

Коментар
до завдання 34 сертифікаційної роботи
зовнішнього незалежного оцінювання 2020 року з математики

34. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через сторону AD нижньої основи й середину ребра $B_1 C_1$ проведено площину γ . Висота паралелепіпеда дорівнює 18, грань $CC_1 D_1 D$ є квадратом. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α .

1. Побудуйте переріз паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною γ .
2. Укажіть вид перерізу та обґрунтуйте свій висновок.
3. Визначте площу перерізу.

Завдання відповідає Програмі зовнішнього незалежного оцінювання результатів з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти (<https://testportal.gov.ua/progmath/>).

Завдання спрямовано на оцінку рівня сформованості компетентностей учасників тестування, а саме:

- зображати просторові фігури і їхні елементи, виконувати побудови на зображеннях, а саме конструювати переріз прямокутного паралелепіпеда площиною;
- вимірювати геометричні величини, які характеризують розміщення геометричних фігур, а саме довжини певних відрізків, необхідних для визначення площі перерізу;
- знаходити кількісні характеристики геометричних фігур, а саме площу перерізу паралелепіпеда;
- використовувати знання властивостей паралельних площин під час побудови перерізу та обґрунтування його виду.

За допомогою цього завдання перевіряють рівень оволодіння уміннями:

- будувати переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через сторону його основи й середину протилежної сторони іншої основи, й обґрунтувати його вид;
- зображати кут між діагоналлю паралелепіпеда і площиною його основи й обґрунтувати його положення;
- знаходити сторони прямокутного трикутника за відомими катетом і гострим кутом;
- використовувати теорему Піфагора для знаходження катета прямокутного трикутника за його гіпотенузою та іншим катетом;
- визначати площу прямокутника.

Щоби розв'язати це завдання, учасник має знати:

- означення прямокутного паралелепіпеда, січної площини, діагоналі паралелепіпеда, прямокутника;
- формулу для властивості паралельних площин;
- означення кута між прямою і площиною;
- співвідношення між сторонами й кутами в прямокутному трикутнику;
- теорему Піфагора обчислення площі прямокутника.

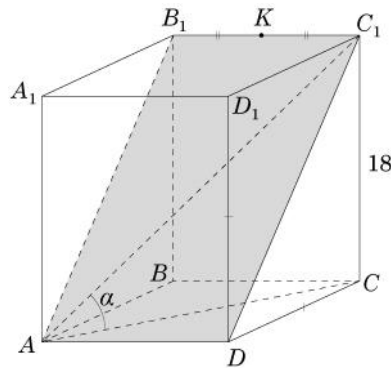
*Для виконання завдання необхідно **правильно**:*

- побудувати прямокутний паралелепіпед і переріз паралелепіпеда січною площиною γ ;
- зробити й обґрунтувати висновок про вид перерізу;
- визначити площу перерізу.

Розв'язання завдання 34

1. **Січною площиною** многогранника називають будь-яку площину по обидва боки від якої є точки даного многогранника. Січна площина перетинає грані многогранника по відрізках. Многокутник, сторонами якого є ці відрізки, називають **перерізом многогранника** (с. 177, <https://pidruchnyk.com.ua/1251-matematika-11-klas-ister.html>). У завданні січна площина γ проходить через сторону AD основи паралелепіпеда, отже через пряму AD , і середину ребра B_1C_1 , що не належить цій прямій. За теоремою про існування і єдиність площини, що проходить через пряму й точку, що їй не належить (с. 227, <https://pidruchnyk.com.ua/1154-matematyka-10-klas-ister.html>), площину γ в завданні задано **однозначно**.

Площина γ перетинає паралельні площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$, тому пряма перетину площини γ з площиною $(A_1B_1C_1)$ паралельна прямій AD (властивість паралельних площин).



Оскільки площина γ проходить через точку K , яка є серединою ребра B_1C_1 , і $B_1C_1 \parallel AD$, то B_1C_1 і є прямою перетину площини γ з площиною $(A_1B_1C_1)$. Відповідно, ребро B_1C_1 належить шуканому перерізу. Точки A та B_1 належать грані AA_1B_1B і площині γ , отже, і відрізок, що сполучає ці точки, тобто діагональ AB_1 грані AA_1B_1B , також належить січній площині γ . Аналогічно встановлюємо, що грань DD_1C_1C січна площина γ перетинає по відрізку DC_1 . Отже, шуканий переріз – чотирикутник AB_1C_1D .

2. Площина γ перетинає паралельні площини (AA_1B_1) та (DD_1C_1) по паралельних прямих AB_1 і DC_1 . Отже, чотирикутник AB_1C_1D є паралелограмом. Оскільки $B_1C_1 \perp (AA_1B_1)$, $AB_1 \in (AA_1B_1)$, то $\angle AB_1C_1 = 90^\circ$. Оскільки паралелограм, один із кутів якого дорівнює 90° , є прямокутником, то шуканий переріз AB_1C_1D – **прямокутник**.

3. Визначаємо площу перерізу. За умовою $\angle C_1AC = \alpha$, $CC_1 = 18$, грань CC_1D_1D – квадрат. Площу перерізу (прямокутника AB_1C_1D) визначаємо за формулою $S = AD \cdot DC_1$. $DC_1 = \sqrt{2}CC_1 = 18\sqrt{2}$. Довжину сторони AD можна визначити кількома способами.

Розгляньмо прямокутні трикутники ACC_1 і ADC_1 . Тоді $AC_1 = \frac{CC_1}{\sin \alpha} = \frac{18}{\sin \alpha}$;

$$AD = \sqrt{AC_1^2 - DC_1^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{\sin \alpha}\right)^2 - (18\sqrt{2})^2} = \frac{18}{\sin \alpha} \sqrt{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{18}{\sin \alpha} \sqrt{\cos 2\alpha};$$

$$S = \frac{18}{\sin \alpha} \sqrt{\cos 2\alpha} \cdot 18\sqrt{2} = \frac{324}{\sin \alpha} \sqrt{2\cos 2\alpha}.$$

Відповідь: $S = \frac{324}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sqrt{2(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}$ або $S = \frac{324}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{2\cos 2\alpha}$.