.

МАТЕМАТИЧНІ ЕТАЛОНИ: ВІДРІЗОК, КВАДРАТ, КУБ

Щоб виміряти периметр або довжину лінії, у нас наготові є велика кількість хороших вимірювальних інструментів: невеликих відрізків різної довжини. Очевидно, їх вистачить для вимірювання довжини кожної ламаної, що складається з відрізків:

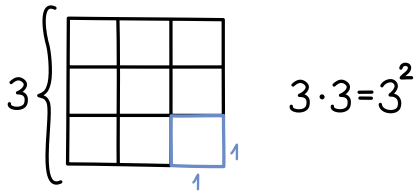
Але насправді, якщо ми згодні перетерпіти невелику похибку, то криві лінії також не обіцяють клопоту: а саме, у поділі кривої на дуже маленькі шматочки, кожен шматочок є майже відрізком прямої:



Математичного значення такому підходу дає інтегрування [с. 340], і ми повернемось до цього ще пізніше.

Для знаходження площі ми так само вибираємо найпростіші із можливих еталонів: квадрати з різними довжинами сторін. Але спочатку нам слід переконатися, що кожного разу ми знаємо площу кожного еталону.

На щастя, це не дуже складно: щойно ми дізнаємося, що, наприклад, площа одиничного квадрата дорівнює 1, ми зможемо порівнювати з ним інші квадрати, а малюнок допоможе нам упевнитися, що квадрат зі стороною a має площу a^2.



З математичними доведеннями, звичайно, слід бути трохи обережнішими.

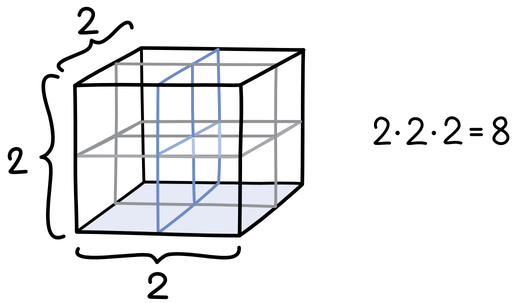
- Для квадратів, довжинами сторін яких є натуральні числа, ми можемо використовувати стратегію, наведену на малюнку.
- Для чисел $\frac{1}{n}$, обернених до натуральних, ми використовуємо протилежну до наведеної на малюнку стратегію: ми заповнюємо одиничний квадрат квадратами з довжиною сторони $\frac{1}{n}$.
- Тепер, використовуючи ці знання і, знову ж таки, діючи згідно з малюнком, ми можемо знайти площу квадрата у випадку, коли довжина його сторони є раціональним числом $\frac{m}{n}$.
- Наостанок мусимо щось зробити також зі сторонами, довжинами яких є ірраціональні числа. Тут потрібна дещо інша, але досить поширена стратегія, про яку ми писали більш загально з приводу неперервності функцій [с. 319] – ідея полягає в тому, що, якщо певна дійсна величина змінюється неперервно, то для її визначення достатньо знати її значення лише в раціональних точках.

Але в такому випадку, цю величину можна легко виписати до дрібниць.

Ідея полягає в тому, що для кожного ірраціонального числа a ми можемо знайти послідовність раціональних чисел q_n, границею якої буде обране нами ірраціональне число. Однак ми вже знаємо площу кожного квадрата, довжина сторони якого є раціональним числом q_n – нею буде q_n^2. Нарешті, якщо числа q_n збігаються до числа a, то квадрати цих чисел збігаються до числа a^2, що й дає бажаний результат.

Можна також запитати: чому площа одиничного квадрата повинна дорівнювати 1? У цьому місці прагматичний читач може вирішити, що це здається розумним вибором, а більш схильний до філософії читач хай думає, що думає.

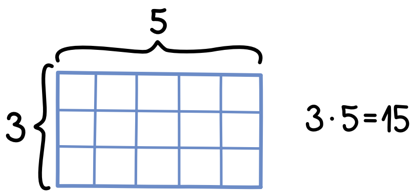
Для вимірювання об'ємів ми використовуємо куби, і , застосувавши аналогічні міркування, можна довести твердження: якщо a – довжина ребра куба, то його об'єм дорівнює a^3.



ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

КВАДРАТ І ПРЯМОКУТНИК

Поміркуймо тепер, як за допомогою наших квадратних шматочків розібратися із площею прямокутника. Якщо довжини сторін – досить дружні, то це просто: наприклад, на малюнку ми бачимо, що площа прямокутника зі сторонами 3 і 5 дорівнює $3 \cdot 5 = 15$, а площа прямокутника зі сторонами $\frac{3}{7}$ і $\frac{1}{2}$ дорівнює $\frac{3}{14}$.



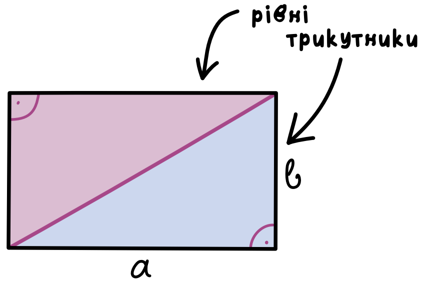
Очевидно, неважко помітити, що, наприклад, усі прямокутники, довжини сторін яких є раціональними числами, – дружні: ми завжди можемо знайти якийсь крихітний квадрат, щоб із нього та рівних йому квадратів скласти даний прямокутник. Кожного разу ми отримуємо результат, що площа прямокутника зі сторонами a і b дорівнює $S = a \cdot b$.

Далі, ми знову маємо скористатися вже згаданим під час знаходження площі квадрата «принципом неперервності» – якщо ми маємо якусь дійсну величину, що неперервно змінюється, то вистачить і того, що ми знатимемо її значення лише в раціональних точках. Отже, можемо стверджувати, що площа кожного прямокутника зі сторонами a і b дорівнює

$$S = a \cdot b.$$

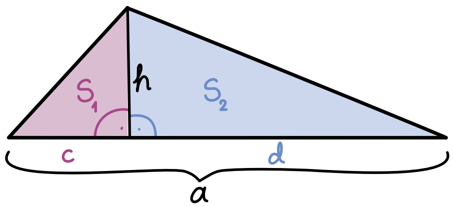
ТРИКУТНИК

Серед трикутників найпростіше почати з прямокутних трикутників – склавши два однакових трикутники разом, отримаємо акурат прямокутник:

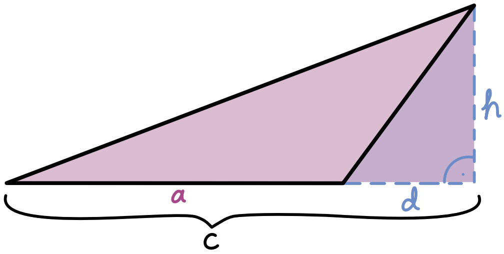


З цього, звісно, неважко зробити висновок, що площа прямокутного трикутника дорівнює половині площі утвореного прямокутника, тобто $S = \frac{a \cdot b}{2}$, де a і b – довжини його катетів.

Але тепер у ролі еталону ми вже можемо використовувати прямокутні трикутники, і це робить знаходження площі будь-якого іншого трикутника дуже легким: просто проведемо в трикутнику деяку висоту і розділимо його на два прямокутні трикутники!

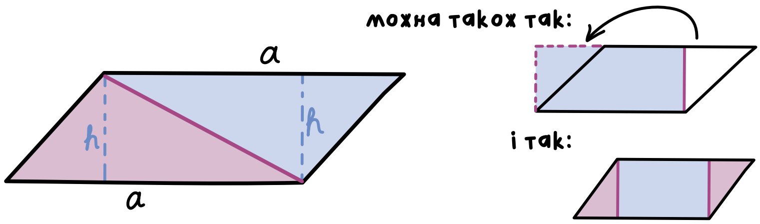


Навіть якщо малюнки – різні, ми бачимо, що результат буде однаковим як у випадку, коли висота всередині трикутника, так і тоді, коли висота проходить поза його межами – площа трикутника в обох випадках дорівнює $S = \frac{a \cdot h}{2}$, де a – довжина якоїсь зі сторін трикутника, а h – довжина висоти, проведеної із протилежної їй вершини.

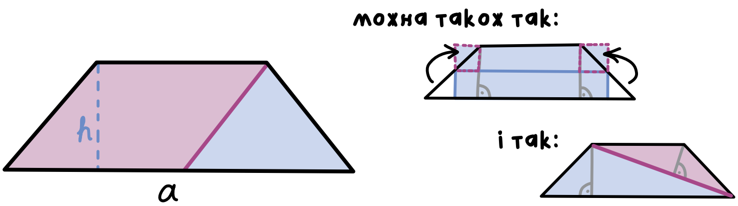


ПАРАЛЕЛОГРАМ ТА ТРАПЕЦІЯ

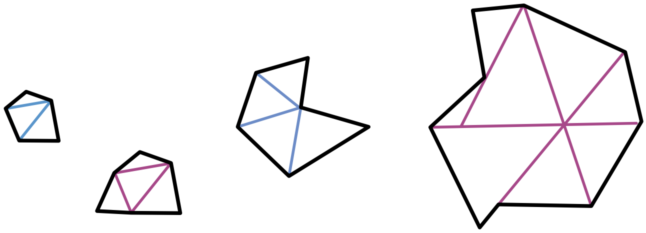
Паралелограм ми можемо просто поділити на два трикутники. Отже, ми бачимо, що площа паралелограма дорівнює $S = a \cdot h$, де a – довжина однієї з його сторін, а h – відстань між нею та протилежною стороною. Це витікає, звісно ж, із того, що на основі попереднього розділу площа кожного з двох трикутників дорівнює $\frac{ah}{2}$. Як бачимо на малюнку, формулу площі паралелограма ми можемо вивести принаймні ще двома різними способами:



А трапеція? Та сама історія, використовуємо дотеперішні еталони: прямокутні трикутники та прямокутники, і за допомогою маленьких хитрощів отримуємо результат, оголошений вчителем.



Насправді, тепер ми можемо знайти площу будь-якого п'ятикутника, шестикутника або навіть двохсоткутника, якщо тільки терпіння вистачить: адже ми завжди можемо розбити їх тим чи іншим способом на трикутники (так, як нам зручно) і додати площі усіх трикутників.



ДОВЖИНА КОЛА ТА ПЛОЩА КРУГА

За своєю сутністю коло – одна з найпростіших і найпрекрасніших фігур. Як ми бачили в розділі про відомі числа, його також можна багатьма способами визначити і багатьма способами про нього думати [с. 96]. Утім, незважаючи на те, що коло – це красива і проста, на перший погляд, фігура, математично з ним слід обходитися по-іншому, і навіть виявляється це трохи складнішим, ніж із многокутниками. Тим не менш, справи з довжиною кола не такі погані. Оскільки число π вже визначено як відношення довжини кола до діаметра ($\pi = \frac{P}{d}$), то довжину кола P звідти можна легко виразити:

$$P = \pi d.$$

Традиційно, це виписується за допомогою радіуса кола:

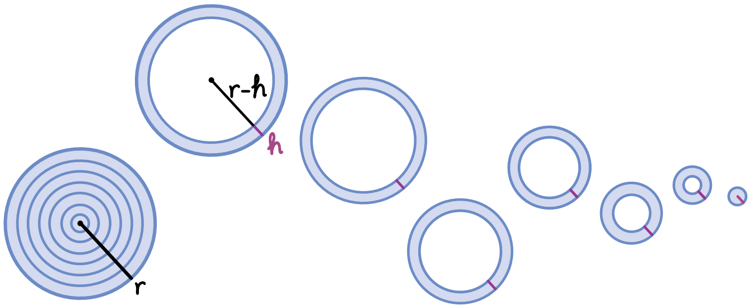
$$P = \pi d.$$

Але як знайти площу круга?

Нашими дотеперішніми еталонами площ тут скористатися важче – усі вони мали кути, тоді, коли коло – гарно вигнуте. Тож ми повинні бути хитрішими.

Утім, один із способів полягає у використанні вже відомих еталонів, але разом з інтегралом. Згадаймо, що за допомогою інтеграла ми можемо знайти площу фігури, розділивши фігуру на тонкі прямокутні шматочки та додавши їх площі. У результаті граничного процесу, коли тонких шматочків стає все більше і більше, ми й отримаємо у відповіді точне значення площі. У розділі про інтеграл [с. 347] розмова про це в нас була трохи детальнішою.

Тут ми використовуємо дуже подібну ідею, лише відмовляємося від поділу фігури на прямокутники, і ділимо її, натомість, на багато тоненьких кілець із шириною h, що вже дуже схожі на кола. Тоді їх радіуси змінюються від 0 до r з кроком h.



Кожне маленьке кільце робить свій внесок у площу початкового круга приблизно на $2\pi x h$, де x, – наприклад, зовнішній радіус кільця. Справді, якщо ширина h – дуже мала, то внутрішній та зовнішній радіуси кільця майже не відрізняються. Щоб знайти площу круга, ми мусимо потім додати всі ці маленькі площі й отримаємо:

$$S = 2\pi x_1 h + \cdots + 2\pi x_n h.$$

Числа $x_1, \ldots x_n$ утворюють арифметичну прогресію із різницею h, а отже, описуються лінійною функцією. Тепер мало би пригадатися, що це вже дуже схоже на опис нашого визначеного інтеграла. Справді, використавши граничний процес, коли ширина кілець $h \to 0$, ми можемо записати площу круга за допомогою визначеного інтеграла [с. 340]:

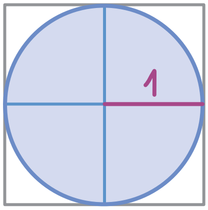
$$S = \int_0^r 2\pi x \, dx.$$

Далі залишається лише проінтегрувати, і ми знаходимо знамениту формулу площі круга:

$$S = \int_0^r 2\pi x \, dx = \left[2\pi \frac{1}{2} x^2\right]_0^r = \pi r^2 - 0 = \pi r^2.$$

Якщо ми хочемо побачити справу ще більше у світлі інтеграла та похідної, то можемо вважати, що швидкість зміни площі круга задає саме його периметр. Це цілком природно, оскільки збільшивши радіус круга зовсім трішки, на h, площа цього круга зміниться приблизно на hP. Отже, в цьому контексті h буде «параметром часу», а швидкість буде задавати саме периметр P.

Можна також ненадовго призадуматися, чи ця формула взагалі здається нам правдоподібною. Наступний малюнок, на якому зображено чотири одиничні квадрати і круг із радіусом 1, може переконати, що площа круга справді приблизно в $3–4$ рази (а отже, приблизно в π разів) більша, ніж площа одного квадрата.

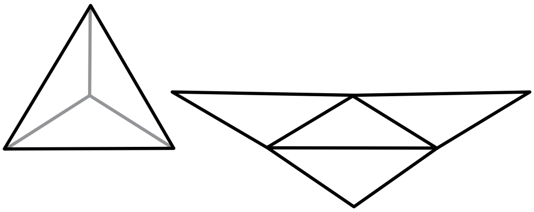


ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ОБ'ЄМНИХ ФІГУР

На додачу до двовимірних фігур нас, звичайно, може цікавити також і величина площі зовнішньої поверхні деяких тривимірних фігур.

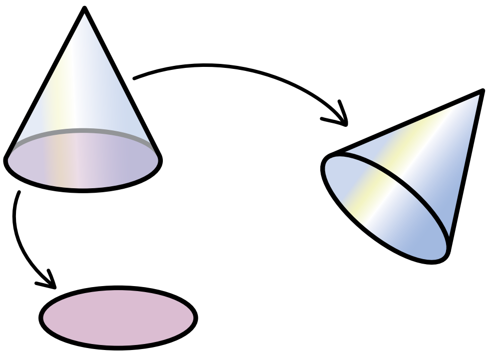
Із многогранниками, тобто всякими-різним паралелепіпедами та пірамідами, чиї грані є многокутниками, справи стоять досить просто: ми розрізаємо фігури вздовж ребер і обчислюємо площу кожної грані окремо. Додавши їх усіх разом, отримаємо площу повної поверхні.

Наприклад, для знаходження площі поверхні піраміди з трикутною основою ми мусимо додати разом площі чотирьох трикутників.



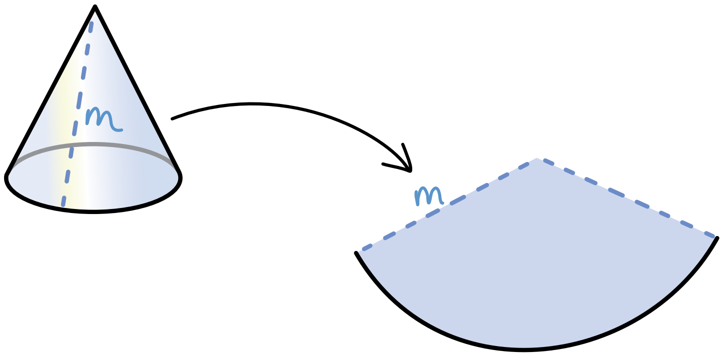
ПЛОЩА КОНУСА

Загалом, ситуація з більш опуклими тілами ускладнюється, але у випадку конуса, все-таки, допомагає досить подібна стратегія. Для початку можемо поділити поверхню конуса на дві частини – отримаємо круглу основу та бічну поверхню відомої форми.

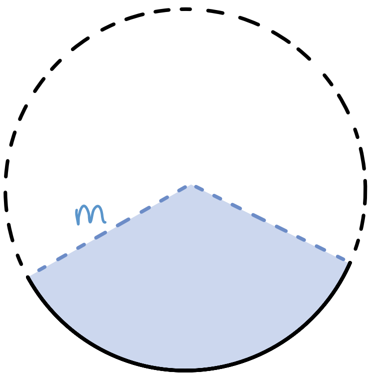


Оскільки ми вже вміємо знаходити площу круга, то обчислити площу основи – легко. Але як знайти площу цієї конічної частини, що залишилася?

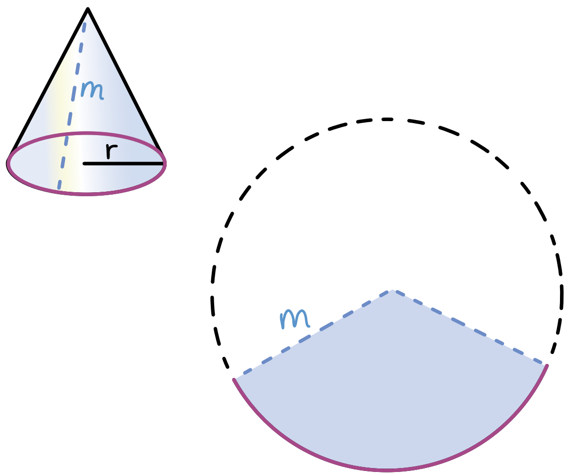
На цей раз нам допоможе розрізання та накладання на площину. А саме, якщо ми розріжемо бічну поверхню конуса вздовж твірної – тобто вздовж довільного відрізка, що сполучає вершину та точку, що лежить на колі основи конуса – і розгорнемо її на площині, отримаємо прекрасний круговий сектор.



Цей сектор складає певну частину великого круга з радіусом m, де m є так званою твірною конуса. Площу цього початкового круга ми, знову ж таки, вміємо легко знаходити: $m^2\pi$.



Отже, потрібно просто зрозуміти, наскільки велику частину цілого круга складає розпростертий сектор. Але відношення площі кругового сектора до площі цілого круга точно таке ж, як відношення довжини дуги сектора до довжини всього кола. Оскільки довжина цілого кола нам відома ($2m\pi$), то тоді вистачить лише довжини дуги сектора. Але довжина дуги сектора – це довжина кола основи конуса! Отже, якщо радіус основи дорівнює, скажімо, r, то тоді ми отримуємо довжину кола основи, а також довжину дуги: $2r\pi$.



Якщо ми поділимо отримані результати, то побачимо, яку частину складає площа сектора від загальної площі:

$$\frac{2r\pi}{2m\pi} = \frac{r}{m}.$$

Тепер ми можемо знайти площу бічної поверхні, помноживши отриману частку на площу великого круга:

$$S_{\text{бічної поверхні}} = \frac{r}{m} m^2 \pi = rm\pi.$$

Площа основи конуса дорівнює:

$$S_{\text{основи}} = \pi r^2.$$

Додавши її до площі бічної поверхні, можемо також знайти площу повної поверхні конуса:

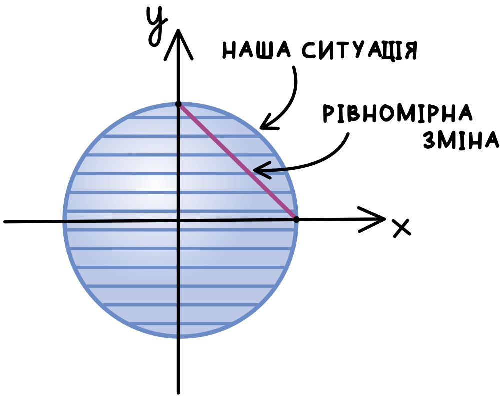
$$S = \pi r^2 + \pi m r.$$

ПЛОЩА СФЕРИ

Але для знаходження площі сфери декількох розрізань насправді більше не вистачить. Можете спробувати розумно розпростерти апельсинову шкірку на столі так, щоб жодна її частинка не була в повітрі – це буде непросто. Потрібно використовувати вже знайому з приводу знаходження площі круга стратегію інтегрування.

Інтуїтивно ми хотіли б також і цього разу поділити поверхню сфери на кільця, а після цього додати площі цих кілець разом.

Ситуація дещо складніша, порівняно зі знаходженням площі круга, оскільки самі площі кілець більше не змінюються гарно та рівномірно.



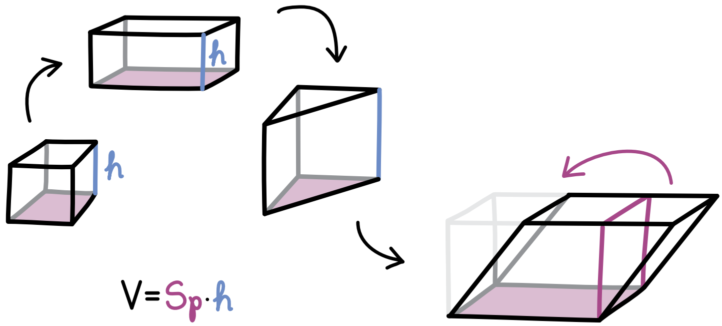
Отже, у цьому місці ми просто обмежуємося формулою площі сфери:

$$P = 4\pi r^2.$$

Проте, бесідуючи про об'єм кулі, ми також дамо один спосіб знайти її площу поверхні.

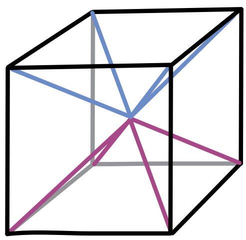
ДЕЯКІ ОБ'ЄМИ

Загалом, шукаючи об'єм, ми можемо поводитися цілком аналогічно, як і у випадку з площею: починаємо з об'єму куба, потім знаходимо об'єм прямокутного паралелепіпеда, після цього – об'єм призми і так далі.



Це трохи ускладниться у випадку з пірамідами, проте у біді нас виручить дрібка хитрості.

Наприклад, на наведеному малюнку ми бачимо, звідки береться сумнозвісна одна третя, принаймні у випадку правильної чотирикутної піраміди: а саме, ми можемо скласти одиничний куб із шести пірамід однакового об'єму. Водночас висота кожної піраміди дорівнює половині ребра куба.



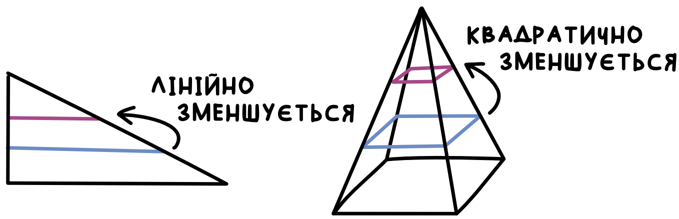
Виявляється, що придумування подібних конструкцій для всіляких можливих специфічних пірамід уже займає багато часу, хоча це, імовірно, можливо доти, допоки основа є многокутником. Знову ж таки, ідея полягає в тому, щоб почати із простіших типів пірамід, і крок за кроком іти в напрямку загальної форми – цей процес виявляється досить довготривалим, оскільки, по суті, ми повинні одну за одною складати кожну складнішу піраміду із більш простих.

Утім, можна стверджувати, що формула об'єму піраміди залишається незмінною: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{основи}} \cdot h$, де на цей раз $S_{\text{основи}}$ – це площа основи піраміди, а h – висота, проведена із протилежної їй вершини. Ця ж сама формула залишається істинною навіть тоді, коли основою є, натомість, круг.

Подібність наведеної формули до формули площі трикутника може спонукати замислитися, чи мають вони обидві якийсь зв'язок – адже в обох випадках ми говоримо про основу та висоту, а коефіцієнт на початку здається пов'язаним із числом вимірів простору. Насправді, цей зв'язок ґрунтується на дуже простій ідеї, про яку ми теж уже згадували.

А саме, розглядаючи площу круга, ми бачили, що похідною функції, яка виражає площу круга через його радіус, є довжина кола, яке його обмежує.

Так само можна переконатися, що швидкістю зміни функції, яка виражає залежність площі трикутника певної форми від його висоти буде довжина його основи. Але, якщо ми шукаємо об'єм піраміди в залежності від її висоти, то швидкістю зміни об'єму буде, натомість, площа її основи:



Тепер легко переконатися, що довжина основи трикутника лінійно залежить від його висоти – тобто, її можна описати за допомогою функції ax. Але об'єм піраміди відносно висоти змінюється як квадратична функція ax^2. У процесі інтегрування в першому випадку з'явиться коефіцієнт $\frac{1}{2}$, тож, якщо взяти константу інтегрування рівною нулю, то отримаємо

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2},$$

а під час інтегрування в другому випадку з'явиться коефіцієнт $\frac{1}{3}$:

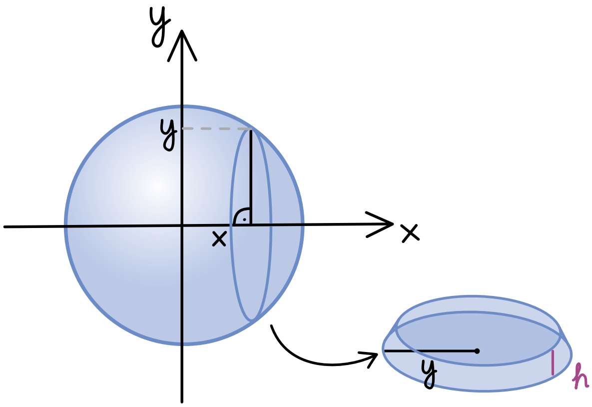
$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$$

Більш детальний приклад, що стосується першого випадку, ми бачили під час знаходження площі круга, а тепер продемонструємо другий випадок на прикладі обчислення об'єму кулі.

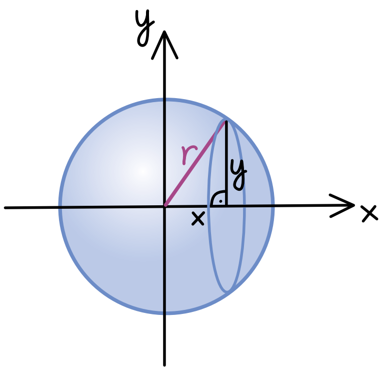
ОБ'ЄМ КУЛІ

Знову ж таки, об'єм кулі важко знайти лише за допомогою прямокутних еталонів. Мусимо використовувати стратегію, що допомогла у випадку площі круга – інтегрування. Інакше кажучи, ми розбиваємо кулю на багато тонких дисків, знаходимо їх об'єми й додаємо їх разом. У граничному процесі отримаємо інтеграл, який і дасть нам загальний об'єм [с. 347].

Позначимо буквою x горизонтальну відстань від центра кулі, а буквою y – радіус кола, що лежить на поверхні кулі на цій відстані. Об'єм диска, висота якого h, а основа знаходиться на відстані x від центра кулі, приблизно дорівнює $h \cdot \pi y^2$, тобто $\pi h y^2$.



Радіус цього кола y, який залежить від x та радіуса кулі r, можемо виразити за допомогою теореми Піфагора: $y^2 = r^2 - x^2$.



Додаючи об'єми усіх дисків, товщина яких стає все меншою і меншою, як і у знаходженні площі сфери, отримуємо інтеграл [стор. 340], водночас, аби потрапити з лівого краю на правий, горизонтальна відстань x буде змінюватися на відрізку $[-r, r]$. Отже, ми можемо записати об'єм як наступний інтеграл:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx.$$

Його ми вже вміємо обчислювати за допомогою шкільного підручника:

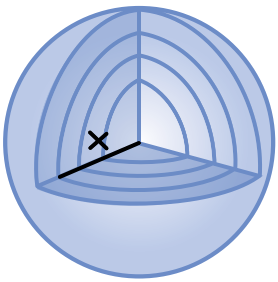
$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi \cdot \left(r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) - \pi\left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

У результаті й отримуємо формулу об'єму кулі:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Цікавим є те, що з цієї формули об'єму кулі ми тепер насправді можемо вивести також і формулу площі сфери. А саме, адже ми могли б також вважати, що куля складається не з дисків, а натомість – зі сферичних шарів:



Отже, ми отримали б об'єм кулі, якби додали разом об'єми цих сферичних шарів. Об'єм тонкого сферичного шару, що знаходиться на відстані x від центра кулі, дорівнював би тепер приблизно $S_x h$, де S_x – площа сфери з радіусом x, а h – товщина шару. Отже, аналогічно попереднім випадкам, ми можемо записати об'єм кулі як інтеграл від функції, що описує залежність площі сфери від радіуса:

$$V = \int_{0}^{r} S_x\,dx.$$

Але це означає саме те, що, якщо ми розглядаємо об'єм кулі як функцію від радіуса, то тоді площа поверхні кулі є похідною цієї функції! Отож, якщо ми вже знаємо об'єм кулі, то можемо знайти площу її поверхні, використовуючи зв'язок між інтегралом та похідною.

Справді, адже в розділі про зв'язок між похідною та інтегралом [с. 352] ми бачили, що невизначений інтеграл від функції $f(x)$ дає нам у результаті так звану первісну: функцію, похідна якої в кожній точці дорівнює функції $f(x)$.

Але тепер, коли ми розглядаємо площу поверхні кулі як функцію радіуса, об'єм дає одну із можливих первісних. Отже, аби знайти площу в одній точці, ми просто маємо знайти похідну об'єму в тій самій точці. Запишемо це за допомогою формул:

$$S_r = V_r' = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2.$$

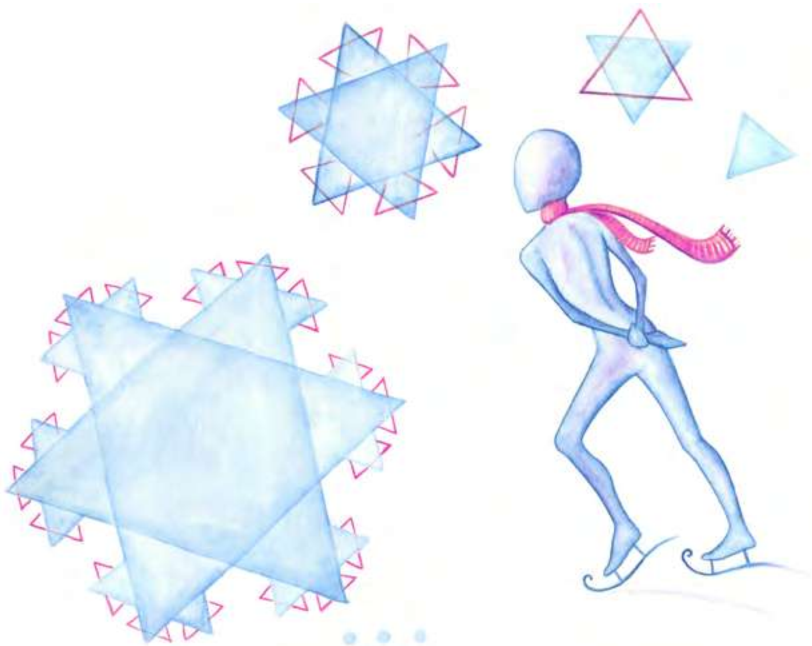
СНІЖИНКА КОХА

Звісно ж, нам би хотілося, щоб у математиці все було так, як підказує наша інтуїція. Утім виявляється, що щойно ми записуємо якесь строге математичне означення, воно немовби починає своє власне життя, вислизає з наших рук і влаштовує щось несподіване. Задля кращих стосунків із математикою, після цього нам часто доводиться виправляти свою інтуїцію.

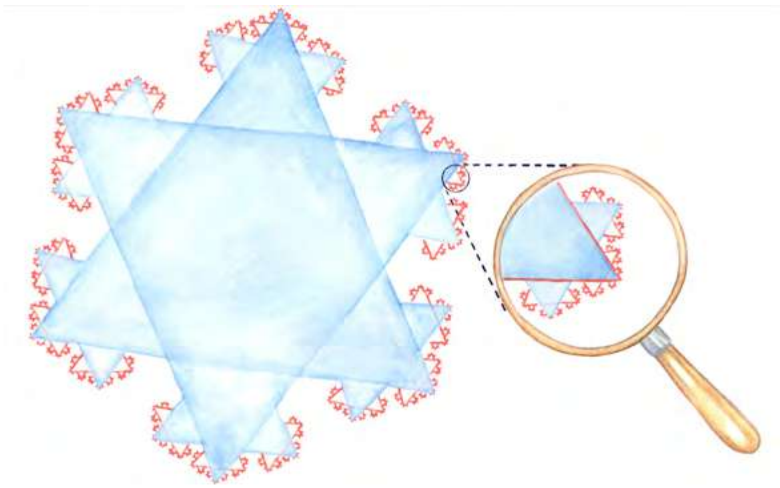
Далі ми опишемо одну фігуру, яка на початку скоріше виглядає як така, що суперечить здоровому глузду: вона має скінченну площу, але нескінченний периметр. Цю фігуру називають сніжинкою Коха.

Для отримання сніжинки Коха ми маємо використати такий алгоритм:

- почнемо з рівностороннього трикутника;
- як перший крок, ми ділимо кожну сторону на три рівні частини і на середній третині кожної сторони будуємо назовні рівносторонній трикутник,
- як видно на малюнку, тепер ми можемо розрізнити шість менших трикутників, кожен з яких має дві відкриті назовні сторони;
- далі, аналогічно до попереднього кроку, будуємо в центрі кожної відкритої назовні сторони новий трикутник;
- весь час продовжуємо і продовжуємо процес з новими, меншими сторонами ...



Як ми бачимо, виникає щось подібне до сніжинки. Якщо вперто продовжувати процес, то контур отриманої фігури під лупою будь-якого збільшення виглядатиме приблизно однаковим (завжди здаватиметься, що там є дві сусідні сторони, з побудованими посередині трикутниками, а тоді ще трохи маленького шумовиння):



Яким може бути периметр отриманої фігури? Якщо на початку довжина кожної сторони трикутника дорівнює 1, то після першого етапу ми замінили сторону чотирма відрізками, довжиною кожного з яких є $\frac{1}{3}$, тобто їх сумарна довжина дорівнює $\frac{4}{3}$. Із кожним наступним кроком відрізків стає в 4 рази більше, проте кожен відрізок – у 3 рази коротший, тобто загальна довжина відрізків збільшується в $\frac{4}{3}$ раза.

Отож, після сотого кроку загальна довжина відрізків буде вже $\left(\frac{4}{3}\right)^{100} \approx 3{,}1 \cdot 10^{12}$, а, продовжуючи процес нескінченно, периметр фігури стане нескінченно великим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n} = \infty.$$

Водночас, після детального розгляду виявляється, що площа цієї фігури не може бути дуже великою, і безумовно, вона повинна бути скінченною. А саме, сніжинка Коха завжди поміщається, приміром, у синій прямокутник, наведений на малюнку:

Після деяких розрахунків виявляється, що її площа дорівнює $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

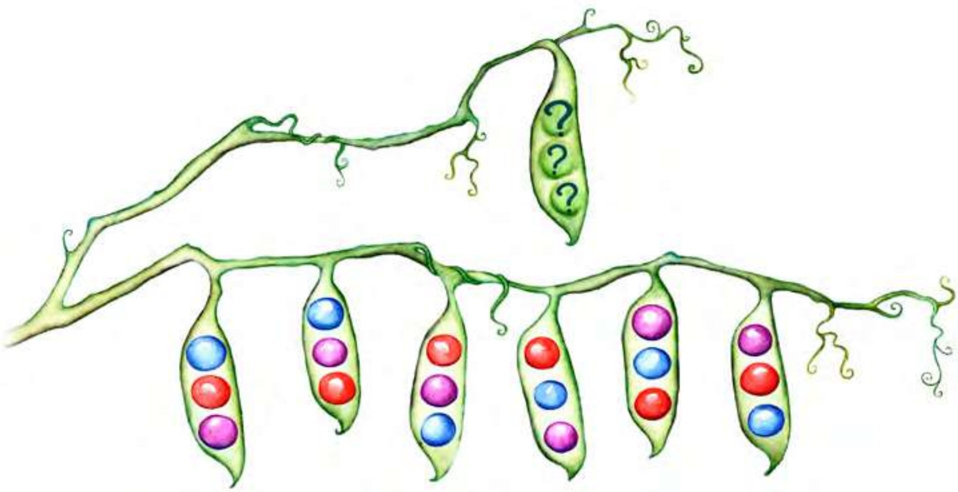
Якщо ми зараз замислимося, чому наведена ситуація здається парадоксальною, то очевидно, що причина – дуже проста: у повсякденному житті ми, напевно, не стикалися з такою фігурою, периметр якої був би нескінченним, а площа – скінченною. Наші інструменти просто не дають змогу вимірювати такі довжини: адже в реальному житті у нас, насправді, немає лупи з нескінченним збільшенням, якою ми скористалися б, а у випадку будь-якої лупи зі скінченним збільшенням, периметр сніжинки Коха здавався би також скінченним. Так само здається, що сьогоденній фізиці не хотілося б так просто допускати подібні фігури.

Однак, математиці ці міркування та обмеження не заважають – ми можемо так само вільно знайти, скажімо, тіла з нескінченною площею поверхні та скінченним об'ємом (наприклад, так звану трубу Гавриїла – тіло, придумане італійським математиком Торрічеллі) та інші подібні чудасії.

ПЕРЕСТАНОВКИ ТА ФАКТОРІАЛ

ПЕРЕСТАНОВКА

Перестановка – це просто певне вишиковування якихось фіксованих об'єктів. Наприклад, точна розстановка членів футбольної команди під час співання гімну – це одна з можливих перестановок основного складу. Так само перестановками є шикування в шеренгу чотирьох олов'яних солдатиків на підвіконні та всі можливі речення, які можна утворити з трьох слів – мені, подобається, математика.



Здебільшого, у цьому розділі нас цікавить число перестановок, яке у випадку n об'єктів, позначається P_n. Звичайно, точна сутність самих предметів тут неважлива – у нас буде стільки ж перестановок із 10 олов'яних солдатиків, як і з 10 серйозних воєнних.

КІЛЬКІСТЬ ПЕРЕСТАНОВОК

Скільки речень можна утворити із трьох слів: мені, подобається, математика?

Задля задоволення та мотивації, ми їх спочатку, звісно ж, запишемо:

Мені подобається математика.

Мені математика подобається.

Подобається мені математика.

Подобається математика мені.

Математика мені подобається.

Математика подобається мені.

Отже, цих речень є рівно шість. Українська мова – славна, оскільки в багатьох інших мовах не всі із шести наведених речень були б граматично можливими, але в нас, з певними поблажками, – вони можливі.

Утім, очевидно, що було би приємніше, якби нам не довелося перераховувати всі речення, і ми відразу за допомогою формули змогли би сказати, скільки різних речень існує.

Як знайти таку формулу?

- Легко помітити, що в нас є три можливості вибору першого слова: мені, подобається чи математика.
- Коли ми вибрали перше слово, залишається рівно дві можливості вибору другого слова.
- Але коли і друге слово вибрано, ми можемо кинути третє слово туди лише в сам кінець.

На першому кроці ми мали 3 можливості, на другому – 2, а на третьому – лише 1 можливість. Оскільки всі варіанти – незалежні один від одного, то всього можливостей у нас рівно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Якби в нас було чотири слова, мабуть, не всі утворені речення були би граматично правильними, проте через подібне міркування, ми б усе одно побачили, що можливо скласти $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ різних речень.

Використовуючи аналогічні міркування, ми одержимо, що для n слів, кількість речень дорівнювала б $n \cdot (n-1) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, тобто іншими словами

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

ФАКТОРІАЛ

Виявляється, що множення послідовних чисел – це така приємна діяльність, яка до того ж так часто зустрічається, що їй узагалі варто дати власне позначення.

Отже, 10-факторіал позначає добуток перших десяти додатних цілих чисел $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$, а отже, n-факторіал це добуток $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. До 19 століття, n-факторіал позначали символом $\underline{n|}$. На щастя, французький математик з естетичним чуттям Крістіан Крамп незабаром виявив, що має справу не з бозна-яким прекрасним символом, і ввів у вжиток сьогоднішнє позначення: $n!$.

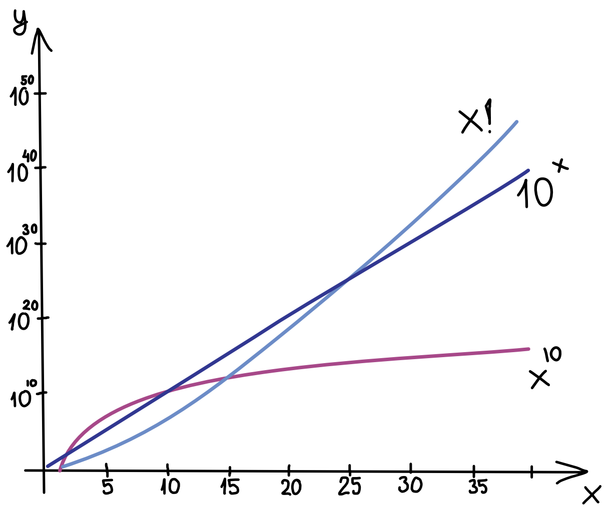
Як ми недавно прочитали, кількість перестановок із n об'єктів точно дорівнює n-факторіалу, тобто $P_n = n!$, оскільки математики символів не марнотратять.

ФАКТОРІАЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ*

Для факторіалу вражаючою є швидкість його зростання. Якщо ми почнемо обчислювати факторіал усіх чисел підряд, то невдовзі потрапимо в халепу – калькулятор відмовиться працювати!

Уже $20!$ дає нам число $2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$. Якщо порівняти факторіал із вже знайомими нам функціями, то факторіал зростатиме швидше, ніж який завгодно многочлен [с. 266], і навіть швидше, ніж яка завгодно показникова функція [с. 280].

Адже найпростіший спосіб отримати загальне уявлення – як завжди, власними очима подивитися на деякі приклади. Придивіться, як зростають три різні функції (бузкова – це многочлен, темно-синя – показникова функція, а блакитна – факторіал):



Факторіал вже досить скоро проноситься повз многочлен, а трохи пізніше проминає також і показникову функцію. Якщо малюнок сам собою ще недостатньо переконливий, то можна почитати також і наступне пояснення, яке, втім, на строгу математичну точність не претендує.

Звернімо увагу, що ...

1. Про зростання многочлена $y = x^{10}$ ми можемо думати так: якщо ми збільшимо його аргумент (значення змінної x) у 2 рази, то значення функції збільшиться в 2^{10} рази.
2. Про зростання показникової функції $y = 10^x$ ми можемо думати так: якщо її аргумент, тобто x, збільшити у 2 рази, то це буде еквівалентним піднесенню значення функції до квадрата.

Яка з цих двох функцій зростає швидше? Розгляньмо випадок, коли нашим аргументом буде дуже велике число, наприклад, 3^{50}. Внаслідок подвоєння значення цього аргументу значення многочлена збільшується лише в 2^{10} рази, а значення показникової функції – у цілих $10^{3^{50}}$ рази, отже, показникова функція зростає набагато швидше, принаймні на цьому проміжку. Швидке міркування показує, що, ймовірно, вона рано чи пізно вирветься уперед.

Але що означає подвоєння аргументу для факторіала?

Число $\mathrm{m}!$ стає $(2m)!$, а отже, для аргументу 3^{50}, внаслідок його подвоєння, замість початкового факторіала $3^{50}!$ ми отримуємо факторіал $(2 \cdot 3^{50})!$. Це означає, що ми знаходимо добуток $2 \cdot 3^{50}$ перших натуральних чисел.

Отож, факторіал зростає в

$$(3^{50} + 1) \cdot (3^{50} + 2) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 3^{50} - 1) \cdot (2 \cdot 3^{50})$$

разів. Але це число набагато більше за $10^{3^{50}}$ – ми маємо 3^{50} множників, кожен з яких більший, ніж 3^{50}!. Інакше кажучи, внаслідок подвоєння аргументу, значення факторіала у багато разів більше, ніж те, яке одержуємо внаслідок піднесення до квадрата. Знову ж таки, рано чи пізно, факторіал вирветься уперед, далі, ніж показникова функція.

Виходить, те, що факторіал зростає швидше, ніж показникова функція, а отже, також і швидше, ніж степенева функція, повинно бути цілком правдоподібним.

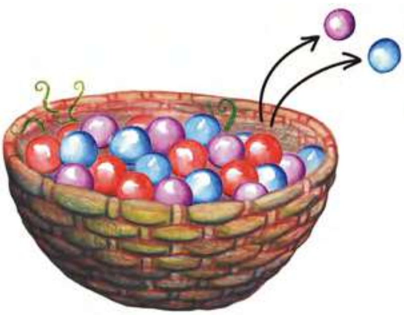
Відповідно, коли хтось говорить про експоненціальне зростання своїх багатств, то треба, звісно ж, і собі похвалитися та відповісти: це ще нічого, моє майно зростає фактично!

КОМБІНАЦІЇ ТА РОЗМІЩЕННЯ

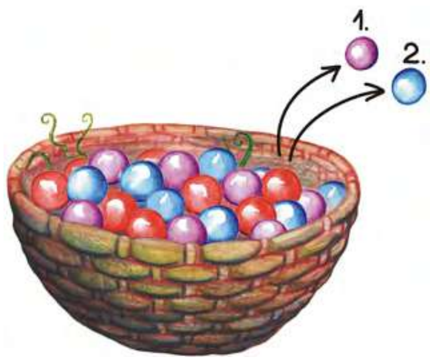
Якщо перестановки були пов’язані з порядком певних об’єктів, то комбінації та розміщення пов’язані з вибором об’єктів.

Однією комбінацією є, наприклад, три квіткові пуп’янки, вибрані на клумбі біля дому для другої половинки, або п’ять конкретних карт, розданих під час гри в покер, або троє учнів, що мають відповідати перед дошкою.

Тобто, інакше кажучи, однією комбінацією є вибір фіксованого числа об’єктів із-поміж фіксованої кількості об’єктів. У випадку комбінацій ми обираємо об’єкти без певної послідовності.



У випадку розміщень йтиметься також про подібний вибір об’єктів, але в цьому випадку, нас також цікавить і їх порядок – ми вибираємо трьох учнів, які повинні відповідати перед дошкою, і крім того, визначаємо ще й порядок, у якому вони відповідатимуть.



Розміщення та комбінації тісно пов’язані.

Ми отримуємо комбінацію із розміщення тоді, коли беремо розміщення, а після цього, забуваємо про порядок елементів. Наприклад, учитель може обрати для опитування на уроці трьох учнів, які відповідатимуть послідовно, а після цього передумати й запропонувати їм усім одночасно відповісти письмово, так що порядок більше не матиме значення.

Але розміщення із комбінації ми отримуємо тоді, коли беремо одну комбінацію, а потім також надаємо послідовність вибраним елементам. Наприклад, учитель може вибрати трьох учнів, які повинні відповідати, а потім призначити порядок, у якому вони будуть відповідати.

ЧИСЛО КОМБІНАЦІЙ ТА РОЗМІЩЕНЬ

Акул покеру (якщо вони хочуть бути небезпечними акулами), звісно ж, цікавить, скільки різних комбінацій можна утворити із карт однієї колоди, – це дає можливість підрахувати, приміром, наскільки великою є ймовірність, що якийсь інший друг за столом має кращі карти. Якщо ви граєте в покер, де кожному гравцеві роздають по п'ять карт, нас цікавить число комбінацій по 5 карт, які можна утворити із колоди, що налічує 52 карти. Це число позначається C_{52}^{5}. Більш загально, C_n^k, або $\binom{n}{k}$, і означає число можливостей вибрати k різних об’єктів із множини, що містить n об’єктів.

Наприклад, існує $C_{52}^{5} = 2\ 598\ 960$ різних комбінацій карт у покері.

Так само, число розміщень позначають через V_n^k. Наприклад, якщо з якихось причин нам захотілося б знайти число всіх можливих упорядкованих комбінацій карт у покері, то можна порахувати, що $V_{52}^{5} = 311\ 875\ 200$.

У випадку невеликих чисел, ми, звичайно, можемо перерахувати всі комбінації та розміщення, але як ми побачили, уже у випадку з комбінаціями карт йдеться про досить великі числа, і, розкладаючи усі набори карт підряд на столі, можемо непомітно й постаріти.

Отож, надалі ми спробуємо подумати, як знайти число комбінацій та розміщень, не перебираючи усі можливі варіанти.

ЧИСЛО РОЗМІЩЕНЬ

Передусім, знайдемо число розміщень. Міркування аналогічне знаходженню числа перестановок – адже визначення перших трьох елементів послідовності є нічим іншим як вибором трьох упорядкованих елементів.

Інакше кажучи, якщо нам потрібно вибрати, наприклад, 5 упорядкованих карт із-поміж 52, ми будемо обирати їх одну за одною, по черзі. Для першого вибору в нас є рівно 52 можливості, для другого вибору залишається тоді 51 можливість, для третього вибору – 50 можливостей, для четвертого – 49 можливостей, і п'ятого – 48 можливостей. Оскільки всі варіанти – незалежні, ми отримуємо, що $V_{52}^5 = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$, що й справді дає число $311\ 875\ 200$.

У загальному випадку за допомогою такого ж самого міркування, ми отримуємо, що $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Цей добуток ми також можемо записати у вигляді дробу за допомогою факторіалів: у чисельник дробу ми поміщаємо добуток усіх натуральних чисел від 1 до n, а за допомогою знаменника дробу, скорочуємо зайву частину добутку:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Насправді для знаходження числа розміщень ми могли б використати ще інші міркування і виходити безпосередньо з числа перестановок. А саме, про розміщення n елементів у ряд (тобто, про одну перестановку), ми можемо думати так:

1. Передусім, ми ставимо в ряд кілька k перших елементів, тобто з-поміж n елементів вибираємо k елементів; якщо враховувати також і порядок елементів, то це можна зробити V_n^k способами.
2. Після цього, розташовуємо в ряд всі $n-k$ елементів, що залишилися, тобто вибираємо одну із P_{n-k} перестановок.

Оскільки ці кроки – незалежні, загальне число перестановок із n елементів дорівнює

$$P_n = V_n^k \cdot P_{n-k},$$

тобто

$$V_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Але це й дає акурат попередню формулу, цього разу – разом із інтуїтивним поясненням.

ЧИСЛО КОМБІНЦІЙ

Аби на завершення знайти число комбінацій, нагадаємо зв'язок між комбінаціями та розміщеннями, про який ми згадували раніше: кожне розміщення, що містить k елементів, ми можемо розглядати як комбінацію, якщо забудемо про порядок елементів.

Але число послідовностей із k елементів дорівнює числу перестановок $k!$. Отже, з кожною комбінацією пов'язано рівно $k!$ різних розміщень. Отже, щоб отримати число комбінацій, ми повинні поділити число розміщень на $k!$, тобто

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

У попередньому підрозділі ми з'ясували, що для вибору 5 карт (якщо порядок – важливий) у нас є $V_{52}^5 = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311\,875\,200$ можливостей.

Якщо у нас є 5 карт, то перестановка карт показує різні можливості упорядкування цих карт, число яких дорівнює $5! = 120$.

Якщо порядок – неважливий, то для того, щоб взяти 5 карт із колоди, всього існує

$$C_{52}^5 = \frac{V_{52}^5}{5!} = \frac{311\,875\,200}{120} = 2\,598\,960$$

можливостей.

ЧАСТИНА 9 –

ІСТОРІЇ ПРО ТЕОРІЮ ЙМОВІРНОСТІ

Не впевнений, що нічого певного не існує.

Блез Паскаль

ЗНАЧЕННЯ ТА ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Імовірність здається простим та інтуїтивно зрозумілим поняттям. Імовірність певної події може означати саме те, як часто ця конкретна подія відбувається в порівнянні з іншими, конкуруючими з нею подіями.

Інакше кажучи, нам хочеться просто визначити мовою символів:

$$P\,(\text{подія } S) = \text{частота, з якою подія } S \text{ відбувається.}$$

Утім, це означення – доволі розмите, оскільки залишає досить багато запитань без відповіді.

- Які інші події ми мали би врахувати для розрахунку частоти? Якщо під час кидання гральних кубиків у саду біля дому у вас випала шістка, то це жодним чином не пов'язано, наприклад, із тасуванням колоди карт в Австралії, але пов'язано з двома-трьома киданнями того самого кубика.
- Скільки потрібно спостережень, аби мати можливість обґрунтовано розрахувати частоту події? Очевидно, що одного спостереження не вистачить – адже в цьому випадку ймовірність може дорівнювати або нулю, або одиниці. Але чи вистачить, наприклад, трьохсот?
- Що робити з подіями, які можуть відбутися щонайбільше один раз? Адже нам хотілося б порівняти ймовірності того, що той чи інший з наших друзів стане президентом, або навіть поговорити про ймовірність існування позаземного життя. У такому випадку міркування про ймовірність за допомогою частоти, очевидно, досить ускладнене.

Виявляється, що, незважаючи на ці запитання, імовірність – з усіх боків резонна ідея у багатьох різних ситуаціях. Її застосування справді вимагає трохи більшої точності, ніж ідея, запропонована спочатку. Далі ми пояснимо за допомогою кількох історій, як про ймовірність можна міркувати, як її можна застосовувати при описі життєвих ситуацій, і які небезпеки слід мати на увазі в обох випадках.

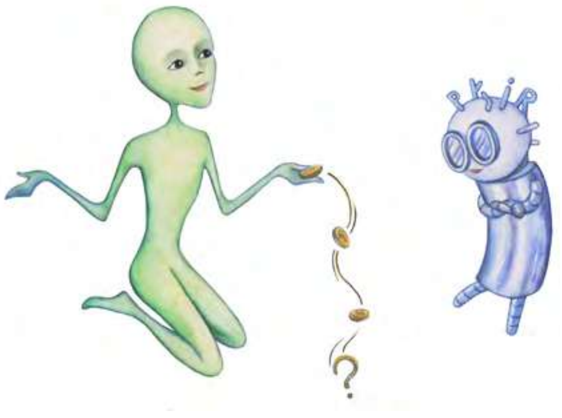
МАЛЕНЬКА ІСТОРІЯ ПРО МОНЕТУ, АБО ЩО, ВСЕ-ТАКИ, ОЗНАЧАЄ ЙМОВІРНІСТЬ?

Гензель і Ґретель сидять у темнуватій хатинці посеред лісу. Гензель, якому сидіння в темряві раптом починає набридати, запалює потайки взяту з собою свічку, дістає з кишені блискучу монету і приймається дражнити Ґретель теорією ймовірності.

Гензель: Ґретель, якщо я зараз кину свою монету, яка ймовірність того, що випаде орел, а не решка?

Ґретель: Дорогий Гензелю, ти напевно почнеш зараз хитрувати, але зараз я справді вважаю, що випадання орла або решки – абсолютно рівноможливі, а отже, шанси п’ятдесят на п’ятдесят.

Не мовлячи ні слова, Гензель кидає монету, але відразу, щойно монета опускається на тильну сторону його долоні, він накриває її другою рукою, так, що результату не бачать ні Ґретель, ні сам Гензель.



Гензель: А тепер, Ґретель, яка ймовірність того, що монета, яка перебуває під моєю рукою, приховує орла?

Ґретель: Я не звикла думати про ймовірність таким чином – адже монету вже кинуто, зараз вона або лежить орлом догори, або ні. Як я взагалі можу говорити про таку ймовірність?

Гензель: Але чи погодилася б ти, наприклад, із закладом, в якому я дам тобі дві шоколадки, якщо ми маємо справу з орлом, а ти мені – одну, якщо маємо справу з решкою?

Ґретель: Це здається щедрішим із твого боку, ніж зазвичай. Я справді погодилася б. Ти знаєш так само мало, як і я, і ми обоє думаємо, що монета зараз має однакові шанси лежати догори як орлом, так і решкою ... Мабуть, ти це мав на увазі під імовірністю? На мою думку, шанси того, що випав орел – як і раніше, п'ятдесят на п'ятдесят..

Гензель: Дуже добре, Ґретель, дуже добре.

Тепер Гензель сам зиркає на монету й каже Ґретель, що випав орел, проте все ще нічого Ґретель не показує.

Гензель: Якою зараз, на твою думку, є ймовірність того, що випав орел?

Ґретель: Саму монету вже давно кинуто, а щойно ти й сам сказав, що це орел, то як я можу говорити про ймовірність?

Гензель: Але ж Ґретель, раніше я також тобі сказав, що в мене немає жодної свічки, бо хотів трохи потримати тебе в темряві.

Ґретель: Отож, ти міг знову збрехати, як і раніше?

Гензель: Міг.

Ґретель: Монета – кинута, випав або орел, або решка, ти вже знаєш результат, і кажеш мені, що це був орел, і тепер я повинна сказати тобі, яка ймовірність того, що це був орел. Я більше нічого не розумію.

Гензель: Думай, Ґретель, а то я знову затушу свічку!

Ґретель: Та я ж намагаюся. Якби ти мені ніколи не брехав, то це точно був би орел, і ймовірність дорівнювала б одиниці. Якби ти брехав увесь час, то насправді випала б решка, а ймовірність того, що випав орел, дорівнювала б нулю. Якби весь час ти абсолютно довільно молов язиком, то сказане тобою можна було б зігнорувати, і ймовірність, знову ж таки, дорівнювала б 0,5. Але ...

Гензель: Але інколи, я все-таки говорю також і правду. Наприклад тоді, коли я сказав, що ми загубилися.

Ґретель: Так, на жаль чи на щастя, говориш. Отже, ймовірність того, чи випав орел чи ні, відтепер стала ймовірністю того, чи говориш ти правду чи ні.

Гензель: Чудово, Ґретель. Чи знаєш ти цю ймовірність?

Ґретель: Не знаю.

Гензель: Але чи змогла б ти її як-небудь знайти?

Ґретель: Якби я записала всі наші балачки на диктофон, а після цього – підрахувала, скільки разів ти збрехав, а скільки – сказав правду, то тоді я могла б цю ймовірність принаймні оцінити.

Гензель: Ґретель, записувати негарно, Едґар якось уже пробував.

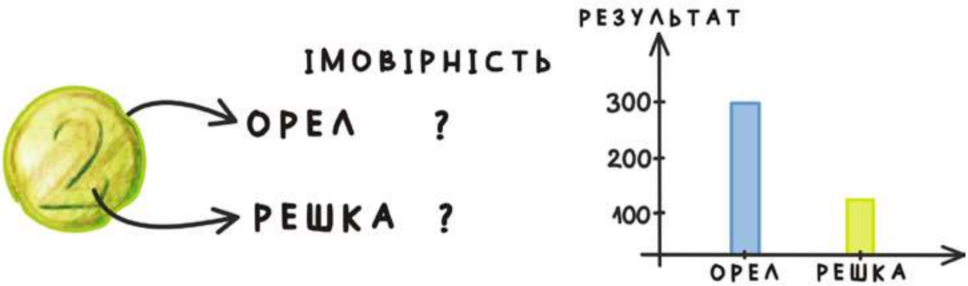
Ґретель: Правда, Гензелю, але яка ймовірність того, що я також на цьому попадуся?

ДОДАТКОВІ ЗАУВАГИ

Розмовляючи про ймовірність, необхідно бути дуже пильними щодо того, про ймовірність яких подій ми говоримо саме в даний момент. Кожен імовірнісний опис є насправді спрощенням світу – ми не знаємо точно, що станеться, але хочемо це передбачити чи описати. Для імовірнісного опису ми перелічуємо події, які можуть відбутися, і даємо їм оцінку, як часто відбуватиметься та чи інша з них. Ці оцінки – фактично і є так званими ймовірностями.

Як ми бачили, визначення цих оцінок чи ймовірностей залежить від наших власних знань. Якщо ми знаємо, що монета – симетрична, то можемо оцінити, що ймовірність випадання орла або решки – це рівно $0{,}5$.

Але, якби ми знали, що вона – трохи кривобока, то дати таку оцінку було б набагато важче – очевидно, нам би спочатку довелося зробити сотні підкидань і оцінювати ймовірність на основі їх результатів. Однак ця оцінка завжди залишатиметься орієнтовною, і просто відображатиме наші знання на той момент.



ПОЧАТОК ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, АБО ЯК НЕПРАВИЛЬНІ РОЗРАХУНКИ ВЕДУТЬ ДО БАНКРУТСТВА

Щодо виникнення теорії ймовірностей ходить цікава легенда. Згідно з цією легендою наріжним каменем теорії ймовірностей став аж ніяк не інтелектуальний інтерес, а натомість – пристрасть до азартних ігор. А саме: запеклий та визнаний азартний гравець і математик-аматор шевальє де Мере (1607–1684) раптом почав постійно програвати у грі в кості, правила якої сам же й придумав.

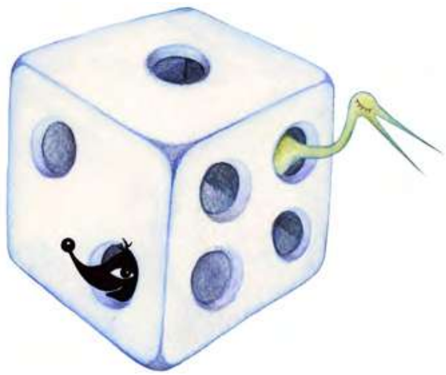
Щоб знайти рішення проблеми, він вирішив написати своєму хорошому другові, відомому французькому математику і філософу Блезу Паскалю (1623–1662). Цей стурбований лист, написаний у 17 столітті, згідно з сучасними уявленнями, і заклав основу для розвитку теорії ймовірностей.

У своєму листі шевальє де Мере жалівся Блезу Паскалю, що пара гральних кубиків, яка принесла йому багацько грошей, зараз почала раптом підводити.

Спочатку заклад був таким: шевальє де Мере стверджував, що спроможний кинути одну кістку чотири рази поспіль так, що принаймні один раз неодмінно випаде шість. Автору листа здавалося логічним, що з таким закладом, він мав би вигравати більше, ніж програвати, а перемоги, отримані з часом, лише поглибили цю віру. Якщо спочатку знаходилися дуже зацікавлені гравці, які були впевнені у своїх здібностях викидати шістки, проте заклади продовжувалися не так уже й довго – постійні виграші шевальє де Мере швидко скоротили кількість тих людей, які приставали на гру.

Отож, шевальє де Мере вирішив змінити правила гри. Тепер він стверджував, що спроможний, кидаючи дві кістки 24 рази, принаймні один раз отримати дві шістки. Він був переконаний, що і тут заклад повинен був бути на його користь. Однак бідний шевальє де Мере почав весь час програвати...

Оскільки його аргументи, на його власну думку, були досить математичними, він зайшов у своїй похмурості так далеко, що оголосив зв'язок між математикою та реальним життям неіснуючим. Утім, як ми скоро побачимо, математика з ним не зовсім згодна.



ЩО ДУМАЄ МАТЕМАТИКА З ПРИВОДУ ЗАКЛАДУ ШЕВАЛЬЄ ДЕ МЕРЕ

Шевальє де Мере стверджував, що спроможний:

1) кинувши одну кістку чотири рази поспіль, отримати принаймні одну шістку,

2) кинувши дві кістки 24 рази, отримати принаймні один раз дві шістки.

З першим закладом він багатів, проте із другим – стрімко втрачав своє добро. Із цими закладами, шевальє де Мере загрібав би гроші лише тоді, коли зумів би виконати ним обіцяне у більше ніж половині випадків.

Чи міг він передбачити, як часто вигроватиме чи програватиме?

Одною з можливостей було б використати ймовірнісний опис гри в кості. А саме: одним із трактувань імовірності, є саме частотою, імовірність показує, як часто відбувається та чи інша подія, згідно з нашим описом, у довгостроковій перспективі. Отже, «у більше, ніж половині випадків» означає, що ймовірність цієї події – більше, ніж $0{,}5$.

Ми бачимо, що люб'язний гравець в азартні ігри повинен був розбагатіти тільки тоді, коли б у нього був точний опис кидання кубиків, і ймовірність обох його обіцянок у цьому описі була би більшою, ніж $0{,}5$.

Імовірнісний опис кидання кубиків – досить простий. Допоки гра чесна (і навряд чи хтось гратиме в кості з шахраєм!), резонно припускати, вважати чи постулювати, що всі грані кубиків – рівноцінні: випадання будь-якої грані є рівноможливим. Отож, імовірність випадання будь-якої грані дорівнює $\frac{1}{6}$. У випадку першого закладу бажаною подією буде те, кидаючи одну кісту чотири рази поспіль, принаймні один раз випаде шість. Але виявляється, що легше розрахувати ймовірність протилежної до неї події – тобто ймовірність того, що при кожному киданні кістки випаде від одного до п’яти очок. У такому випадку достатньо дослідити кожне кидання окремо і скористатися правилом знаходження ймовірності добутку незалежних подій.

Імовірність того, що під час одного кидання випаде від одного до п’яти очок, дорівнює $\frac{5}{6}$. Але всі кидання – незалежні у сукупності, і ми можемо перемножити їх ймовірності, аби знайти ймовірність того, що в нас не випаде жодної шістки. Це буде якраз

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0{,}482.$$

Оскільки сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, то тоді ми робимо висновок, що ймовірність випадання принаймні однієї шістки становить приблизно $0{,}518$, тобто більше половини. Ось звідки взялися перемоги!

У випадку з другим закладом розрахувати ймовірність протилежної події – того, що кидаючи пару кубиків, дві шістки не випадуть ні разу – також легше. Імовірність того, що у киданні не випадуть дві шістки , дорівнює $\frac{35}{36}$, оскільки загалом існує 36 пар чисел, які є можливими варіантами. Отже, знову ж таки, використовуючи правило незалежних подій, ми знаходимо, що ймовірність того, що пара шісток не випаде у киданні двох кісток 24 рази, дорівнює $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}51$. Але це – більше, ніж половина! Отож, імовірність отримати 12 очок у киданні пари кубиків 24 рази так само є меншою, ніж $0{,}5$, і те, що шевальє де Мере залишився без грошей, – зрозуміло.

У будь-якому разі математика не винна!

У чому тоді помилився шевальє де Мере? Замість того, щоб ретельно обчислити (треба визнати, що на той час, звичайно, підносити числа до 24-го степеня було не так уже й просто), він повірив своєму способу мислення, що ґрунтувався на інтуїції. Він міркував, що випадання двох шісток за два кидання є в 6 разів менш імовірним, ніж випадання однієї шістки за одне кидання, а отже, щоб із ймовірністю, більшою ніж $0{,}5$, отримати принаймні один раз дві шістки, потрібно виконати не 4, а в 6 разів більше кидань. Чи не звучить це дуже навіть правдоподібно?

ЧИ СТАНЕ МОЯ ПОДРУГА ЧЛЕНОМ ПАРЛАМЕНТУ АБО ТРУДНОЩІ ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Було б чудово іноді попити чаю у Верховній Раді. Однією з можливостей реалізувати цю мрію було б те, якби ваша найкраща подруга стала членом парламенту. Це – зовсім не гарантовано, але очевидно, також і не абсолютно нереально. Чи можливо дати цьому якусь розумну імовірнісну оцінку?

Знову ж таки, для цього нам знадобився би певний імовірнісний опис. Найпростіший можливий опис стосується лише кінцевого результату: наша подруга або стане, або не стане членом парламенту, отож, у нас є рівно дві події, яким ми хотіли би приписати ймовірність. На додачу, сума цих ймовірностей все ще повинна дорівнювати одиниці – отже, по суті, залишається оцінити лише одну величину.

Але всі труднощі полягають у визначенні ймовірностей цих подій. Адже це і є точне перефразування нашого питання! Як визначити ці ймовірності?

Здається, що передумова рівноможливості тут не дійсна – все-таки, бачається імовірнішим те, що подруга членом парламенту не стане. Отож, очевидно, що варіант п'ятдесят на п'ятдесят нам доведеться виключити.

Статистика також не видається дуже корисною: адже в нас є одна конкретна подруга, і провести експеримент із нею ми можемо рівно один раз, і цей експеримент закінчиться лише через кілька десятків років! Отож, виявляється, що наша математична модель занадто точна – аби взагалі що-небудь сказати чи передбачити, ми маємо зробити її більш розпливчастою.

Один спосіб це зробити – відмовитись від унікальності нашого друга. Натомість, можемо запитати: яка ймовірність того, що дівчина стане членом парламенту? Тут ми й справді могли б підрахувати всіх громадянок нашої держави й поглянути, скільки з них стали членами парламенту, і оцінка – у нас в руках!

Проте, наша подруга – не просто якась там звичайна громадянка. У неї, наприклад, руде волосся. Можливо, це відіграє важливу роль, можливо, нам слід також це врахувати? Або те, що вона дуже розумна? Як це вирішити?

В ідеалі, слід зібрати статистичні дані! Вирішити, які чинники (колір волосся, освіта, розмір взуття тощо) відіграють роль при виборах до парламенту, а які – не відіграють. Занадто багато чинників взяти до уваги не зможемо – інакше ми знову потрапимо в ситуацію, коли лише наша подруга має всі ці характеристики. Водночас, враховуючи надто мало чинників, ми були б занадто неточними.

Знайти хороший імовірнісний опис і відповідні ймовірності – дуже важко. Іноді його намагаються перескочити і не уточнюють, про що йдеться в імовірнісному описі, або не вказують, звідки взято самі ймовірності – чи походять вони з припущень, чи спираються на певні дані, із яких даних вони випливають.

Наприклад, якщо реклама каже, що зубна паста вбиває 99% бактерій, то що це означає? Який імовірнісний опис за цим ховається?

Чи означає це, що на культури бактерій кілька разів накладали зубну пасту, і у 99% випадків, усіх бактерій було знищено? Які бактерії взагалі використовували в цьому випадку, чи ті, що знаходяться в роті, чи довільні, які, можливо, більш чутливі до фтору? У якому середовищі їх вирощували? Чому це повинно поширюватися на середовище ротової порожнини?

А може й справді, кількість бактерій у роті виміряли до і після чищення зубів, і кожного разу після чищення залишався лише 1% бактерій? Чи це був завжди рівно 1% чи 1% в середньому?

Число 99% – прекрасне, але що воно все-таки означає?

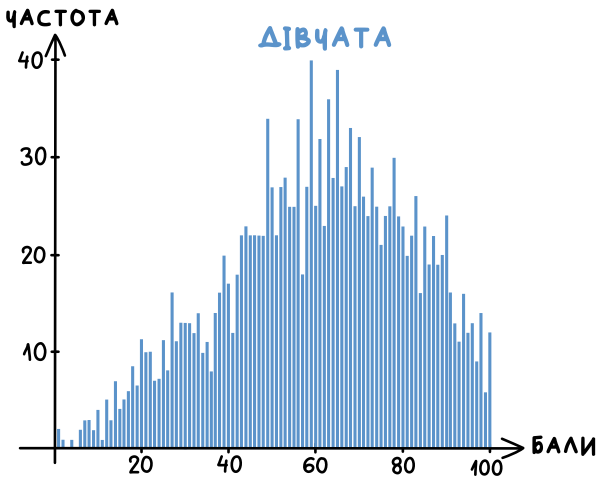
Хоча до всього варто ставитися з оптимізмом – адже жодна порядна людина шахрайської кампанії не організує – проте слід бути обережними. Щойно у повітрі запахне відсотками та ймовірностями, варто задуматися над тим, що все-таки за ними стоїть.

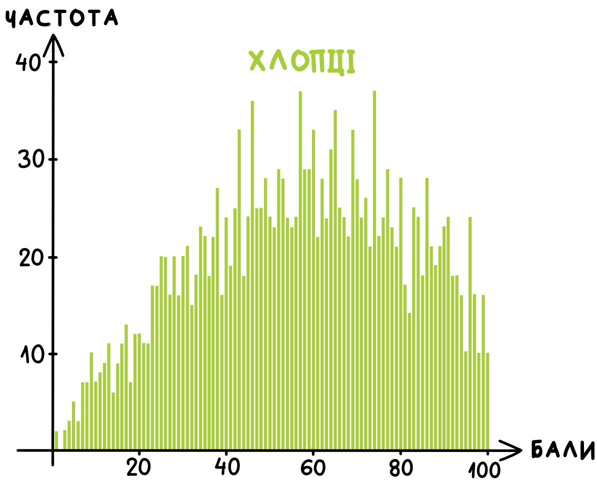
І якщо ви, все-таки, хочете попити чаю у Верховній Раді, то очевидно, що вам знадобиться більше, ніж одна подруга.

У КОГО ВИЩИЙ IQ АБО ПОРІВНЯННЯ РОЗПОДІЛІВ

Припустимо, що з якоїсь дивної причини нам захотілося порівняти між собою чоловіків і жінок або молодих і старих. Аби зробити загальні висновки в цьому випадку недостатньо порівняти вимірювання або результати, що стосуються якоїсь конкретної пари. Адже наприклад, для того, щоб сказати, вищі чоловіки чи жінки не можна взяти для порівняння найнижчого чоловіка та найвищу жінку. Потрібно, все ж, поскладати дані про зріст усіх чоловіків в одну полицю, дані про зріз усіх жінок – в іншу, і порівняти вміст цих полиць.

Всі дані з однієї полиці представлені за допомогою розподілу ймовірностей або частотного розподілу. Часто ці розподіли подаються графічно, за допомогою гістограми, що відображає, як часто відбувалася та чи інша подія. Наприклад, щоб трішки пострахати, тут ми наведено розподіл результатів іспитів з математики окремо для хлопчиків та дівчаток:





Оскільки у зіставлянні розподілів, ми порівнюємо вже не два числа, а дві наповнені числами полиці, то ні це зіставляння, ні зроблені на його основі висновки більше ніяк не будуть настільки простими та недвозначними.

Наприклад, припустимо, що у нас є два міста: Таллінн і Тарту, і нам відомі результати тесту на рівень IQ усіх жителів обох міст. У 20% жителів Тарту рівень IQ становить 200, а у 80% – 80. Усі жителі Таллінна мають однаковий IQ – 100.

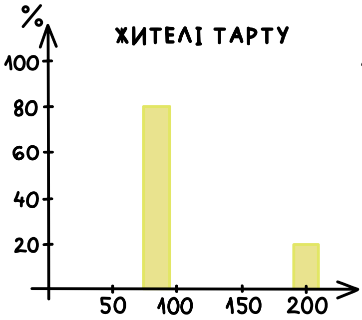
Яке місто має вищий рівень IQ?

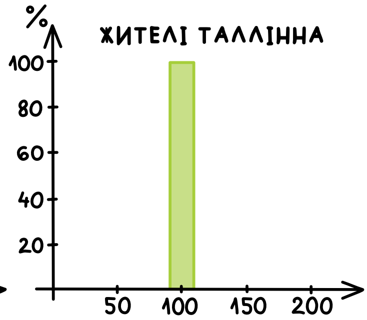
З одного боку, середній рівень IQ жителів Тарту: $0{,}2 \cdot 200 + 0{,}8 \cdot 80 = 104$, а жителів Таллінна – лише 100. З іншого боку, усі талліннці мають вищий рівень IQ, ніж цілих 80% жителів Тарту.

Виявляється, наше запитання – занадто неточне: що ми мали на увазі під вищим рівнем IQ одного міста? Те, що середній рівень IQ його жителів вищий? Те, що рівень IQ більшої частини його жителів вищий? Те, що мінімальний або максимальний рівень IQ жителів міста вищий? Або те, що всі ці показники вищі? Усі ці запитання – різні, і відповіді на них можуть бути суперечливими.

Отже, все недвозначно між собою порівняти не завжди можливо, і мабуть, не варто й намагатися, хоч би там що. Таллінн – чудовий, а Тарту – лише трохи чудовіше.

У цьому конкретному випадку ми могли б імовірно побачити також і з діаграм розподілів, що просте порівняння середнього означає небагато:





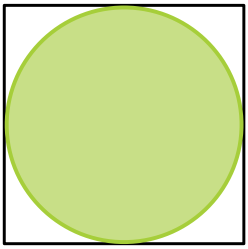
Часто порівнювати розподіли на основі їх графічних зображень – найпростіше. Це дає змогу легко помітити, який розподіл має більші максимальні результати, де приблизно знаходиться середній результат тощо. Може відразу впасти в очі, що зробити яке-небудь розумне порівняння неможливо.

ГЕОМЕТРИЧНА ЙМОВІРНІСТЬ, АБО ЯК ЗА ДОПОМОГОЮ ІМОВІРНОСТІ ЗНАЙТИ ЗНАЧЕННЯ ЧИСЛА π

У школі говорять також про поняття геометричної ймовірності. Геометрична ймовірність не є альтернативою математичній ймовірності, йдеться про просто ще один спосіб, як трактувати ймовірність і ставити питання. Тут ми також намагаємося описати певні події і виміряти їх обсяг, просто робимо ми це за допомогою геометрії.

У двовимірному світі геометрична ймовірність ґрунтується на площах. Ми інтерпретуємо все, що може трапитися за допомогою точок деякого обмеженого фрагмента площини, і подію, яка нас цікавить, пов'язуємо з точками певної фігури, що належить цьому фрагменту. Імовірність цієї події ми б отримали через знаходження відношення площ фігури та усього фрагмента площини.

Інвертувавши цей метод чи трактування, ми могли б, скажімо, знайти гарне наближення числа π [с. 99]. А саме, в квадрат, розмірами $1\ \text{м} \times 1\ \text{м}$, що розташований на підлозі, впишемо круг:

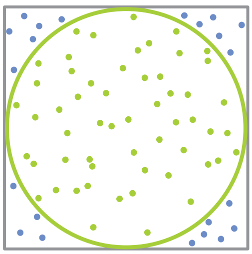


У цьому випадку, площа круга дорівнює $\frac{\pi}{4}$, а площа квадрата – рівно 1.

Тепер припустимо, що зі стелі нам вдається скидати клаптики паперу так, щоб вони падали в межах цього квадрата більш-менш рівномірно та випадково. Якщо клаптики досить малі, а стеля – досить висока, це повинно бути цілком можливим.

Тепер, з одного боку, ми знаємо, що відношення площі круга до площі квадрата дорівнює $\frac{\pi}{4}$, а отже, ймовірність попадання точки всередину круга – це точно $\frac{\pi}{4}$. З іншого боку, ми зможемо оцінити цю ймовірність, щойно кинемо кілька папірців. Кинувши їх досить багато, ми фактично отримаємо також і дуже хорошу оцінку числа π!

На малюнку це все можна зобразити приблизно так:



$$\pi \approx 4 \times \frac{\text{ЗЕЛЕНІ КЛАПТИКИ}}{\text{ЗЕЛЕНІ КЛАПТИКИ} + \text{СИНІ КЛАПТИКИ}}$$

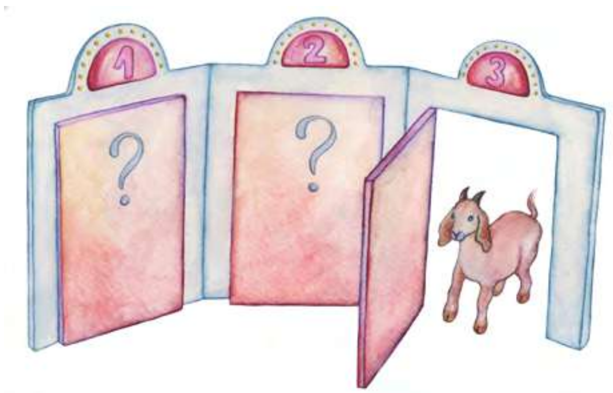
Ця ж сама процедура та ідея також є основою методу Монте-Карло обчислення інтегралів [с. 349]. Просто у цьому випадку папірцями більше не кидаються, а генерують випадкові точки за допомогою комп'ютера.

ІМОВІРНІСТЬ ТА ІНТУЇЦІЯ

У попередньому розділі ми бачили, що думати про теорію ймовірностей та використовувати ймовірнісні описи та інструменти на практиці – не завжди так легко, як можна було б подумати, коли використовуємо лише гральні кубики та монети. Можемо порадувати читача – насправді, справи ще божевільніші! Теорія ймовірностей дивує ще до зазирання в математичні та філософські глибини.

ЗАДАЧА МОНТІ ГОЛЛА

Припустимо, що ви берете участь у телевізійній грі і повинні вибрати між трьома дверима. За одними дверима – солідне спортивне авто, а за двома іншими – по понурій козі. Оскільки всі двері – абсолютно однакові, то очевидно, що спочатку ви оберете одні з них абсолютно випадково. Перш ніж всевідаючий ведучий гри Монті Голл відчинить вибрані вами двері, він відчинить ще одні із двох інших дверей, що залишилися. І він відкриє саме ті, за якими ховається засмучена коза. Тепер ведучий гри запитує вас: «Чи не бажали б ви змінити свій вибір?»



Природне запитання: чи була б ця зміна корисною?

Перша реакція може полягати в тому, що, якщо опісля залишилося двоє дверей, то тоді немає різниці, змінювати вибір чи ні – адже за одними зачиненими дверима є коза, а за іншими – авто, а отже, ймовірність виграти машину – рівно

0,5. Такі початкові інтуїтивні міркування поділяє багато людей, зокрема також і математики та науковці з гордими докторськими ступенями.

Утім, виявляється, що ця інтуїція – помилкова: насправді, завжди потрібно змінювати вибір дверей, у цьому випадку ймовірність виграти авто – аж дві третини.

Справді, припустимо, що спочатку ви обрали довільні двері. У третині випадків, ви відразу ж вибрали двері, де було авто. У цьому випадку зміна дверей невигідна – за іншими зачиненими дверима ховається коза.

Але у двох третинах (66,7%) випадків спочатку ви виберете двері, за якими стоїть коза. Оскільки ведучий гри самостійно відкриє другі двері, за якими стоїть коза, за останніми невідчиненими дверима залишиться авто. У цьому випадку зміна вибору – вигідна.

Отож, якщо ви жодного разу вибір дверей не змінюєте, то завжди виграватимете у першому варіанті розвитку подій, тобто, в третині випадків. Але, якби ви завжди змінювали вибір, то виграли б у двох третинах випадків.

Щоб уникнути плутанини, очевидно, найрозумніше буде спочатку відразу виписати, яким є імовірнісний опис усієї ситуації. Якщо після цього будемо уважними, то інтуїція не зможе утнути жарт за наш рахунок.

Для подальших роздумів ми залишимо таке запитання: як би змінилися ймовірності, якби телеведучий і сам не знав, що за дверима, і відкрив би двері з козою випадково?

ПАРАДОКС СІМПСОНА

Далі ми наведемо історію, що насправді народилася під час тестування препаратів для розчинення каменів у нирках. У 1980-х роках випробовували два різних препарати, обидва окремо, у лікуванні пацієнтів з дрібними каменями в нирках, та пацієнтів з великими каменями в нирках.

Отримані результати представлені в наступній таблиці, де наведено відсоток випадків одужання в кожній групі, а, на додачу, в дужках записана точна кількість пацієнтів, що належали до першої чи другої групи.

	Препарат А	Препарат Б
Дрібні камені	93% (81/87)	87% (234/270)
Великі камені	73% (192/263)	69% (55/80)

Як бачимо, на перший погляд, результати показують, що препарат А діє ефективніше як у випадку дрібних, так і у випадку великих каменів у нирках. Але, якщо прибрати розрізнення між великими та дрібними каменями, то об'єднані разом результати виглядатимуть так:

	Препарат А	Препарат Б
Камені в нирках	78% (273/350)	83% (289/350)

Тепер кращим виявляється, натомість, препарат Б! Можливо, у це важко повірити, то краще перевірте ретельно розрахунки й переконайтеся, що ми нічого не підлаштували.

Переконавшись у цьому, звичайно, доцільно запитати, якому препаратові ви б самі надали перевагу. Чи повинні ви знати, що у вас дрібні камені в нирках, щоб змінити свою думку? Досить важко вирішити!

Самі собою першопричини такої парадоксальної ситуації – не дуже складні. А саме: препарат Б вживало значно більше пацієнтів з дрібними каменями в нирках, у кого шанси на одужання – кращі, а отже, більшим є також і відсоток випадків одужання. Ці численні щасливі пацієнти також підвищили і загальну ймовірність одужання пацієнтів, які вживали препарат Б. У випадку лікування препаратом А пацієнти з дрібними каменями в нирках дійсно мали навіть більшу ймовірність одужання, проте самих цих пацієнтів було дуже мало, а отже, на сумарний відсоток одужання, передусім, повпливали пацієнти з великими каменями в нирках.

Звичайно, пояснення цих першопричин ще не дає хорошої відповіді щодо того, яким повинно бути правильне рішення. Рішення залежить від того, який імовірнісний опис ми вважаємо точнішим і хочемо застосувати. Результати, наведені в першій таблиці, відповідають точнішому описові: дрібні та великі камені в нирках тут розділені. Друга таблиця відповідає більш загальному описові: у тестуванні препаратів не враховується величина каменів у нирках.

Під час ближчого вивчення цих таблиць виявляється, що все ж таки розмір каменів у нирках відіграє певну роль у лікуванні та одужанні. Отже, здається природним, що якщо ми знаємо розмір наших каменів у нирках (а роздобути ці відомості не складно), то маємо скористатися більш детальним описом і вибрати препарат А.

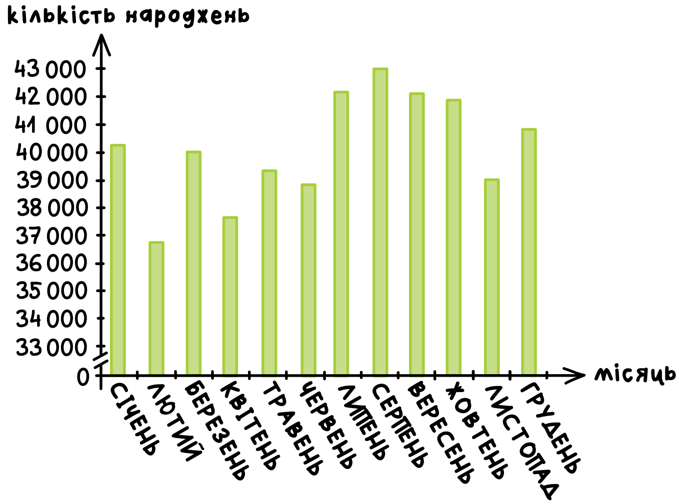
Єдина проблема може полягати в тому, що можливо, було занадто мало пацієнтів із дрібними каменями в нирках. Можливо, отриманий відсоток через це занадто неточний? Якщо ми цього боїмося, то мали б вибрати препарат Б. Як і раніше стоїмо перед вибором: або більш детальний опис і менше даних, або менш детальний – і більше даних. Насправді, вирахувати, чи переважає неточність деталізацію, чи ні, – з усіх сторін можливо, але це виходить за межі даної книги.

ЗАДАЧА ПРО ДНІ НАРОДЖЕННЯ

Якщо в класі навчається 36 учнів, то яка ймовірність того, що у двох із них день народження припадає на один і той самий день? Перш ніж перейдемо до розрахунків, запропонуйте свій варіант відповіді!

А тепер подумайте, що саме означає ця ймовірність. Як ми вже підкреслювали, використання слова «ймовірність» одразу вказує на те, що ми маємо на увазі якийсь спрощений опис. «Спрощений» означає те, що ми повинні робити, і робимо деякі припущення.

Наприклад, цього разу ми припускаємо, що ймовірність народження в кожний певний день року одна й та сама. Хоча насправді у будні дні народжується більше дітей, ніж у вихідні, і кожного місяця протягом року народжується різна кількість дітей: на діаграмі, знайденій в інтернеті, яка відображає деякий набір даних щодо народжуваності, ми бачимо, що маємо справу з цілком резонним припущенням.



По-друге, якщо серед учнів немає близнюків, то ми можемо сміливо припустити: те, що день народження будь-якого учня припадає на той чи інший день, не залежить від того, на які дні припадають дні народження інших учнів.

Отож, ми можемо вважати, що просто кидаємо 36 гральних кубиків, кожен із яких має 365 рівноцінних граней. Наше запитання: «Яка ймовірність, що у двох учнів день народження – у той самий день?» – можна тоді трактувати як запитання: «Яка ймовірність, що на двох кубиках випаде та сама грань із-поміж 365?».

Простіше знайти ймовірність події, протилежної до цієї: імовірність того, що всі кубики дадуть попарно різні результати.

Для цього починаємо обчислювати підряд. Якщо ми маємо лише 1 гральний кубик, то він безперечно дасть відмінний від попереднього результат. Якщо кинути тепер наступний кубик, то тоді ймовірність того, що результат буде іншим, дорівнює $\frac{364}{365}$. Якщо тепер взятися за третій кубик, то тоді у випадку, коли результати перших двох кубиків різні, ймовірність того, що нова кількість очок відрізнятиметься від них обох, дорівнює $\frac{363}{365}$.

Отже, ми можемо продовжити аж до 36-го кубика і знайти ймовірність того, що всі кубики дадуть попарно різні результати:

$$1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{331}{365} \cdot \frac{330}{365} \approx 0{,}168.$$

Отже, ймовірність протилежної події, того, що принаймні два кубики з-поміж 36 дадуть той самий результат, дорівнює $1 - 0{,}168 = 0{,}832$. Інакше кажучи, на основі цього опису та цих припущень імовірність того, що в одному класі з 36 учнями день народження двох учнів припадає на один і той самий день, є більшою, ніж $0{,}8$, тобто більшою, ніж 80%! Це – дуже багато!

Використовуючи той самий опис, можна також показати, що вже у класі з 23 учнями ймовірність того, що у двох учнів день народження, припадає на один і той самий день більша, ніж $0{,}5$. А як справи у вашому класі? Якщо цей результат здається несподіваним, то спробуйте тоді зрозуміти, чому ж він, все-таки, здається несподіваним!

■

Вітаємо!
Звідки б ви не почали, тепер ви дійшли до кінця «Вечірнього підручника».
Дуже дякуємо за читання!

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{rl} & 0{,}8(32)\cdot 10^3 = 832{,}(32) \\ - & 0{,}8(32)\cdot 10 = 8{,}(32) \\ \hline & (10^3-10)\cdot 0{,}8(32) = 824 \end{array}$$

$$0{,}8(32) = \frac{824}{990}$$

$$0{,}25 \cdot 100 = 25$$