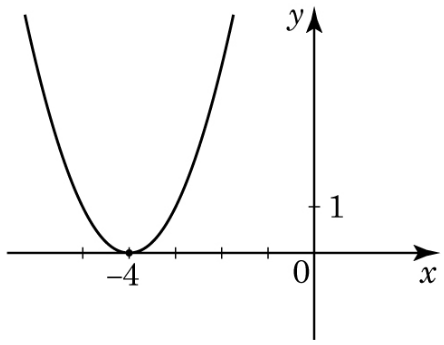
Розв’язання завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю з математики

Завдання 30

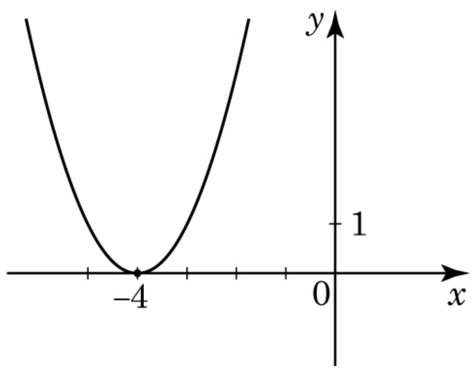
Розв’язання.

1. Якщо $x=0$, то $y=8$;
   $y=0$, то $x=-4$;
   $x=9$, то $y=26$.
2. $2x+8=0$, $x=-4$, отже, $M(-4;\ 0)$ – точка перетину графіка заданої функції з віссю x.
3. $F(x)=x^2+8x+C$.
4. За умовою $F(-4)=0$. Отже, $0=(-4)^2+8(-4)+C$, звідки отримуємо $C=16$. Тоді $F(x)=x^2+8x+16$.
5.



6. Оскільки $F(x)=(x+4)^2$, то областю значень цієї функції є проміжок $[0;+\infty)$. Тоді областю значень функції $3F(x)$ є також проміжок $[0;+\infty)$, а областю значень функції $3F(x)+1$ є проміжок $[1;+\infty)$.

Відповідь: 1. Якщо $x=0$, то $y=8$;
$y=0$, то $x=-4$;
$x=9$, то $y=26$.
2. $M\ (-4;\ 0)$.
3. $F(x)=x^2+8x+C.$
4. $F(x)=x^2+8x+16.$
5.

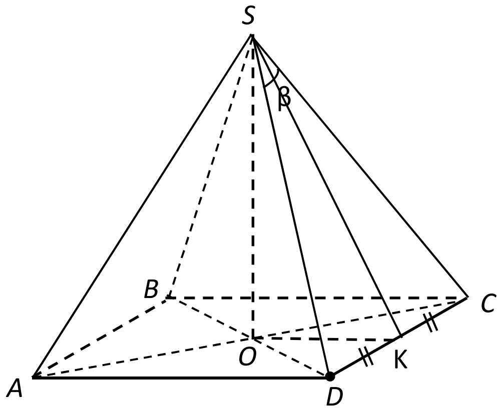


6. $[1;+\infty)$.

Завдання 31

Розв'язання.

1. Правильну чотирикутну піраміду $SABCD$ зображено на рисунку. SO – висота піраміди, SK – апофема піраміди, $SK = 6$, $\angle DSC = \beta$.



2. Оскільки SK – апофема, то $SK \perp CD$, OK є проекцією SK на (ABC). За теоремою про три перпендикуляри $OK \perp CD$, $OK = DK = \frac{1}{2}CD$.

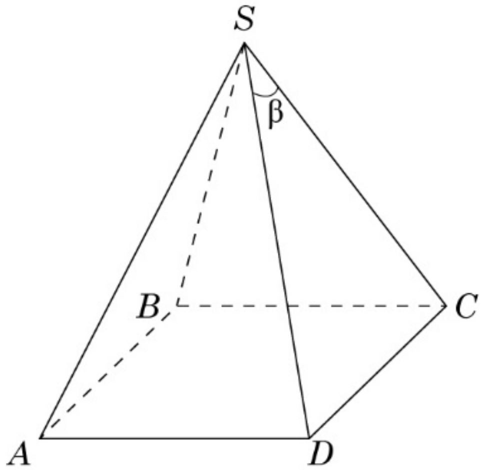
$DK = SK\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = 6\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, $DC = 2DK = 12\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$.

3. $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO$. $S_{ABCD} = DC^2 = \left(12\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2 = 144\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}$,

$SO^2 = \cdot SK^2 - OK^2 = SK^2 - DK^2 = 36 - 36\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} = 36\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\right) = 36\frac{\cos\beta}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$,

$SO = 6 \cdot \frac{\sqrt{\cos\beta}}{\cos\frac{\beta}{2}}$, $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 144\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{\cos\beta}}{\cos\frac{\beta}{2}} = 288\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\cos\beta}}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

Відповідь: 1.



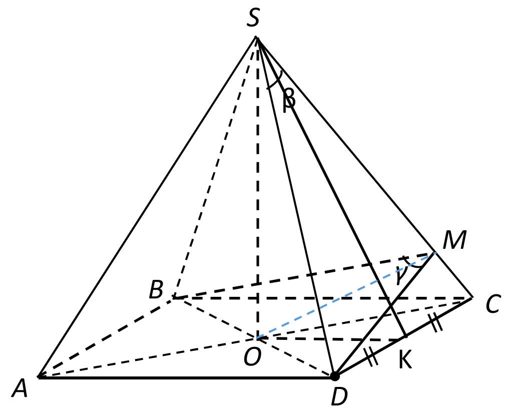
2. $12\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$.

3. $\dfrac{288\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos\beta}}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

Завдання 32

Розв’язання.

1. Пряма SC є прямою перетину площин (SBC) і (SCD). Проведемо через точки B і D перпендикулярно до ребра SC площину, що перетинає ребро SC в точці M (див. рисунок). Оскільки $DM \in (BMD)$, $BM \in (BMD)$, то $DM \perp SC$ і $BM \perp SC$, отже, кут BMD є лінійним кутом γ двогранного кута при її бічному ребрі SC.

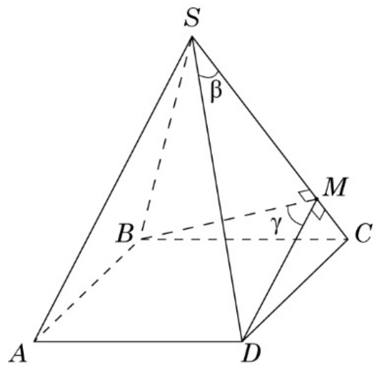


2. Оскільки трикутник BMD – рівнобедрений, то MO є висотою, бісектрисою і медіаною. З трикутника MOD: $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{OD}{DM}$. $OD = \sqrt{2}DK = 6\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$,

$$DM = DC\cos\angle CDM = 12\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 12\sin\frac{\beta}{2},\quad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{6\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{12\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Тоді $\frac{\gamma}{2} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}}$, $\gamma = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}}$.

Відповідь: 1.



2. $\gamma = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}}\right)$.

Завдання 33

Розв’язання.

Доведемо, що ліва і права частина рівні за будь-яких значень x. Справді,

$1 - 8\sin^2 x\cos^2 x - 2\cos^2 2x = 1 - 2\cdot(2\sin x\cos x)^2 - 2\cos^2 2x =$

$$=1-2\sin^2 2x-2\cos^2 2x=1-2(\sin^2 2x+\cos^2 2x)=1-2=-1.$$

$$\frac{x^3-1}{x^2+x+1}-x=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-x=x-1-x=-1$$

або

$$\frac{x^3-1}{x^2+x+1}-x=\frac{x^3-1-x(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=\frac{-x^2-x-1}{x^2+x+1}=-1.$$

Тотожність доведено.

Завдання 34

Розв'язання.

1. Множину допустимих значень змінної x визначаємо із системи

$$\begin{cases}\log_{0,5}(3-2x)+2\neq 0,\\ 3-2x>0.\end{cases}$$

Маємо

$$\begin{cases}\log_{0,5}(3-2x)\neq -2,\\ x<1{,}5;\end{cases}\quad \begin{cases}3-2x\neq 4,\\ x<1{,}5;\end{cases}\quad \begin{cases}x\neq -0{,}5,\\ x<1{,}5.\end{cases}$$

Отже, $x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;1{,}5)$.

2. Задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x^2-3(a-1)x+2a^2-3a=0,\end{array}\right.\\ x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;1{,}5).\end{cases}$$

Число $x=2$ не є коренем заданого рівняння.

Розв'язуємо квадратне рівняння $x^2-3(a-1)x+2a^2-3a=0$:

$D=9(a-1)^2-4(2a^2-3a)=9a^2-18a+9-8a^2+12a=(a-3)^2$,

$x_1=\dfrac{3(a-1)-(a-3)}{2}=a$, $x_2=\dfrac{3(a-1)+(a-3)}{2}=2a-3$.

Ураховуємо обмеження:

1) значення $x=a$ є коренем заданого рівняння, якщо $a\in(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;1{,}5)$;

2) значення $x=2a-3-$ корінь заданого рівняння, якщо $\left[\begin{array}{l}2a-3<-0{,}5\\ -0{,}5<2a-3<1{,}5,\end{array}\right.$ звідки

отримуємо $\left[\begin{array}{l}a<1{,}25\\ 1{,}25<a<2{,}25,\end{array}\right.$ тобто $a\in(-\infty;-1{,}25)\cup(1{,}25;2{,}25)$.

Отже, якщо $a\in(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;1{,}25)\cup(1{,}25;1{,}5)$, то $x\in\{a;2a-3\}$;

якщо $a\in\{-0{,}5\}\cup[1{,}5;2{,}25)$, то $x=2a-3$;

якщо $a=1{,}25$, то $x=a$;

якщо $a\in[2{,}25;+\infty)$, то рівняння коренів не має.

Відповідь: 1. $x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;1{,}5)$.

2. Якщо $a\in(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;1{,}25)\cup(1{,}25;1{,}5)$, то $x\in\{a;2a-3\}$;

якщо $a\in\{-0{,}5\}\cup[1{,}5;2{,}25)$, то $x=2a-3$;

якщо $a=1{,}25$, то $x=a$;

якщо $a\in[2{,}25;+\infty)$, то рівняння коренів не має.