

СЕРТИФІКАЦІЙНА РОБОТА З МАТЕМАТИКИ

Час виконання – 210 хвилин

Робота складається з 34 завдань різних форм. Відповіді до завдань 1–29 Ви маєте позначити в бланку **A**. Розв'язання завдань 30–34 Ви маєте записати в бланках **B** та **B**.

Результат виконання **всіх** завдань буде використано під час **прийому до закладів вищої освіти**.

Результат виконання завдань **1–26, 30 і 31** буде зараховано як результат **державної підсумкової атестації** для випускників, які вивчали математику на **рівні стандарту**.

Результат виконання **всіх** завдань буде зараховано як результат **державної підсумкової атестації** для випускників, які вивчали математику на **профільному рівні**.

Інструкція щодо роботи в зошиті

1. Правила виконання завдань зазначено перед кожною новою формою завдань.
2. Рисунки до завдань виконано схематично, без строгого дотримання пропорцій.
3. Відповідайте лише після того, як Ви уважно прочитали й зрозуміли завдання. Використовуйте як чернетку вільні від тексту місця в зошиті.
4. Намагайтеся виконати всі завдання.
5. Ви можете скористатися довідковими матеріалами, наведеними на сторінках 2, 23, 24. Для зручності Ви можете їх відокремити відірвавши.

Інструкція щодо заповнення бланків відповідей **A, B та B**

1. У бланк **A** записуйте чітко, згідно з вимогами інструкції до кожної форми завдань, лише правильні, на Вашу думку, відповіді.
2. Неправильно позначені, підчищені відповіді в бланку **A** буде зараховано як помилкові.
3. Якщо Ви позначили відповідь до якогось із завдань 1–20 у бланку **A** неправильно, то можете виправити її, замалювавши попередню позначку й поставивши нову, як показано на зразках:

А	Б	В	Г
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

А	Б	В	Г	Д
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Якщо Ви записали відповідь до якогось із завдань 21–29 неправильно, то можете виправити її, записавши новий варіант відповіді в спеціально відведених місцях бланка **A**.
5. Виконавши завдання 30, 31 і 32–34 в зошиті, акуратно запишіть їхні розв'язання в бланках **B** та **B**.
6. Ваш результат залежатиме від загальної кількості правильних відповідей, записаних у бланку **A**, і правильного розв'язання завдань 30–34 в бланках **B** та **B**.

Ознайомившись із інструкціями, перевірте якість друку зошита й кількість сторінок. Їх має бути 24.

Позначте номер Вашого зошита у відповідному місці бланка **A** так:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Зичимо Вам успіху!

ДОВІДКОВІ МАТЕРІАЛИ

Таблиця квадратів від 10 до 49

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Формули скороченого множення

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

Квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac \quad \text{— дискримінант}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{якщо } D > 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}, \quad \text{якщо } D = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Степені

$$a^1 = a, \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}} \quad \text{для } a \in R, n \in N, n \geq 2$$

$$a^0 = 1, \quad \text{де } a \neq 0 \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{для } a \neq 0, n \in N$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0, m \in Z, n \in N, n \geq 2$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Логарифми

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, k \neq 0$$

$$a^{\log_a b} = b \quad \log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$\log_a b^k = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Арифметична прогресія

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Геометрична прогресія

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (q \neq 1)$$

Теорія ймовірностей

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Комбінаторика

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! \quad C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

18. Установіть відповідність між виразом (1–3) і твердженням про його значення (А – Д), яке є правильним, якщо $a = -2\frac{1}{3}$.

Вираз

Твердження про значення виразу

1 a^2

А більше від 5

2 $a + |a|$

Б належить проміжку (0; 1)

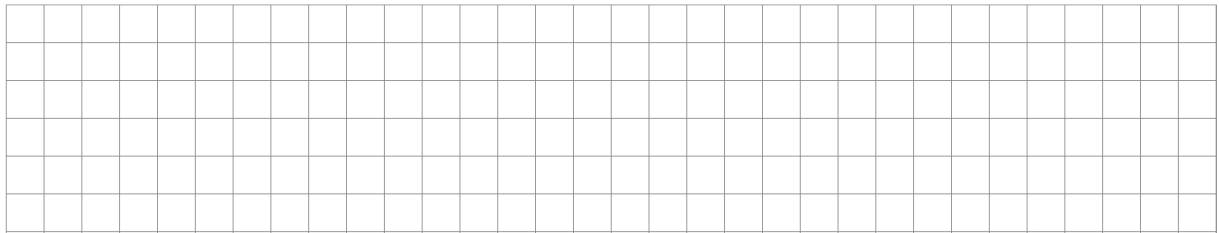
3 $\log_5 5^a$

В є від'ємним числом

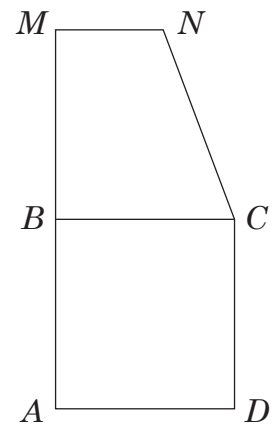
Г належить проміжку [1; 5)

Д дорівнює 0

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					



19. Квадрат $ABCD$ й прямокутна трапеція $BMNC$ лежать в одній площині (див. рисунок). Площа кожної із цих фігур дорівнює 36 см^2 , $AM = 15 \text{ см}$. Установіть відповідність між відрізком (1–3) і його довжиною (А – Д).



Відрізок

Довжина відрізка

1 сторона квадрата $ABCD$

А 2 см

2 висота трапеції $BMNC$

Б 3 см

3 менша основа трапеції $BMNC$

В 4 см

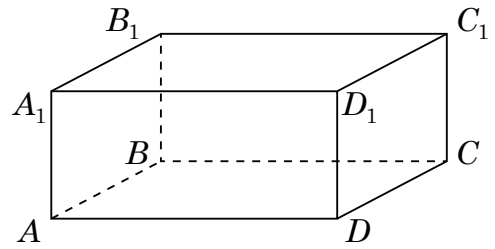
Г 6 см

Д 9 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					



20. На рисунку зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якому $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 2$. У відповідність початок речення (1–3) із його закінченням (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

Закінчення речення

- 1 Відстань від точки C до площини (AA_1B_1) дорівнює
- 2 Відстань від точки A до прямої CC_1 дорівнює
- 3 Відстань між площинами (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ дорівнює

- А 2.
- Б 3.
- В 4.
- Г 5.
- Д 7.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					



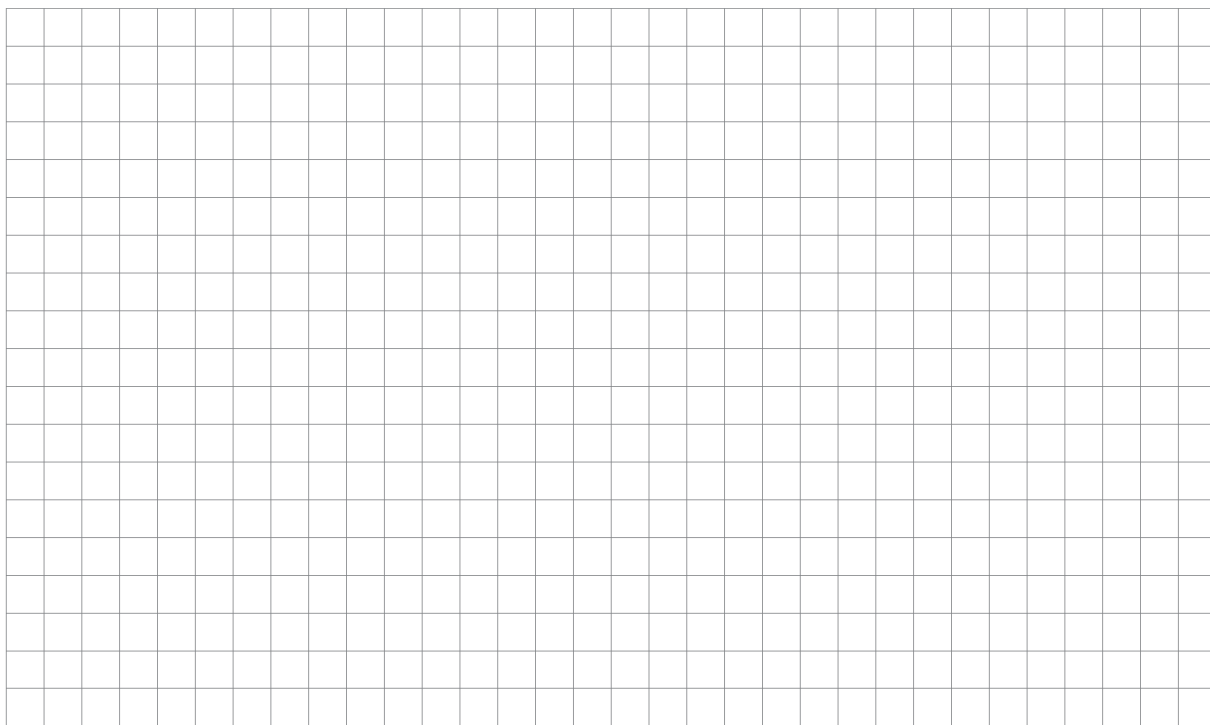
23. У прямокутній системі координат у просторі задано вектор $\vec{AB}(-3; 8; 1)$ і точку $B(7; -2; 0)$, точка O – початок координат.

1. Визначте ординату y точки $A(x; y; z)$.



Відповідь: ,

2. Обчисліть скалярний добуток $\vec{OA} \cdot \vec{AB}$.



Відповідь: ,

Розв'яжіть завдання 30, 31. Запишіть у бланку *Б* послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдань, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками тощо.

30. Задано функцію $y = x^3 - 3x$.

1. Для наведених у таблиці значень аргумента x визначте відповідні їм значення y .

x	y
0	
-1	
2	

2. Визначте й запишіть координати точок перетину графіка функції $y = x^3 - 3x$ із віссю x .
3. Знайдіть похідну f' функції $f(x) = x^3 - 3x$.
4. Визначте нулі функції f' .
5. Визначте проміжки зростання і спадання, точки екстремуму й екстремуми функції f .
6. Побудуйте ескіз графіка функції f .



Відповідь:

31. Осевим перерізом циліндра є прямокутник $ABCD$, сторона AD якого лежить в нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу дорівнює d й утворює з площиною нижньої основи циліндра кут β .

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндр і його осевий переріз $ABCD$.
2. Укажіть кут β , що утворює пряма AC із площиною нижньої основи циліндра.
3. Визначте об'єм циліндра.



Відповідь:

Розв'яжіть завдання 32–34. Запишіть у *бланку В* послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдань, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками тощо.

Увага! Умови завдань 31 і 32 мають спільну частину. Розв'язання завдань 32–34 запишіть лише в бланку *В*.

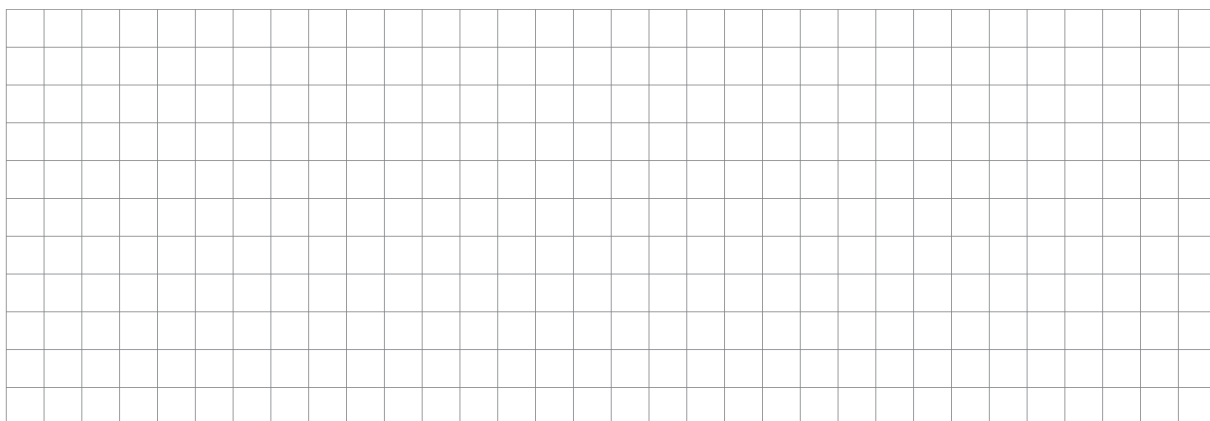
32. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник $ABCD$, сторона AD якого лежить у нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу дорівнює d й утворює з площиною нижньої основи циліндра кут β . На колі нижньої основи вибрано точку K так, що градусна міра дуги AK дорівнює 90° .

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндр і вкажіть кут γ між площиною (KBD) і площиною нижньої основи циліндра. Обґрунтуйте його положення.
2. Визначте кут γ .



Відповідь:

33. Доведіть тотожність $\frac{2a^2 + 5a - 3}{a + 3} = \frac{1 - 2a}{2\cos 240^\circ}$.



34. Задано систему рівнянь $\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1, \end{cases}$ де x, y – змінні, a – довільна стала.

1. Розв'яжіть систему, якщо $a = 0$.
2. Визначте всі розв'язки заданої системи залежно від значень a .





Відповідь:

Похідна функції

C, a – сталі

$$(C)' = 0$$

$$x' = 1 \quad (x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(u + v)' = u' + v' \quad (u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (Cu)' = Cu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Первісна функції та визначений інтеграл

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, C – довільна стала
0	C
1	$x + C$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ – формула Ньютона–Лейбніца}$$

Тригонометрія

$$\sin \alpha = y_\alpha \quad \cos \alpha = x_\alpha \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

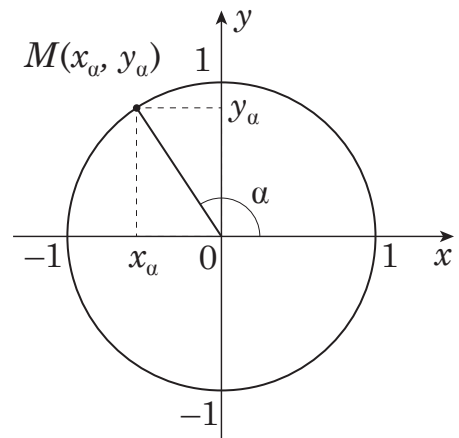
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

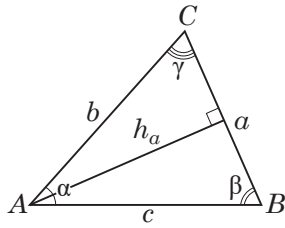


Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів

α	рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	град	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0

Трикутники

Довільний трикутник



$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

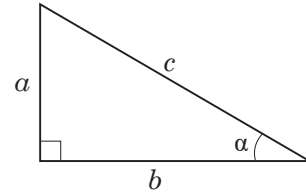
R – радіус кола, описаного навколо трикутника ABC

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a \quad S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Прямокутний трикутник

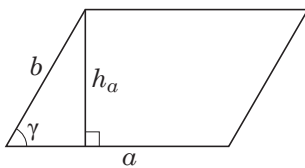
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (теорема Піфагора)}$$

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha \quad \frac{a}{c} = \sin \alpha \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$



Чотирикутники

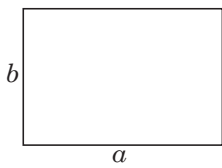
Паралелограм



$$S = ab \sin \gamma$$

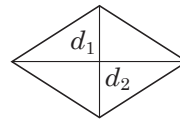
$$S = ah_a$$

Прямокутник



$$S = ab$$

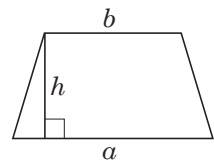
Ромб



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2,$$

d_1, d_2 – діагоналі ромба

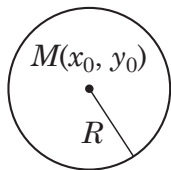
Трапеція



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

a і b – основи трапеції

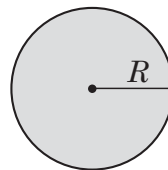
Коло



$$L = 2\pi R$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

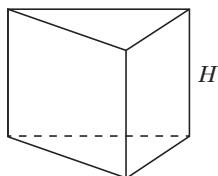
Круг



$$S = \pi R^2$$

Об'ємні фігури й тіла

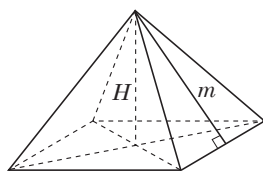
Пряма призма



$$V = S_{\text{осн}} \cdot H$$

$$S_6 = P_{\text{осн}} \cdot H$$

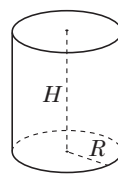
Правильна піраміда



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

$$S_6 = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot m$$

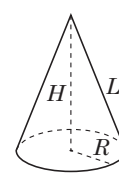
Циліндр



$$V = \pi R^2 H$$

$$S_6 = 2\pi R H$$

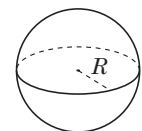
Конус



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$S_6 = \pi R L$$

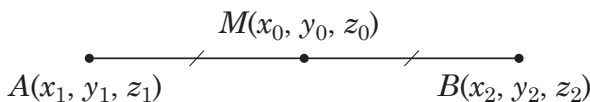
Куля, сфера



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

Координати та вектори



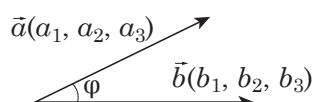
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

Кінець зошита