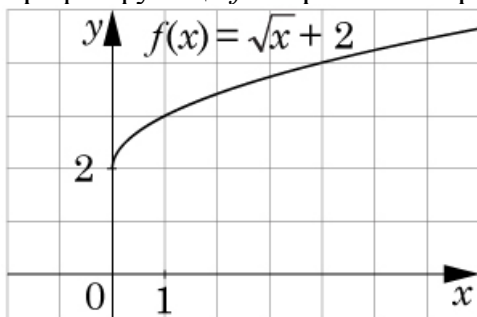


Розв'язання завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю з математики

Завдання 31

Розв'язання.

1. Графік функції f зобразимо на рисунку.



2. Координати точки $(x_0; y_0)$ перетину графіка функції f з прямою $y = 3$ є

$$\text{розв'язком системи } \begin{cases} y = \sqrt{x} + 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

$$\text{Одержуємо: } \sqrt{x} + 2 = 3, \sqrt{x} = 1, x_0 = 1, y_0 = 3.$$

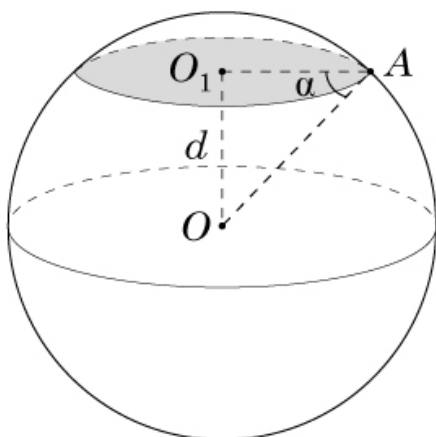
$$3. f' = (\sqrt{x} + 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 0,5.$$

4. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Ураховуємо, що $x_0 = 1$, $f(x_0) = y_0 = 3$, $f'(x_0) = f'(1) = 0,5$. Одержуємо: $y = 0,5(x - 1) + 3$, $y = 0,5x + 2,5$ – шукане рівняння дотичної.

Завдання 32

Розв'язання.

1. Перерізом кулі площиною β , що проходить через точку A , є круг, якому належить точка A (див. рисунок). O_1 – центр цього круга, $OO_1 \perp \beta$, отже, $OO_1 = d$.



2. OA – радіус кулі, проведений в точку A , O_1A – проекція OA на площину β , отже $\angle OAO_1 = \alpha$.
3. $O_1A = d \operatorname{ctg} \alpha$, $S_{\text{перерізу}} = \pi(O_1A)^2 = \pi d^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Завдання 33

Розв'язання.

1. $\pi^2 - x^2 \geq 0$; $x^2 - \pi^2 \leq 0$; $x \in [-\pi; \pi]$.

2. $\log_3 a(2 \sin^2 x - (2a - 1) \sin x - a) \geq 0$; $\log_3 a(\sin x + 0,5)(\sin x - a) \geq 0$.

Розглянемо випадки:

I. $a = 1$, тоді $\log_3 a = 0$ і нерівність набуває вигляду $0 \cdot (\sin x + 0,5)(\sin x - a) \geq 0$, тобто $0 \geq 0$. Її розв'язками є множина $x \in (-\infty; +\infty)$.

II. $a \in (0; 1)$, тоді $\log_3 a < 0$. Одержуємо: $(\sin x + 0,5)(\sin x - a) \leq 0$; $-0,5 \leq \sin x \leq a$;

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k \right] \cup \left[\pi - \arcsin a + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \right].$$

III. $a \in (1; +\infty)$, тоді $\log_3 a > 0$. Розв'язуємо нерівність $(\sin x + 0,5)(\sin x - a) \geq 0$;

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \sin x \geq -0,5, \\ \sin x \geq a, \end{array} \right. & \text{Перша система розв'язків не має,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin x \leq -0,5, \\ \sin x \leq a. \end{array} \right. & \text{друга система еквівалентна нерівності } \sin x \leq -0,5, \\ & \text{звідки } x \in \left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right]. \end{cases}$$

3. Множиною розв'язків заданої системи для кожного значення a є всі ті значення x , які одночасно належать множинам розв'язків і першої, і другої нерівностей системи для цього значення a (див. відповідь).

Відповідь: якщо $a = 1$, тоді $x \in [-\pi; \pi]$;

якщо $a \in (0; 1)$, тоді $x \in \left[-\pi; -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; \arcsin a \right] \cup [\pi - \arcsin a; \pi]$;

якщо $a \in (1; +\infty)$, тоді $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right]$.