



PISA-2022



РАМКОВИЙ
ДОКУМЕНТ

З МАТЕМАТИКИ

PISA-2022: РАМКОВИЙ ДОКУМЕНТ З МАТЕМАТИКИ

Країни ОЕСР та асоційовані учасники вирішили пренести цикл PISA-2021 на 2022 рік, щоб мати змогу здійснити рефлексію постковідних труднощів.

*Цей варіант документа було підготовлено до кризи.
Його фінальна версія буде відображати нову назву
циклу, а саме «PISA-2022».*

PISA-2022: рамковий документ з математики (драфт, друга редакція) / пер. з англ. К. Шумової ; наук. ред. Т. Вакуленко, В. Горох, С. Раков, В. Терещенко ; передмова Т. Вакуленко, В. Терещенко. Київ : Український центр оцінювання якості освіти, 2021. 97 с.

Пропонований матеріал є перекладом рамкового документа з математики як провідної галузі Міжнародного дослідження якості освіти PISA-2022 (оригінал документа можна знайти тут: www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf). Це не остаточна версія, оскільки фіналізування рамки здійснюють на пізнішому етапі підготовки дослідження PISA. Крім того, у назві оригінального документа було зазначено «PISA-2021», але пізніше в назву було внесено зміну у зв'язку зі зміщенням термінів проведення зазначеного циклу PISA через пандемію COVID-19. Тож нині рамковий документ містить у назві вказівку PISA-2022.

У цьому рамковому документі схарактеризовано розуміння математики та математичної грамотності в межах PISA (з огляду на цілі дослідження та низку інших чинників); окреслено зміст (конструкт) категорії «математична грамотність», на оцінювання складників якого орієнтований тест PISA з математики; визначено присутні характеристики тестових матеріалів, що здатні забезпечити вимірювання рівнів сформованості математичної грамотності 15-річних підлітків, та запропоновано зразки тестових завдань, характерні для комп'ютерної формату проведення PISA.

Матеріал розрахований на широке коло освітян, учнів / студентів, їхніх батьків, а також усіх, кого цікавлять питання математичної освіти.

УДК 37.01

- © Шумова К. Є., переклад, 2021
- © Вакуленко Т. С., Горох В. П., Раков С. А,
Терещенко В. М., наукове редагування, 2021
- © Саченко О. М., оформлення, 2021
- © Український центр оцінювання якості
освіти, 2021

ЗМІСТ

ПЕРЕДНЄ СЛОВО (ВІД КОМАНДИ PISA UKRAINE)	4
ВСТУП	7
ВИЗНАЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ	12
<i>Особа з високим рівнем математичної грамотності з погляду PISA-2022</i>	15
Схема 1. Математична грамотність: зв'язок між математичним міркуванням і циклом розв'язування задачі (моделюванням)	15
Схема 2. PISA-2022: зв'язок між математичним міркуванням, циклом розв'язування задачі (моделюванням), математичним змістом, контекстом і навичками, необхідними людині XXI століття ..	17
<i>Актуальність контекстів у задачах PISA-2022</i>	19
<i>Роль математичних інструментів, зокрема комп'ютерних технологій, у PISA-2022</i>	20
ОРГАНІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО ДОМЕНУ	21
<i>Математичне мислення й процеси циклу розв'язування задач</i>	23
Кількість, числові системи та їх алгебраїчні властивості	24
Математика як система, заснована на абстракції та символічному представленні	25
Математичні структури та їх закономірності	26
Функціональні залежності між величинами	27
Погляд на реальний світ крізь призму математичного моделювання	27
Випадкова величина як ключове поняття статистики	28
Розв'язування задач	28
Формулювання ситуацій математично	29
Застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування	30
Інтерпретація, застосування й оцінювання математичних результатів	31
<i>Змістові категорії математики</i>	32
Зміни й залежності	33
Простір і форма	35
Кількість	35
Невизначеність і дані	36
<i>Математичні теми, важливі для оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів / студентів</i>	37
<i>Контексти тестових завдань і навички XXI століття</i>	39
Контексти	40
Навички XXI століття	41
ОЦІНЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ	43
<i>Структура оцінювання з математики в дослідженні PISA-2022</i>	44
<i>Бажаний розподіл балів за видами математичної діяльності під час розв'язування задач</i>	44
Таблиця 1. Приблизний розподіл балів за видами математичної діяльності (для PISA-2022)	45
<i>Бажаний розподіл балів за змістовими категоріями</i>	45
Таблиця 2. Приблизний розподіл балів за змістовими категоріями (для PISA-2022)	45
<i>Діапазон складності тестових завдань</i>	46
Таблиця 3. Очікувана математична діяльність учнів / студентів під час розв'язування задач (математичні міркування й математичні процеси)	47
<i>Комп'ютерне тестування математичної грамотності</i>	51
<i>Розроблення тестових завдань з математики для PISA-2022</i>	52
Схема 3. Зразок інструмента для редагування (PISA-2022)	54
<i>Оцінювання тестових завдань</i>	54
<i>Звітність про рівні математичної грамотності</i>	54
<i>Запитання стосовно математичної грамотності в анкетах PISA-2022</i>	55
Математичні міркування	56
Обчислювальне мислення	57
Чотири фокусні змістові розділи математики	57
Навички XXI століття в контексті математики	58
ВИСНОВКИ	59
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	61
ДОДАТОК А. ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ	64
ДОДАТОК Б. СКОРОЧЕНА ВЕРСІЯ РАМКОВОГО ДОКУМЕНТА	88

ПЕРЕДНЄ СЛОВО

(ВІД КОМАНДИ PISA UKRAINE)

Міжнародне дослідження якості освіти PISA (Programme for International Student Assessment), започатковане на початку XXI століття країнами Організації економічного співробітництва та розвитку, сьогодні є одним з найбільших і найпотужніших порівняльних досліджень, у якому беруть участь понад 80 країн / економік світу. Завдяки йому вони мають змогу регулярно отримувати об'єктивну інформацію про якість функціонування своїх освітніх систем на рівні загальної освіти шляхом оцінювання грамотності 15-річних підлітків — тієї категорії молодих громадян, які мають можливість або продовжувати здобувати освіту, або ж вийти на ринок праці.

Україна доєдналася до співтовариства учасників PISA у 2016 році, успішно підготувавшись і провівши у 2017 році пілотний, а у 2018 році основний етап дослідження PISA-2018 й отримавши за підсумками участі цінні дані щодо якості шкільної освіти, які певною мірою дали поштовх для прийняття низки важливих системних управлінських рішень у галузі вітчизняної шкільної освіти¹.

PISA проводять кожні три роки (3-річний цикл включає підготовку, проведення пілотного та основного етапів та звітування за підсумками основного етапу). Уперше це дослідження було проведено у 2000 році й відтоді вже відбулося сім його циклів (2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015 та 2018). Основний етап чергового, восьмого, циклу мав відбутися у 2021 році, однак через пандемію COVID-19 його було зміщено на рік — таким чином PISA-2021 перетворилася на PISA-2022.

Оцінювання грамотності 15-річних підлітків у кожному циклі здійснюють із трьох основних (ключових) галузей — читацької, математичної та природничо-наукової, добре орієнтування в яких, за обґрунтованими переконаннями науковців, може свідчити про готовність молодшої людини до активної участі в житті суспільства. Водночас у певному циклі визначається провідна галузь, на якій зосереджено особливу увагу. У циклі 2022 року провідною галуззю буде математична. Саме тому розробники PISA підготували нову версію рамкового документа з оцінювання математичної грамотності 15-річних підлітків.

Оновлений рамковий документ ґрунтується на положеннях щодо математичної грамотності та її оцінювання, викладених у рамкових документах попередніх циклів², але водночас розвиває чимало нових ідей, зумовлених, по-перше, зміною ролі й специфіки математичних знань у цифрову епоху, і, по-друге, можливістю застосовувати під час тестування комп'ютерні технології.

Положення цього рамкового документа, безперечно, будуть корисні вітчизняним освітянам. І не тільки тому, що вони допоможуть сформуванню цілісного уявлення про розуміння математичної грамотності на сучасному етапі та її оцінювання в PISA, а передусім тому, що вони дають виразні орієнтири для нового, актуального для сьогодення навчання математики в школі — математики в житті й для життя.

¹ Див., наприклад: <https://mon.gov.ua/ua/news/teper-vse-oficijno-2020-2021-navchalnij-rik-bude-rokom-matematiki-v-ukrayini-prezident-pidpisav-ukaz>.

² Команда PISA в Україні на етапі підготовки до участі в PISA-2018 розробила інформаційний матеріал щодо оцінювання математичної грамотності в PISA на основі рамкових документів попередніх циклів: PISA: математична грамотність / уклад. Т. С. Вакуленко, В. П. Горох, С. В. Ломакович, В. М. Терещенко; перекл. К. Є. Шумова. – Київ : УЦОЯО, 2018. – 60 с. URL: http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/09/Math_PISA_Framework.pdf.

Саме це, останнє, є найважливішим, зважаючи на те, що зі шкільною математичною освітою в нашій країні ситуація не найкраща, що засвідчили й результати України в PISA-2018, і щороку, на жаль, засвідчують результати інших оцінювань (наприклад, ЗНО³). Так, згідно з даними PISA-2018 в Україні рівня 2 або вищих за шкалою PISA з математики досягли лише близько 64 % учнів, натомість у середньому в країнах ОЕСР таких результатів досягають 76 % учнів. Водночас найвищих рівнів успішності (5 або 6) з математики в Україні досягли лише 5 % учнів, натомість у середньому в країнах ОЕСР таких учнів 11 %⁴.

Пропонований матеріал — це переклад з англійської мови «робочої версії» рамкового документа з оцінювання математичної грамотності 15-річних підлітків⁵. Фіналізацію рамки буде здійснено на пізнішому етапі підготовки дослідження PISA. Крім того, у назві документа наразі зазначено «PISA-2021», хоча в остаточному варіанті буде – «PISA-2022». Це пов'язано зі зміщенням термінів проведення зазначеного циклу PISA через пандемію COVID-19.

У документі схарактеризовано розуміння математики та математичної грамотності в межах PISA (з огляду на цілі дослідження та низку інших чинників); окреслено зміст (конструкт) категорії «математична грамотність», на оцінювання складників якого орієнтований тест PISA з математики; визначено суттєві характеристики тестових матеріалів, що здатні забезпечити вимірювання рівнів сформованості математичної грамотності 15-річних підлітків, та запропоновано зразки тестових завдань. Крім того, у додатку Б укладачі пропонують скорочену версію рамкового документа⁶.

Насамкінець варто зазначити, що у квітні — травні 2021 року в 58 закладах освіти України було проведено пілотний етап PISA-2022. Понад 2,5 тисячі 15-річних учнів і студентів пройшли комп'ютерне тестування з математики, читання, природничо-наукових дисциплін, креативного мислення, а також увзяли участь в анкетуванні. Організатори дослідження отримали захопливі відгуки учасників оцінювання, які відзначили оригінальність і змістовність запропонованих завдань. Тож якщо вас цікавлять поточні процеси підготовки й проведення PISA, заходьте на офіційний сайт дослідження в Україні: <http://pisa.testportal.gov.ua/>.

Національний координатор PISA в Україні
Тетяна Вакулєнко,

начальник відділу досліджень та аналітики
Українського центру оцінювання якості освіти
Василь Терещенко

³ Див., наприклад: <https://testportal.gov.ua/ofzvit/>.

⁴ Як докладну, так і компактно репрезентовану інформацію про результати України в PISA-2018 можна знайти за посиланням: <http://pisa.testportal.gov.ua/pisa-2018-zvity/> та <http://pisa.testportal.gov.ua/pisa-2018-ukrayina-v-czentriv-uvagy/>.

⁵ Оригінал рамкового документа англійською мовою можна знайти тут: <https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf>. Зі скороченою версією рамки англійською мовою можна ознайомитися тут: <https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf>. У зв'язку зі зміщенням термінів проведення дослідження та відповідною зміною назви циклу (з PISA-2021 на PISA-2022) у перекладених текстах рамкових документів всі вживання «2021» замінені «2022».

⁶ Цей матеріал є перекладом скороченої версії рамкового документа PISA-2022, оригінальну версію можна прочитати тут: <https://pisa2022-maths.oecd.org/#Examples>.

ВСТУП

1. Тестування з математики має особливе значення для PISA-2022, оскільки в цьому циклі дослідження математика знову буде основною галуззю (доменом) оцінювання. Раніше математика була в центрі уваги дослідження тільки у 2003 та 2012 роках, хоча тестування PISA з математики проводили в усіх циклах — у 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015 та 2018 роках.

2. Зосередженість PISA-2022 на математиці дає можливість систематично порівнювати результати навчання учнів / студентів і відстежувати зміни в цих результатах, а також переглядати зміст математичних знань і вмінь, які необхідно оцінювати, урахувавши сучасні світові тенденції, зокрема в галузі освітньої політики й навчання.

3. Система освіти кожної країни має власний погляд на математичну компетентність, відповідно до якого в школах організовано навчання математики. З давніх-давен математична грамотність передбачає володіння основними арифметичними вміннями й операціями: додаванням, відніманням, множенням та діленням цілих чисел, звичайних і десяткових дробів, обчислення відсотків, площ та об'ємів простих геометричних фігур. Останнім часом на поняття математичної компетентності суттєво впливає диджиталізація багатьох аспектів життя й загальна доступність даних, які допомагають як приймати особисті рішення, пов'язані з охороною здоров'я та інвестиціями, так і розв'язувати основні соціальні проблеми, пов'язані зі зміною клімату, світовою економікою, оподаткуванням, державними боргами, збільшенням населення, поширенням пандемій тощо. Отже, сьогодні бути математично грамотною особою означає бути творчим, активним і мислячим громадянином, належним чином підготовленим до участі в житті суспільства XXI століття.

4. Кількісний компонент містять усі зазначені соціальні проблеми, як і багато інших важливих питань, що постають перед сучасним суспільством у всьому світі. Розуміння й розв'язування цих проблем потребує певного математичного мислення. У складніших контекстах таке мислення не обмежується відтворенням згаданих простих обчислювальних процедур, а потребує міркувань⁷. Важлива роль математичного мислення зумовлює перегляд значення математичної грамотності учнів / студентів, яка на сучасному етапі виходить за межі розв'язання задач і простих обчислень і включає математичні міркування та деякі аспекти обчислювального мислення.

5. Сьогодні країни мають нові можливості й стикаються з новими викликами в усіх галузях життя, що нерідко відбувається внаслідок динамічного вдосконалення комп'ютерних технологій, зокрема застосування роботів, смартфонів і комп'ютерних мереж. Наприклад, переважна більшість студентів, які розпочали навчання в університеті у 2015 році, вважає телефони мобільними портативними пристроями, за допомогою яких можна передавати голосові й текстові повідомлення та зображення, а також мати доступ до інтернету, водночас багатьом з їхніх батьків і особливо дідусям та бабусям усе це здавалося колись фантастикою (Beloit College, 2017^[1]). Визнання збільшуваного контекстного розриву між двома століттями стало поштовхом до дискусій щодо розвитку в учнів / студентів умінь XXI століття (Ananiadou and Claro, 2009^[2]; Fadel, Bialik and Trilling, 2015^[3]; National Research Council, 2012^[4]; Reimers and Chung, 2016^[5]).

⁷ У цьому документі посилання на математичні міркування передбачають математичні (дедуктивні) та статистичні (індуктивні) міркування.

6. Цей розрив також викликав необхідність упровадження освітніх реформ у системах освіти. Час від часу політики, освітяни й інші зацікавлені сторони здійснюють перегляд державних освітніх стандартів і відповідним чином регулюють освітню політику. У процесі такого перегляду зазвичай надають відповіді на два загальні запитання:

1. Чого саме мають навчатися учні / студенти?
2. Чого саме вчитися тим чи тим учням / студентам?

Найпоширенішим аргументом на захист математичної освіти для всіх учнів / студентів є корисність математики в різноманітних практичних ситуаціях. Однак щоразу цей аргумент утрачає свою вагу, оскільки дуже багато простих дій уже автоматизовано. Так, ще зовсім недавно офіціанти виконували множення й додавання для розрахунку вартості замовлень на папері, сьогодні вони просто натискають на відповідні кнопки на портативних пристроях. Нещодавно для планування подорожей людям доводилося користуватися роздрукованим розкладом руху транспорту, що потребувало високого рівня розуміння часової осі й оцінювання, а також інтерпретації складних таблиць. Тепер ми можемо зробити простий запит про це в інтернеті.

7. Щодо запитання «чого навчати?», то багато непорозумінь виникає через загальний погляд на математику. Багато людей вважають, що математика — це не більше ніж корисний набір інструментів. Чіткий слід цього підходу можна побачити в освітніх програмах багатьох країн. Іноді програма з математики обмежена списком математичних тем або процедур, частину яких учні / студенти практикують у кількох передбачуваних ситуаціях, нерідко у вигляді тестів. Такий погляд на математику є надто вузьким для сучасного світу, оскільки він недооцінює посилюваної важливості ключових характеристик цієї дисципліни. Попри попереднє зауваження, усе більше країн роблять акцент на здатності міркувати та на важливості відповідних контекстів у своїх освітніх програмах. Можливо, такі країни можуть слугувати корисними моделями для інших.

8. Зрештою, відповідь на ці запитання полягає в тому, що кожен учень / студент повинен навчитися (і мати можливість навчитися) мислити математично, використовуючи математичні міркування (як дедуктивні, так і індуктивні) разом із невеликим набором основних математичних понять, які підтримують такий тип мислення. Цих понять безпосередньо навчати не обов'язково, адже вони проявляються та закріплюються в процесі набуття учнями / студентами навчально-пізнавального досвіду в математиці. Такий підхід забезпечує здобувачів освіти базовою структурою понять, за допомогою яких можна розв'язувати кількісні задачі в різних галузях життя у XXI столітті.

9. У процесі розроблення рамкового документа з математики для PISA-2022 було враховано і більш чітке та безпосереднє значення математики для 15-річних, і необхідність забезпечити актуальні й автентичні контексти тестових завдань для математичного тестування. Цикл математичного моделювання, використовуваний у попередніх рамкових документах (наприклад, OECD (2004_[6]; 2013_[7])) для опису кроків, що їх здійснює особа, розв'язуючи контекстуалізовані проблеми, залишається основною характеристикою рамкового документа з математики для PISA-2022. Для цього циклу визначено математичні процеси, до яких долучаються учні / студенти під час розв'язування задач. Саме ці процеси, а також математичне мислення буде використано як основні параметри для звітування про результати дослідження PISA-2022.

10. Основною формою проведення математичного тестування під час дослідження PISA-2022 буде комп'ютерне тестування [КТ, англ. CBAM — computer-based assessment of mathematics]. Однак ті країни, які вирішують не тестувати своїх учнів / студентів за допомогою комп'ютерів, будуть забезпечені паперовими інструментами дослідження. Оновлена версія рамкового документа з математики вперше містить інформацію щодо нової форми проведення тестування, запровадженої у 2015 році, зокрема й щодо обговорень підготовки нових завдань для комп'ютерного тестування.

11. В оновленій версії рамкового документа з математики ОЕСР висловлює свої очікування щодо участі в проєкті PISA більшої кількості країн з низьким або середнім рівнем доходу на душу населення. Також наголошено на необхідності підвищення точності вимірювань PISA на нижчих рівнях шкали успішності учнів / студентів, для чого можна скористатися положеннями рамкового документа проєкту PISA for Development (OECD, 2017^[8]); розширення шкали для низьких результатів; важливості охоплення широкого діапазону соціальних та економічних контекстів; прагненні залучити до тестування підлітків віком 14–16 років, які не навчаються в закладах формальної освіти.

12. Збільшення й еволюцію ролі комп'ютерів та обчислювальних засобів як у повсякденному житті, так і в процесі розв'язування математичних задач відображено в рамковому документі з математики для PISA-2022 шляхом визнання того, що учні / студенти мають володіти навичками обчислювального мислення та бути здатними продемонструвати їх у процесі розв'язування задач. Навички обчислювального мислення включають розпізнавання закономірностей (шаблонів), проєктування й використання абстракцій, розбиття задачі на складники, визначення того, які сучасні комп'ютерні інструменти можна використати під час аналізу або розв'язування проблеми, визначення алгоритмів для отримання детального розв'язку задачі. З огляду на актуальність і важливість обчислювального мислення рамковий документ спонукає країни, які братимуть участь у дослідженні PISA-2022, осмислити питання щодо ролі обчислювального мислення в освітніх програмах з математики та в методиці математики.

13. Цей рамковий документ структурований за трьома основними розділами. Перший розділ — «Визначення математичної грамотності» — надає теоретичне обґрунтування оцінювання з математики в PISA, включно з визначенням «*математичної грамотності*». Другий розділ — «Організація математичного домену» — описує чотири аспекти:

- а) математичне мислення та три *математичні процеси* (циклу моделювання / розв'язування задачі);
- б) організація знань за змістовими категоріями математики, а також перелік змістових *категорій математики*, важливих для оцінювання 15-річних учнів / студентів;
- в) зв'язок між математичною грамотністю й так званими *навичками XXI століття*;
- г) *контексти*, у яких учні / студенти стикаються з проблемами математичного характеру.

Третій розділ документа — «Оцінювання математичної грамотності» — визначає технічні питання проведення дослідження, включно з планами тестування та іншою технічною інформацією.

14. Щоб забезпечити відслідковування тенденцій, більшість тестових завдань у PISA-2022 буде дібрана з використаних у попередніх циклах PISA. Велику добірку тестових завдань, розроблених на основі попередніх рамкових документів, можна знайти

на вебсайті <http://www.oecd.org/pisa/test>. У додатку А наведено сім тестових завдань, що ілюструють найважливіші нові елементи рамкового документа 2022 року.

15. Рамковий документ з математики для PISA-2022 було розроблено під керівництвом Математичної експертної групи 2022 (MEG) — органу, призначеного головними партнерами PISA та погодженого Керівною радою PISA (PGB). Серед восьми членів MEG — математики-науковці, математики-освітяни, а також експерти з оцінювання, комп'ютерних технологій та освітніх тестувань із різних країн. Крім того, MEG підтримала розширена група (eMEG), що складалася з десяти експертів, які були рецензентами рамкової версії, створеної MEG. У роботі eMEG брало участь широке коло математичних експертів із різних країн. Додаткові огляди провели експерти з понад 80 країн, що входять до складу Керівної ради PISA. RTI International, за контрактом Організації економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР), виконала дві подальші науково-дослідні роботи: дослідження валідності серед освітян, університетів і роботодавців та проведення когнітивних лабораторій із 15-річними учнями з різних країн для отримання відгуків про тестові завдання, що представлені в рамковому документі. Робота MEG в межах підготовки до PISA-2022 ґрунтувалася на попередніх версіях рамкового документа PISA з математики та містить рекомендації Стратегічної консультативної групи з математики, скликаної ОЕСР у 2017 році.

ВИЗНАЧЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ
ГРАМОТНОСТІ

РОЗДІЛ

16. Розуміння математики є надзвичайно важливим для готовності молоді до участі в житті сучасного суспільства та здійснення внеску в нього. Збільшення кількості проблем і ситуацій, з якими вона стикається щодня, зокрема й у професійних контекстах, потребує певного рівня розуміння математики, щоб надалі ці проблеми можна було цілковито усвідомити й розв'язати. Математика є критично важливим інструментом для молодих людей, оскільки проблеми й виклики очікують на них у багатьох сферах життя.

17. Тому надзвичайно важливо розуміти ступінь того, наскільки юнаки й дівчата, які тільки-но вийдуть зі школи, адекватно підготовлені до застосовування математики, щоб обмірковувати своє життя, планувати майбутнє, аргументувати й вирішувати значущі проблеми, пов'язані з цілим спектром життєвих ситуацій. Тестування 15-річних підлітків забезпечує країни якнайсвіжішими показниками того, як учні / студенти зможуть реагувати на різні майбутні життєві ситуації, що містять математичний складник і водночас передбачають необхідність актуалізації математичного мислення (як дедуктивного, так і індуктивного) й виконання певних завдань.

18. За основу для оцінювання на міжнародному рівні 15-річних підлітків доцільно взяти питання «Якими знаннями важливо володіти особі та що вона має вміння робити в ситуаціях, пов'язаних із математикою?» Або конкретніше: «Що означає математична компетентність для 15-річної особи, яка готується до закінчення школи або до вступу до закладу професійно-технічної освіти для виходу на ринок праці чи закладу вищої освіти?» Украй важливо, щоб визначення математичної грамотності, яке в цьому рамковому документі використане на означення *здатності індивіда математично мислити й розв'язувати проблеми (задачі) в різноманітних контекстах XXI століття*, ставило в центрі не мінімальні математичні знання й уміння низького рівня, а описувало спроможності індивідів робити математичні обґрунтування та використовувати математичні поняття, процедури, факти й засоби для описування, пояснювання і прогнозування явищ. Така концепція математичної грамотності визнає важливість для учнів / студентів розвивати глибоке розуміння цілої низки математичних понять і процесів та усвідомлювати переваги залученості до дослідження реального світу, яке підтримує математика. Визначення математичної грамотності в тому вигляді, як воно сформульовано для PISA, особливий наголос робить на необхідності розвитку спроможності учнів / студентів застосовувати математику в контексті. Для цього потрібно, щоб вони мали багату практику на заняттях з математики. Це справедливо як для тих 15-річних учнів / студентів, які наближаються до закінчення формальної освіти в галузі математики, будуть продовжувати вивчення математики в закладі освіти, так і для тих, які не навчаються в закладах освіти.

19. Математична грамотність не має вікових обмежень. Так, Програма міжнародного оцінювання грамотності дорослих (PIAAC) визначає числову грамотність як *здатність дорослої людини знаходити, використовувати, інтерпретувати й передавати математичну інформацію та ідеї з метою розв'язання різних життєвих завдань, які містять проблему математичного характеру*. Отже, паралельність цього визначення для дорослих і визначення математичної грамотності для 15-річних учнів / студентів у межах PISA-2021 є очевидною й аж ніяк не дивною.

20. Оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів / студентів має зважати на їхні специфічні вікові характеристики, відповідно до яких має бути визначено зміст, мову й контексти. Цей рамковий документ виділяє широкі категорії змісту, важливі для математичної грамотності людей загалом, і конкретні математичні теми, важливі саме для 15-річних учнів / студентів. Математична грамотність не є властивістю, яку людина може мати або не мати. Це, швидше, така властивість, якої набувають безперервно, завдяки чому одні особи стають більш математично грамотними за інших. Водночас потенціал для її розвитку є завжди в кожного.

21. Для цілей PISA-2022 математичну грамотність визначено так:

” Математична грамотність — це здатність людини мислити математично й формулювати, застосовувати та інтерпретувати математику для розв’язання проблем у різноманітних контекстах реального світу. Вона включає в себе поняття, процедури, факти та засоби для опису, пояснення й прогнозування явищ; допомагає людині зрозуміти, яку роль математика відіграє у світі, та робити обґрунтовані умовиводи і приймати виважені рішення, необхідні творчому, активному й мислячому громадянину XXI століття.

22. Рамковий документ для PISA-2022, визнаючи й зберігаючи основні ідеї математичної грамотності, репрезентовані в рамкових документах з математики для PISA-2003 і PISA-2012, констатує певні зрушення у світі учня / студента, які своєю чергою зумовили зміни в оцінюванні математичної грамотності порівняно з підходом, використаним у попередніх рамкових документах. Спостерігається відхід від потреби виконувати якісь базові розрахунки й перехід до потреб швидко змінюваного світу, керованого новими технологіями й тенденціями, за яких громадяни є творчими й активними, такими, що приймають рішення щодо себе й суспільства, у якому вони живуть.

23. Оскільки технології будуть відігравати все помітнішу роль у житті учнів / студентів, довгострокова траєкторія математичної грамотності має охоплювати синергетичний і взаємозалежний зв’язок математичного мислення й обчислювального мислення, яке було означене у (Wing, 2006⁸) як «спосіб, у який мислять фахівці в галузі комп’ютерів», і схарактеризоване як мисленнєвий процес, пов’язаний з формулюванням математичних задач і розробленням розв’язків для них у такій формі, яка може бути використана комп’ютером, людиною або комп’ютером і людиною разом (Wing, 2010⁹) (Cuny, Snyder and Wing, 2010^[9]). Функції, які обчислювальне мислення виконує в математиці, включають і те, як специфічні математичні теми взаємодіють зі специфічними темами комп’ютерної галузі, і те, як математичне мислення доповнює обчислювальне мислення (Gadanidis, 2015^[10]; Rambally, 2017^[11]). Так, Пратт і Носс (Pratt and Noss, 2002^[12]) обговорювали застосування комп’ютерних мікросвітів для розвитку математичних знань у ситуації випадковості та ймовірності; Гаданідис та інші (Gadanidis et al., 2018^[13]) пропонували підхід, заснований на залученні дітей у ранньому віці до ідей теорії груп, використовуючи поєднання інструментів

⁸ (Wing 2006) is J.Wing, *Computational Thinking*, Communications of the ACM, Vol. 49, No. 3, March 2006, pp. 33–35.

⁹ J. Wing, *Computational Thinking – What and Why?*, The Magazine of Carnegie Mellon University’s School of Computer Science, March 2011. The LINK, Research Notebook. <https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why>.

практичного та обчислювального мислення. Отже, у той час як освіта в галузі математики розвивається з позиції наявних інструментів і потенційних способів підтримування учнів / студентів у вивченні значущих ідей математики (Pei, Weintrop and Wilensky, 2018^[14]), виважене використання інструментів обчислювального мислення та системи відповідних умінь може поглибити вивчення змісту математики шляхом створення ефективних умов навчання (Weintrop et al., 2016^[15]). Крім цього, інструменти обчислювального мислення надають учням контекст, у якому вони можуть відтворювати («матеріалізовувати») абстрактні конструкти (через дослідження математичних понять і залученість до дій із ними в динамічний спосіб) (Wing, 2008¹⁰), а також виражати ідеї новими способами та взаємодіяти з поняттями за допомогою медіа й нових інструментів представлення (Grover, 2018^[16]; Niemelä et al., 2017^[17]; Pei, Weintrop and Wilensky, 2018^[14]; Resnick et al., 2009^[18]).

ОСОБА З ВИСОКИМ РІВНЕМ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ З ПОГЛЯДУ PISA-2022

24. Фокус у визначенні математичної грамотності зроблено на активному оволодінні математикою для розв'язування проблем реального життя, представлених у різноманітних контекстах, і спрямовано на охоплення математичного міркування (як дедуктивного, так і індуктивного) та розв'язування проблем шляхом використання математичних понять, процедур, фактів та інструментів для описування, пояснювання й прогнозування явищ.

25. Важливо зауважити, що визначення математичної грамотності не тільки сфокусовано на використанні математики для розв'язування проблем у контексті реального світу, але й визначає математичне міркування як основний аспект математичної грамотності. Внесок рамкового документа з математики для PISA-2022 полягає у висвітленні центральної ролі математичного міркування як у процесі (циклі) розв'язування проблем, так і взагалі в математичній грамотності.

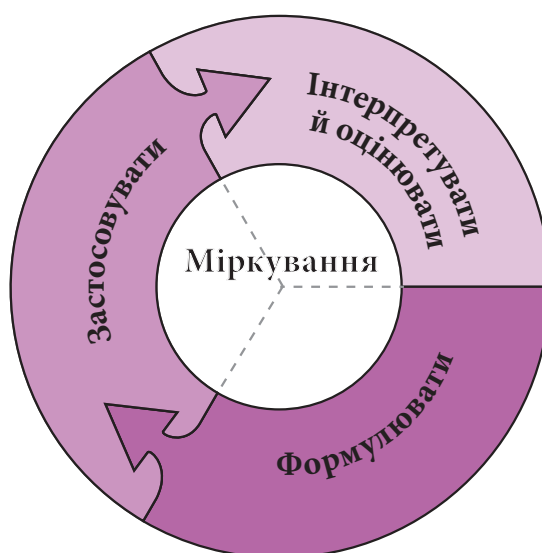


Схема 1. Математична грамотність: зв'язок між математичним міркуванням і циклом розв'язування задачі (моделюванням)

¹⁰ J. Wing, Computational thinking and thinking about computing, Philosophical Transactions of The Royal Society A, 366:3717-3725, 2008.

26. *Схема 1* показує взаємозв'язок між математичним міркуванням і розв'язанням задачі, відображеними в циклі математичного моделювання в рамкових документах із математики для PISA-2003 і PISA-2012.

27. Математично грамотні учні / студенти мають бути здатними спочатку використовувати свої знання змісту математики для розпізнання математичного характеру конкретної ситуації (задачі), зокрема й тих ситуацій, які виникають у реальному світі, а потім математично формулювати цю задачу. Таке перетворення неоднозначної, заплутаної реальної ситуації на чітко визначену математичну задачу потребує математичних міркувань і є, мабуть, ключовим складником того, що означає бути математично грамотною особою. Після успішного перетворення отримана математична задача має бути розв'язана з використанням математичних понять, алгоритмів і процедур, яких навчають у школі. Водночас це може передбачати й прийняття стратегічних рішень щодо вибору конкретних математичних інструментів і порядку їх застосування, що також є проявом математичного мислення. І нарешті, визначення математичної грамотності за концепцією PISA вказує на необхідність оцінювання учнем / студентом математичного розв'язку за допомогою інтерпретації отриманих результатів у контексті первинної реальної ситуації. Крім того, учні / студенти мають володіти вміннями обчислювального мислення й бути здатними продемонструвати їх у процесі розв'язування задач. Ці вміння включають розпізнавання закономірностей, розкладання на складники, визначення того, які сучасні комп'ютерні інструменти можуть бути використані під час аналізу або розв'язування задачі, визначення алгоритмів для отримання детального розв'язку задачі.

28. Незважаючи на те, що математичне мислення й розв'язання проблем реального світу перетинаються, існує аспект математичного мислення, який виходить за межі розв'язування практичних задач: математичне мислення — це також і спосіб надавати оцінку та вибудовувати аргументацію, інтерпретацію й робити висновки щодо тверджень (наприклад, під час важливих дебатів стосовно питань державної політики), які через їх кількісну сутність найкраще можна зрозуміти з математичного погляду.

29. Отже, математична грамотність включає два пов'язані аспекти: *математичне міркування та розв'язування задач*. Математична грамотність відіграє важливу роль у здатності особи використовувати математику для *розв'язування проблем* реального світу. Проте математичне мислення не обмежується розв'язуванням задач у традиційному сенсі, воно також включає загальне поінформоване судження щодо важливих суспільних проблем, які можна розв'язати математично. Крім цього, воно включає судження щодо достовірності інформації, яка постійно атакує людей, за допомогою аналізу кількісних та логічних наслідків таких суджень. Саме завдяки цьому математичне мислення сприяє розвитку певних навичок ХХІ століття, про що йтиметься в інших розділах цього документа.

30. Зовнішнє коло на *схемі 2* показує, що математична грамотність посідає певне місце в контексті проблеми, яка виникає в реальному світі.

31. На *схемі 2* також відображено взаємозв'язок між математичною грамотністю (див. *Схему 1*) та:

- категоріями математичного змісту, у яких застосовують математичну грамотність;
- контекстними категоріями для математичних задач;
- окремими навичками ХХІ століття, які одночасно сприяють підвищенню рівня математичної грамотності й розвиваються за її допомогою.

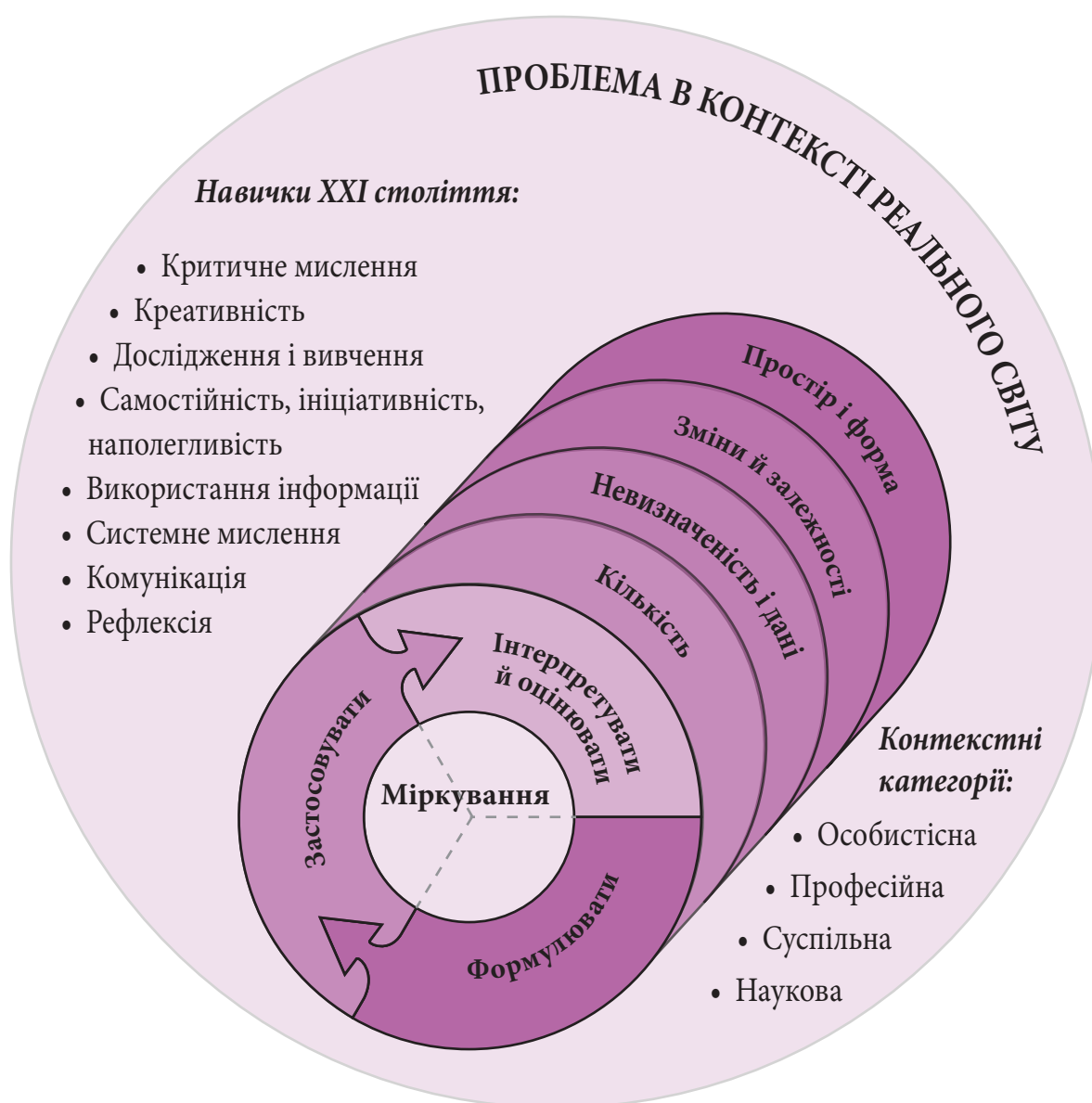


Схема 2. PISA-2022: зв'язок між математичним міркуванням, циклом розв'язування задачі (моделюванням), математичним змістом, контекстом і навичками, необхідними людині XXI століття

32. Категорії математичного змісту:

- кількість;
- невизначеність і дані;
- зміни й залежності;
- простір і форма.

Саме ці чотири категорії математики вміщують знання, на які учні / студенти мають спиратися, щоб мислити математично, формулювати задачу (шляхом перетворення ситуації з реального життя на математичну задачу), потім розв'язувати її, інтерпретувати й оцінювати знайдений розв'язок.

33. Як і в попередніх рамкових документах, PISA продовжує використовувати чотири контекстні категорії для визначення ситуацій з реального світу, а саме *особистісні, професійні, суспільні та наукові*. Контекст може бути особистого характеру і включати проблеми, які можуть постати перед людиною, її родиною або групою однолітків. Інші проблеми можуть належати до суспільного (зосереджені на певній громаді — місцевій, національній або світовій), професійного (зосереджені на світі праці) або наукового (у якому є посилання на застосування математики у світі природи або технологій) контекстів.

34. Уперше до рамкового документа включено окремі навички ХХІ століття (див. *схему 2*), на які математична грамотність спирається і які вона одночасно розвиває. У наступному розділі цього документа такі навички буде докладно обговорено. Наразі варто зауважити, що якщо контекстні категорії (особистісна, професійна, суспільна і наукова) впливають на розроблення тестових завдань, то для залучення до оцінювання навичок ХХІ століття тестових завдань спеціально не розроблятимуть. Натомість очікується, що визначені навички буде включено до тестових завдань завдяки належному реагуванню розробників на інформацію в цьому рамковому документі та на визначення математичної грамотності в ньому.

35. Метою саме такого визначення математичної грамотності й такого його представлення на *схемах 1 і 2* було чітке збереження й інтегрування у визначення математичної грамотності для PISA-2022 поняття математичного моделювання, яке є наріжним каменем рамкового документа PISA з математики (наприклад, OECD, 2004^[6]; OECD, 2013^[7]). Згідно з концепцією PISA, цикл моделювання (формулювання, застосування, інтерпретування, оцінювання) є центральним у визначенні грамотних 15-річних учнів / студентів. Щоправда, необхідність брати участь у циклі моделювання виникає не завжди, особливо в контексті тестування (Galbraith, Henn and Niss, 2007^[19]). Часто трапляється так, що значні частини циклу математичного моделювання виконують інші, а кінцевий користувач виконує лише деякі його кроки. Так, інколи надають такі математичні представлення, як графіки або рівняння, які можна безпосередньо використовувати для того, щоб відповісти на певне запитання або зробити певний висновок. В інших випадках учні / студенти можуть використовувати комп'ютерну симуляцію для встановлення зв'язків між змінюваними даними в конкретній системі або певному середовищі. Через це в багатьох завданнях тесту PISA цикл моделювання представлено лише частково. У реальності особа, яка розв'язує задачі, іноді може переходити від процесу до процесу, повертаючись до раніше прийнятих рішень і припущень. Кожен з процесів циклу може викликати значні труднощі й потребувати неодноразового повернення до попередніх кроків.

36. Зокрема використані у визначенні дієслова «формулювати», «застосовувати» та «інтерпретувати» вказують на три процеси, що їх здійснюватимуть учні / студенти під час активного розв'язування задач. Математичне формулювання ситуації передбачає математичні міркування (як дедуктивні, так і індуктивні) для виявлення можливостей застосування й використання математики, тобто здатність побачити, що для розуміння або розв'язування певної проблеми може бути застосована математика. Це означає вміння трансформувати запропоновану ситуацію в таку форму, у якій вона підлягатиме, для чого її математично структурують і формулюють математичною мовою, визначивши змінні та зробивши спрощувальні припущення, які допоможуть розв'язати відповідну задачу. Застосування математики передбачає проведення математичних міркувань і застосування

математичних понять, процедур, фактів та інструментів для отримання математичного розв'язання. Це означає проведення обчислень, перетворення алгебраїчних виразів, використання рівнянь та інших математичних моделей, аналіз інформації, наведеної на діаграмах і графіках, надання математичного опису або пояснення та використання математичних інструментів для розв'язування задач. Математична інтерпретація передбачає розмірковування над математичними розв'язаннями та результатами й зіставлення їх із контекстом задачі. Це означає оцінювання математичних розв'язків або їх обґрунтування в стосунку до контексту задачі та визначення того, чи є результати доречними та чи мають вони сенс у конкретній ситуації.

37. Уперше в рамковому документі визначено взаємозв'язок між математичним і обчислювальним мисленням. Обидва типи мислення породжують подібні погляди, процеси й когнітивні моделі, яких учням / студентам необхідно набути для успішного життя в умовах все більш технологічного світу. Абстрагування, алгоритмічне мислення, автоматизація, декомпозиція й узагальнення, які утворюють сукупність основних рекурсивно розташованих практик обчислювального мислення, також є центральними компонентами математичного мислення й процесу розв'язування задач. Згідно з концепцією, яка пояснює застосування обчислювального мислення в математичній галузі, **обчислювальне мислення** — це визначення й розроблення математичних знань, які можуть бути виражені засобами програмування, що дає змогу учням / студентам динамічно моделювати математичні поняття й залежності. За класифікацією, спеціально створеною щодо навчання математики й природничо-наукових дисциплін, практики обчислювального мислення поділяють на:

- практики оброблення даних;
- практики моделювання й симулювання;
- практики комп'ютерного розв'язування задач;
- практики системного мислення (Weintrop et al., 2016^[15]).

Поєднання внутрішньогалузевих основ математичного мислення й загальногалузевих основ комп'ютерного мислення стає необхідним, по-перше, щоб ефективно сприяти розвитку концептуального розуміння математики учнями / студентами, і по-друге, щоб допомагати їм розвивати обчислювальне мислення та оволодівати відповідними поняттями й уміннями. Таке поєднання допоможе учням / студентам усвідомити реальне існування математики в професійному світі і забезпечить їхню якісну підготовку до професійного життя (Basu et al., 2016^[20]; Benton et al., 2017^[21]; Pei, Weintrop and Wilensky, 2018^[14], Beheshti et al., 2017^[22]).

АКТУАЛЬНІСТЬ КОНТЕКСТІВ У ЗАДАЧАХ PISA-2022

38. Використання поняття «різноманітні контексти» у визначенні математичної грамотності є мотивованим й орієнтованим на конкретні контексти, які докладніше описано й наведено як приклади в цьому документі. Самі конкретні контексти не настільки важливі, але чотири категорії, вибрані для використання в інструментах тестування (особистісний, суспільний, професійний та науковий), відображають широке коло ситуацій, у яких особа може мати потребу використовувати математику. Таке визначення також акцентує увагу на факті, що математична грамотність допомагає особі усвідомлювати роль, яку відіграє математика у світі, а також робити аргументовані умовиводи й приймати рішення, необхідні цій особі як творчому, активному й мислячому громадянину, у ситуаціях, коли

вона стикається з повідомленнями або твердженнями на зразок: «дослідження показало, що в середньому...», «опитування показує велике падіння...», «деякі вчені стверджують, що приріст населення випередить виробництво продуктів харчування через x років...» тощо.

РОЛЬ МАТЕМАТИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ, ЗОКРЕМА КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ, У PISA-2022

39. У визначенні математичної грамотності йдеться також про використання математичних інструментів. До цих інструментів належать різні фізичні та цифрові прилади, програмне забезпечення і комп'ютерна техніка. У XXI столітті комп'ютерні математичні інструменти доволі широко використовують у роботі, і з часом вони ставатимуть все більш використовуваними не тільки в професійному, але й у повсякденному житті людей. З появою таких нових тенденцій у професійній діяльності людини та в її повсякденному житті усе частіше виникає потреба в застосуванні математичного й логічного мислення під час розв'язування задач за допомогою комп'ютерних інструментів, що потребує вищого рівня математичної грамотності.

40. З 2015 року комп'ютерне тестування (КТ, *англ.* — *Computer-Based Assessment, CBA*) стало основною формою проведення оцінювання PISA, але для країн, які вирішили не тестувати своїх учнів / студентів за допомогою комп'ютерів, доступні паперові інструменти дослідження. Варто зауважити, що математичні тестування у 2015 і 2018 роках не використовували можливостей, які надає комп'ютер.

41. З 2022 року КТ з математики стане основним форматом оцінювання математичної грамотності. Опція паперового тестування залишатиметься доступною для країн, які вирішать не тестувати своїх учнів / студентів за допомогою комп'ютерів, проте КТ з математики вже не буде нейтральною комп'ютерною версією паперового тестування. Можливі наслідки цього переходу буде докладно висвітлено далі в цьому рамковому документі.

42. У рамковому документі з математики експерти PISA визначили математичний домен у межах дослідження PISA й описали підхід до оцінювання математичної грамотності 15-річних підлітків. Отже, PISA оцінює, наскільки вміло 15-річні учні / студенти можуть математично мислити й застосовувати математику, коли мають справу із запропонованими ситуаціями й завданнями, більшість із яких надано в контекстах реального світу.

43. З огляду на цілі дослідження визначення математичної грамотності PISA-2022 можна проаналізувати з погляду трьох взаємопов'язаних аспектів (див. *схему 2*):

- математичні міркування (як дедуктивні, так і індуктивні) та розв'язування задач (процеси, які описують, що роблять особи для встановлення зв'язку між контекстом проблеми й математикою і, отже, для розв'язування задачі);
- математичний зміст, призначений для використання в тестових завданнях;
- контексти тестових завдань у сукупності з певним набором¹¹ навичок XXI століття, які сприяють підвищенню рівня математичної грамотності й водночас розвиваються за її допомогою.

44. Далі докладно розкриємо ці аспекти математичного домену для підтримки розуміння та надання вказівок розробникам тестів. Висвітлюючи їх, рамковий документ з математики для PISA-2022 дає можливість упевнитися в тому, що тестові завдання, розроблені для дослідження, відображають математичне мислення й процеси циклу розв'язування задач, а також математичний зміст, контексти й навички XXI століття, які в усій сукупності тестових завдань ефективно забезпечують реалізацію сутності математичної грамотності, визначеної цим рамковим документом. Розглянемо деякі питання, що ґрунтуються на визначенні математичної грамотності в рамковому документі з математики для PISA-2022, а саме:

- До яких процесів залучається людина під час математичного мислення й розв'язування контекстоцентризованих математичних задач?
- Якого змісту математичних знань ми можемо очікувати від особи, зокрема від 15-річного учня / студента?
- У яких контекстах можна спостерігати й оцінювати математичну грамотність? Як такі контексти взаємодіють із навичками XXI століття?

¹¹ Набір навичок XXI століття, рекомендований Дорадчою групою ОЕСР із дисциплін (англ. SAG — the OECD Subject Advisory Group), було дібрано завдяки встановленню спільного зв'язку між ключовими компетентностями XXI століття й відповідними предметними компетентностями, які є невід'ємною частиною навчальних програм із базових дисциплін. Так, Дорадча група визначила вісім навичок XXI століття, які має бути включено до рамкового документа для PISA-2022 і до навчальних програм з математики (див. PISA 2021 Mathematics: A Broadened Perspective [EDU/PISA/GB(2017)17]). Перелік цих компетентностей наведено в пункті 125 документа.

МАТЕМАТИЧНЕ МИСЛЕННЯ Й ПРОЦЕСИ ЦИКЛУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

45. Математичні міркування (як дедуктивні, так і індуктивні) включають оцінювання ситуацій, вибір стратегій, побудову логічних висновків, розроблення й описування розв'язків та визначення того, як отримані результати можна застосувати. Учні / студенти математично міркують, коли:

- визначають, розпізнають, організовують, пов'язують і представляють;
- конструюють, абстрагують, оцінюють, виводять, обґрунтовують, пояснюють і захищають;
- інтерпретують, роблять висновки, критично оцінюють, спростовують і встановлюють відповідність вимогам.

46. Уміння логічно міркувати та викладати аргументи ясным і переконливим способом стає навичкою, яка набуває все більшого значення в сучасному світі. Математика є наукою з чітко визначеними об'єктами та поняттями, які можна аналізувати і трансформувати різними способами, використовуючи математичні міркування, щоб отримати висновки, у яких ми впевнені. Завдяки математиці учні / студенти дізнаються, що, використовуючи відповідні міркування, вони отримають результати і дійдуть висновків, яким можуть довіряти. Більш того, ці висновки є логічними та об'єктивними, а отже, неупередженими, без необхідності перевірки зовнішнім авторитетом. Цей вид міркувань, що є корисним далеко за межами математики, найбільш ефективно можна опанувати під час вивчення математики.

47. Особливо важливі в сучасному світі, а також під час розроблення тестових завдань PISA два аспекти математичного мислення. Перший — це дедукція — виведення результатів із чітких припущень. Дедукція є характерною ознакою «чистої» математики. На корисності цього вміння було наголошено вище. Другим важливим виміром є статистичне та ймовірнісне мислення. З погляду логіки в голові сучасної людини панує постійна плутанина стосовно того, що є можливим і ймовірним. Через це багато людей стають жертвами теорій змови або фейкових новин. З технічного погляду сучасний світ стає дедалі складнішим, а кількість терабайтів даних, якими представлені його численні виміри, дедалі зростає. Осмислення таких даних — це найбільша проблема з тих, які постануть перед людством у майбутньому. Сучасним учням / студентам необхідно ознайомитися з характером таких даних і способами прийняття обґрунтованих рішень у контексті варіативності й невизначеності.

48. В основі математичної грамотності лежить математичне мислення, яке ґрунтується на кількох ключових ідеях, покладених в основу шкільної математики. До цих ключових ідей належать:

- поняття кількості, числові системи та їх алгебраїчні властивості;
- математика як система, заснована на абстракції та символічному представленні;
- математичні структури та їх закономірності;
- функційні залежності між величинами;
- погляд на реальний світ крізь призму математичного моделювання (наприклад, погляд на фізичні, біологічні, соціальні, економічні й поведінкові явища);

- випадкова величина як основне поняття статистики.

Огляд кожної із цих ключових ідей, який наведено нижче, дає розуміння того, як вони підтримують міркування. Хоча огляди можуть здаватися абстрактними, у дослідженні PISA не передбачено абстрактне ставлення до них. Ці описи надано з метою показати, як відповідні ідеї висвітлюють у навчальних програмах з математики, а також пояснити, як часте покликання до них у навчальному процесі допомагає учням / студентам усвідомити можливості їх застосування в нових різноманітних контекстах.

Кількість, числові системи та їх алгебраїчні властивості

49. Поняття кількості, мабуть, є найпоширенішим і найважливішим математичним поняттям, що стосується взаємодії зі світом і функціонування в ньому (OECD, 2017, с. 18_[23]). На базовому рівні кількість пов'язана з корисною здатністю порівнювати потужності множин об'єктів. Уміння рахувати зазвичай стосується досить невеликих наборів: у більшості мов тільки невелика кількість чисел має назви. Оцінюючи більші множини, ми виконуємо складніші операції оцінювання, округлення й застосовуємо степені. Рахунок дуже тісно пов'язаний з іншою основною операцією класифікації речей, де виникає порядковий аспект чисел. Кількісне визначення атрибутів об'єктів (вимірювання), залежностей, ситуацій і сутностей у світі є одним з основних способів осмислення навколишнього світу (OECD, 2017_[23]).

50. Кількість як ключова ідея містить базові поняття числа, вкладених числових систем (наприклад, цілі числа як підсистема раціональних чисел, які своєю чергою є підсистемою дійсних чисел), арифметики чисел та алгебраїчні властивості, які притаманні числовим системам. Зокрема корисно розуміти, як розширені системи чисел дають змогу розв'язувати складніші рівняння. Це створює основу для здатності учнів / студентів бачити математичні структури в реальному світі в подальшому житті.

51. Для ефективного застосування кількісних оцінок необхідно використовувати не просто числа, а числові системи. Самі по собі числа мають обмежене значення. Але операції, які ми можемо виконувати з ними, роблять їх потужним математичним інструментом. Отже, добре розуміння операцій із числами є основою математичних міркувань.

52. Опанування ключової математичної ідеї, яка стосується кількості, числових систем і їх алгебраїчних властивостей, охоплює розуміння:

- сутності різних способів представлення чисел (наприклад, символічного — за допомогою цифр, точок на числовій прямій, геометричних величин або спеціальних символів, таких як π) і перехід від одного представлення до іншого;
- того, як числові системи впливають на представлення чисел;
- того, чому алгебраїчні властивості цих систем є актуальними та важливими для роботи з ними;
- значення адитивної й мультиплікативної тотожностей, асоціативності й комутативності операцій додавання і множення, дистрибутивної властивості множення відносно додавання.

Алгебраїчні принципи лежать в основі системи розрядних значень, яка дає можливість точно представляти числа й ефективно виконувати операції з ними. Вони також є основ-

ними для операцій із числами, які представлені на числовій прямій, включаючи роботу з інверсними відносно додавання числами, які є основними для додавання та віднімання спочатку цілих, потім раціональних і, нарешті, дійсних чисел.

53. Безперечно, число є ключовим поняттям і для всіх математичних тем, які розглядаємо в цьому рамковому документі, і для математичного мислення загалом. Опанування алгебраїчних принципів і властивостей, із чим учні вперше стикаються під час роботи із числами, є основоположним для їхнього розуміння алгебри, якої їх навчають у школі, а також для оволодіння вміннями виконувати перетворення алгебраїчних виразів, необхідних для розв'язування рівнянь, конструювання моделей, побудови графіків функцій, програмування й створення формул в електронних таблицях. Нині у світі, настільки насиченому даними, вміння інтерпретувати числові закономірності й порівнювати їх, а також інші вміння, пов'язані з числами, стають дедалі важливішими.

54. Широке розуміння величин і систем чисел стає в пригоді під час розв'язування задач, які виникають в реальних ситуаціях, що передбачено цим рамковим документом.

Математика як система, заснована на абстракції та символічному представленні

55. Основні ідеї математики виникли з людського досвіду й необхідності забезпечити узгодженість, упорядкованість і передбачуваність цього досвіду. Багато математичних об'єктів є моделями реального світу або принаймні певним чином відображають аспекти реальності. Однак суть абстракції в математиці полягає в тому, що вона є самодостатньою й виводить властивість математичних об'єктів усередині цієї системи. Абстракція прискіпливо й вибірково досліджує структурні подібності між математичними об'єктами й вибудовує зв'язки між цими об'єктами на основі таких подібностей. У шкільній математиці абстракція формує взаємозв'язки між конкретними об'єктами, символічними представленнями й операціями, включаючи алгоритми та уявні моделі. Уміння абстрактно мислити відіграє важливу роль під час роботи з комп'ютерною технікою. Уміння створювати, маніпулювати й установлювати сутність під час застосування абстракції в технологічних контекстах — це важливий компонент обчислювального мислення.

56. Розглянемо приклад. Поняття «коло» починають формувати в дітей, використовуючи різні об'єкти, які неформально допомагають їм його зрозуміти як щось «ідеально кругле». Представляючи об'єкт, вони малюють коло, помічають схожість між малюнками і роблять загальний висновок про їх «округлість», навіть якщо кола мають різні розміри. Коло стає абстрактним об'єктом математики лише тоді, коли воно визначається як геометричне місце точок, однаково віддалених від фіксованої точки у двовимірній площині.

57. Учні використовують різні представлення — чи то текстові, символічні, графічні, числові, геометричні, чи за допомогою програмного коду — для організації й вираження їхнього математичного мислення. Представлення дають змогу нам стисло викладати математичні ідеї, що своєю чергою приводить до ефективних алгоритмів. Представлення також є основним елементом математичного моделювання, яке дає змогу учням / студентам абстрагуватися від спрощеного або ідеалізованого формулювання проблеми реального світу. Такі структури також важливі для інтерпретації та програмування дій обчислювальних пристроїв.

58. Завдяки абстракціям і символічним представленням підтримують міркування в процесі застосування математики в реальних ситуаціях, що передбачено цим рамковим документом, а це дає змогу учням / студентам переходити від конкретних деталей ситуації до загальних особливостей та ефективно їх описувати.

Математичні структури та їх закономірності

59. У початковій школі, дивлячись на вираз $5 + (3 + 8)$, деякі учні бачать рядок із символами, що вказують на обчислення, які необхідно виконати, дотримуючись певного порядку виконання операцій. Інші в цьому виразі бачать число, додане до суми двох інших чисел. Представники другої групи бачать структуру, отже, їм не потрібно говорити про порядок дій, який означає ця структура: щоб додати число до суми, спочатку потрібно обчислити суму.

60. Бачити структуру — важливе вміння учнів, які переходять до старших класів. Коли учень дивиться на запис $f(x) = 5 + (x - 3)^2$ і сприймає його, як те, що $f(x)$ є сумою числа 5 і квадрата числа $x - 3$, та помічає, що при $x = 3$ другий доданок дорівнює 0, то він розуміє, що мінімальне значення $f(x)$ дорівнює 5. Таке розуміння закладає основу для функційного мислення, про яке йдеться в наступному розділі цього рамкового документа.

61. Математичні структури тісно пов'язані із символічним представленням. Використання символів — потужний математичний засіб, але в ньому є сенс тільки тоді, коли символи зберігають значення для людини, яка їх використовує, а не стають безглуздими об'єктами, які потрібно переставляти на папері. Бачити структуру — це спосіб знаходити й запам'ятовувати значення абстрактного представлення. Такі структури також дуже важливі для інтерпретації та програмування дій обчислювальних пристроїв. Уміння бачити структуру надає суттєву концептуальну допомогу під час використання процедурних знань.

62. Наведені приклади ілюструють, як бачення структури в абстрактних математичних об'єктах стає способом заміни правил синтаксичного аналізу, що можуть бути використані комп'ютером, такими концептуальними зображеннями цих об'єктів, які пояснюють їх властивості. Об'єкт, який у такий спосіб утримують у свідомості, піддається осмисленню на вищому рівні, ніж просто маніпулювання символами.

63. Високий рівень уміння відчувати математичну структуру також допомагає в математичному моделюванні. Якщо досліджувані об'єкти не є абстрактними математичними об'єктами, а об'єктами реального світу, які математично моделюються, то математичні структури скеровують процес моделювання. Учні / студенти також можуть застосовувати структури до нематематичних об'єктів, щоб зробити їх предметом математичного аналізу. Фігуру неправильної форми можна апроксимувати за допомогою простих фігур, площа яких відома. Геометричний орнамент можна зрозуміти за допомогою припущення про наявність в ньому трансляційної, обертальної або дзеркальної симетрії та завдяки уявному поширенню структури орнаменту на весь простір. Статистичний аналіз нерідко полягає в застосуванні структури до набору даних, наприклад шляхом припущення, що він походить від нормального розподілу або що одна змінна є лінійною функцією іншої за умови, що помилки вимірювань підлягають нормальному закону.

64. Уміння бачити математичні структури підтримує міркування в реальному застосуванні математики, що передбачено цим рамковим документом, даючи змогу учням /

студентам застосовувати знання про ситуації чи проблеми, подані в одному контексті, до проблем, що тапляються в іншому контексті та мають подібну структуру.

Функціональні залежності між величинами

65. Учні початкової школи стикаються із задачами, у яких вони мають знайти конкретні кількості. Наприклад, з якою швидкістю вони мають їхати, щоб дістатися з м. Тусона до м. Фенікса, що розташовані на відстані 180 км, за 1 год 40 хв? Такі задачі мають конкретну відповідь: для того щоб подолати відстань у 180 км за 1 год 40 хв, потрібно їхати зі швидкістю 108 км/год.

66. На певному етапі навчання учні починають працювати із ситуаціями, коли кількість є змінною, тобто в яких вона може приймати цілий ряд значень. Наприклад, яке співвідношення між подоланим шляхом d (у кілометрах) та часом руху t (у годинах), якщо ви їдете з постійною швидкістю 108 км/год? Такі завдання передбачають знання функційних залежностей. У цьому випадку співвідношення $d = 108t$ є пропорційною залежністю — базовим прикладом і, можливо, найважливішим типом залежності для загальних знань.

67. Залежності між величинами можуть бути виражені в різні способи: рівняннями, графіками, таблицями або словесними описами. Виділення із цих способів представлення поняття самої функції як абстрактного об'єкта є важливим кроком у навчанні учнів / студентів. Ключовими аспектами такої концепції є область визначення, з якої вибирають вихідні дані, область значень, якій належать результати, і процес для отримання результатів з вихідних даних.

68. Виявлення функціональних зв'язків між змінними в задачах реальної математики, що передбачено цим рамковим документом, підтримує процеси міркування, даючи змогу учням / студентам зосередитися на тому, як взаємозалежність і взаємодія змінних впливає на ситуацію, описану в задачі.

Погляд на реальний світ крізь призму математичного моделювання

69. Моделі представляють концептуалізацію явищ. Моделі — це спрощення реальності, у якому висувають на передній план певні властивості явища, при цьому наближуючи або ігноруючи інші. Отже, «усі моделі є неправильними, але деякі є корисними» (Box and Draper, 1987, p. 424_[24]). Корисність моделі впливає з її пояснювальної та/або прогностичної сили (Weintrop et al., 2016_[15]). У цьому сенсі моделі є абстракціями реальності. Модель може представляти концептуалізацію, яка розуміється як наближення, робоча гіпотеза щодо об'єкта або навмисне спрощення. Математичні моделі формують математичною мовою, використовуючи широкий спектр математичних інструментів і результатів (наприклад, арифметичних, алгебраїчних, геометричних тощо). По суті, їх використовують як спосіб точного визначення концептуалізації чи теорії явища як для аналізу й оцінювання даних (чи відповідає модель даним?), так і для прогнозування. Моделями можна оперувати: їх створюють для тривалого застосування або для використання з різними вихідними даними, отримуючи так симуляцію. За допомогою симуляції можна робити прогнози, вивчати наслідки й оцінювати релевантність і точність моделей. Під час моделювання необхідно враховувати реальні параметри, які впливають на модель, і рішення, розроблені за допомогою моделі.

70. Комп'ютерні (або обчислювальні) моделі забезпечують здатність перевіряти гіпотези, генерувати дані, використовувати випадковість тощо. Математична грамотність включає здатність розуміти, оцінювати й робити висновки на основі обчислювальних моделей.

71. Використання моделей загалом та математичних моделей зокрема підтримує процеси міркування під час розв'язування задач реальної математики, що передбачено цим рамковим документом, заохочуючи учнів / студентів зосереджуватися на найбільш значущих елементах ситуацій і в такий спосіб зводити проблему до її суті.

Випадкова величина як ключове поняття статистики

72. У статистиці врахування варіативності є якщо не головним, то визначальним аспектом, навколо якого створено цю дисципліну. У сучасному світі люди часто стикаються із ситуаціями, у яких вони просто ігнорують варіативність, пропонуючи надто широкі узагальнення, які зазвичай є неточними, а іноді й хибними, — отже, вони можуть бути дуже небезпечними. У суспільних науках упередженість зазвичай виникає, коли не враховують джерел і величини мінливості в ознаці, що обговорюють.

73. Суть статистики полягає в урахуванні варіативності або її моделюванні, яка вимірюється дисперсією випадкових величин чи у випадку кількох змінних коваріантною матрицею. Це забезпечує ймовірнісне середовище для розуміння різних явищ, а також прийняття відповідних рішень. Статистика здебільшого полягає в пошуку закономірностей у дуже варіативному контексті: це намагання знайти єдину визначальну «істину» на тлі великої кількості випадкових шумів. Поняття «істина» наведено в лапках, оскільки це не та істина, яку, за Платоном, може надати математика, а тільки оцінювання істини, встановленої в імовірнісному контексті, яке супроводжується оцінюванням похибки у відповідному процесі. У підсумку людина, яка приймає рішення, ніколи точно не дізнається, що є істиною. У найкращому випадку визначить діапазон все ж можливих значень. Що краще виконано оцінювання, наприклад що більший обсяг даних було охоплено, то менший діапазон можливих значень, але уникнути діапазону неможливо. Певною мірою математика величин, які зумовлені випадковістю, була відображена в попередніх циклах PISA, проте з огляду на посилення її ролі цим концепціям приділено більше уваги в цьому рамковому документі.

74. Розуміння варіації як центральної особливості статистики підтримує процеси міркування під час розв'язування задач реальної математики, що передбачено цим рамковим документом, надаючи учням / студентам можливість використовувати аргументацію на основі даних, усвідомлюючи обмеженість висновків, які можуть бути зроблені.

Розв'язування задач

75. У визначенні математичної грамотності йдеться про здатність людини формулювати, застосовувати й інтерпретувати (та оцінювати) математику. Ці три слова — формулювати, застосовувати й інтерпретувати — забезпечують корисну та значущу структуру організації математичних процесів, описуючи, що людина робить для поєднання контексту проблеми з математикою і, отже, для розв'язання проблеми.

У кожному математичному завданні тестування PISA-2022 приділятимуть увагу або математичному мисленню, або одному з трьох математичних процесів:

- формулювання ситуацій математично;
- застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування;
- інтерпретація, застосування й оцінювання математичних результатів.

76. Для всіх, хто дотичний до щоденного навчання учнів / студентів, дуже важливо розуміти, наскільки ефективно учні / студенти здатні брати участь у кожному із цих процесів циклу / моделі розв'язання задачі. Процес *формулювання* показує, наскільки ефективно вони можуть розпізнавати можливості використання математики в проблемних ситуаціях і далі задіювати відповідну математичну структуру, щоб представити певну контекстоцентровану проблему в математичній формі. Процес *застосування* показує, наскільки добре учні / студенти можуть виконувати обчислення й операції, а також використовувати відомі їм математичні поняття й факти для розв'язування проблеми, сформульованої математично. Процес *інтерпретації* (й *оцінювання*) показує, наскільки ефективно учні / студенти можуть аналізувати математичні розв'язки та висновки, інтерпретувати їх у контексті проблеми з реального життя й визначати обґрунтованість результатів чи висновків. Здатність учнів / студентів користуватися математикою для розв'язування різних проблем і застосовувати її в різних ситуаціях залежить від умінь, пов'язаних з усіма цими трьома процесами циклу / моделі розв'язання задачі, а розуміння ефективності учнів / студентів у кожній категорії може допомогти в прийнятті важливих освітніх рішень як на загальнодержавному рівні, так і на рівні політики, яку проводить заклад освіти.

77. Крім того, заохочення учнів до набуття досвіду розв'язування математичних задач за допомогою інструментів і засобів обчислювального мислення сприяє набуттю ними вмій передбачення, рефлексії, пошуку й усунення помилок (Brennan and Resnick, 2012_[25]).

Формулювання ситуацій математично

78. Під словом «формулювати» у визначенні математичної грамотності йдеться про здатність особи бачити й виявляти можливості використання математики й далі надавати контекстоцентрованої проблемі необхідної математичної структури. У процесі математичного формулювання ситуацій особа вирішує, чи може вона відшукати математичну сутність проблеми з метою її аналізу та розв'язання. Вона переносить проблему з обставин реального життя до сфери математики й наділяє реальну життєву проблему математичною структурою та представляє її в певній формі. Далі вона обмірковує проблему й знаходить у ній певні обмеження й припущення. Процес математичного формулювання ситуацій включає, зокрема, такі види діяльності:

- вибір з переліку відповідної моделі¹²;
- виявлення математичних аспектів проблеми, яка описана в контексті реального життя, і визначення значущих змінних;

¹² Ця діяльність включена до списку, урахувавши необхідність використання тестових завдань, що будуть доступні учням / студентам, результати яких містяться в нижній частині шкали PISA.

- розпізнання математичної структури (зокрема закономірностей, залежностей і послідовностей) у проблемах або ситуаціях;
- спрощення проблеми або ситуації з метою зробити її придатною для математичного аналізу (наприклад, шляхом її декомпозиції);
- установа для математичної моделі обмежень і припущень, які впливають з контексту;
- представлення ситуації математично шляхом використання відповідних змінних, символів, діаграм і стандартних моделей;
- представлення проблеми в інший спосіб, зокрема організація її згідно з математичними поняттями й висунення відповідних припущень;
- розуміння й пояснення зв'язків між специфічною мовою проблеми, тобто мовою, що відповідає контексту, і формальною мовою та символами, потрібними для представлення цієї проблеми в математичній формі;
- переклад проблеми на математичну мову або презентація її в інший спосіб;
- визначення аспектів проблеми, які відповідають відомим задачам або математичним поняттям, фактам або процедурам;
- вибір і застосування найефективніших комп'ютерних інструментів для відображення математичної залежності, яка є невід'ємною частиною контекстоцентрованої математичної задачі;
- створення впорядкованого набору (покрокових) інструкцій для розв'язування задач.

Застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування

79. Під словом «застосовувати» у визначенні математичної грамотності йдеться про здатність особи використовувати математичні поняття, факти, процедури й міркування для розв'язування сформульованих математичною мовою задач й отримання математичних висновків. У процесі використання математичних понять, фактів, процедур і проведення міркувань для розв'язування задач особа здійснює математичну діяльність, необхідну для отримання результатів і знаходження математичного розв'язання (наприклад, виконання арифметичних обчислень, розв'язування рівнянь, отримання логічних висновків із математичних припущень, виконання операцій у символічній формі, зчитування математичної інформації з таблиць і графіків, зображення фігур у просторі й операції з ними, аналіз даних тощо). Особа працює з моделлю проблемної ситуації, виявляє закономірності, установа зв'язки між математичними об'єктами, а також наводить математичну аргументацію. Відповідні процеси застосування математичних понять, фактів, процедур і міркувань включають, зокрема, такі дії:

- виконання простих обчислень^{13,**}

¹³ Ця діяльність (з поміткою **) включена до списку, урахуваючи необхідність використання тестових завдань, що будуть доступні учням / студентам, результати яких містяться в нижній частині шкали PISA.

- формулювання простого висновку;^{**}
- вибирання з переліку відповідної стратегії;^{**}
- розроблення й реалізація стратегії для знаходження математичних розв'язань;
- використання математичних інструментів, зокрема комп'ютерних технологій, для знаходження точних чи наближених розв'язків;
- застосування математичних фактів, правил, алгоритмів і структур у процесі знаходження розв'язань;
- виконання операцій із числами, графічними й статистичними даними та інформацією, алгебраїчними виразами й рівняннями, а також геометричними образами;
- побудова діаграм, графіків і геометричних конструкцій, отримання з них математичної інформації;
- використання різних видів представлення інформації та здійснення перетворень між ними в процесі знаходження розв'язань;
- складання узагальнень на основі результатів застосування математичних процедур з метою знаходження розв'язань;
- осмислення математичної аргументації й пояснення та доведення обґрунтованості математичних результатів;
- оцінювання значущості патернів, які спостерігаються (або пропонуються) та закономірностей у даних.

Інтерпретація, застосування й оцінювання математичних результатів

80. Під словом «інтерпретувати» (й «оцінювати») у визначенні математичної грамотності йдеться про здатність людини осмислювати математичні розв'язання, результати або висновки й інтерпретувати їх у контексті тих проблем реального життя, які стояли на початку циклу розв'язання задачі. Цей процес включає повернення до контексту проблеми й визначення обґрунтованості результатів і їх сенсу в контексті проблеми. Процес інтерпретації, використання й оцінювання математичних результатів охоплює елементи як «інтерпретації», так і «оцінювання» у циклі математичного моделювання. Особам, залученим до цих процесів, може бути запропоновано сконструювати розв'язок і надати пояснення й міркування в контексті проблеми, одночасно осмисливши і процес моделювання, і його результати. Процес *інтерпретації, використання й оцінювання математичних результатів* включає, зокрема, такі види діяльності:

- інтерпретація інформації, представленої в графічній формі та/або у формі діаграм^{14,**}
- оцінювання математичного результату з урахуванням контексту задачі;^{**}
- інтерпретація математичного результату в контексті реальних умов;

¹⁴ Ця діяльність (з поміткою «**») включена до списку, ураховуючи необхідність використання тестових завдань, що будуть доступні учням / студентам, результати яких містяться в нижній частині шкали PISA.

- оцінювання обґрунтованості математичного розв'язання в контексті реальної проблеми;
- розуміння, як реальна ситуація зумовлює наслідки застосування математичних процедур або моделей, що уможливорює формулювання суджень щодо контексту про те, як отримані результати можуть бути скориговані або застосовані;
- пояснення причини наявності або відсутності сенсу в математичному результаті або висновку, зважаючи на певний контекст розглядуваної проблеми;
- розуміння обсягу й меж математичного поняття та математичних розв'язань;
- критичне осмислювання й установлення меж моделі, використаної для розв'язування проблеми;
- використання математичних міркувань та обчислювального мислення для прогнозування, доведення тверджень, перевірки й порівняння розв'язань.

ЗМІСТОВІ КАТЕГОРІЇ МАТЕМАТИКИ

81. Для життя в сучасному світі дуже важливими є розуміння математики й здатність застосовувати це розуміння та знання для розв'язування значущих контекстоцентризованих проблем. Це означає, що математично мислити й розв'язувати проблеми та інтерпретувати ситуації, сформульовані в особистісних, професійних, суспільних і наукових контекстах, необхідно з опорою на певне математичне розуміння й певні знання.

82. Оскільки метою PISA є оцінювання математичної грамотності, було запропоновано таку організаційну структуру для знань математичного змісту, яка базується на математичних явищах, що лежать в основі широких класів задач. Такий спосіб організації змісту не є новим, про що свідчать дві відомі публікації: «На плечах гігантів: нові підходи до вміння рахувати» (Steen, 1990^[26]) і «Математика: наука про закономірності» (Devlin, 1994^[27]).

83. Перелік змістових категорій математики в поточній версії рамкового документа (раніше використаний у 2012 році) знову застосовується в дослідженні PISA-2022 з метою відображення математичних явищ, що лежать в основі широких класів задач, загальної структури математичного домену й основних тем навчальних програм. Ці чотири категорії характеризують математичний зміст, який є основним для дисципліни, та ілюструють широку змістову тематику тестових завдань в інструментах PISA-2022 (які включатимуть тестові завдання дослідження PISA-D для збільшення можливостей шкалювання учнів / студентів з низькими результатами PISA):

- зміни й залежності;
- простір і форма;
- кількість;
- невизначеність і дані.

84. Завдяки цим чотирьом категоріям математичний зміст може бути організовано у спосіб, що забезпечить у тестових завданнях охоплення різних тем, зосередження на важливих математичних явищах і водночас дасть змогу уникнути надмірно детальної класифікації тестових завдань, яка заважатиме цілеспрямовано аналізувати важливі й цікаві задачі, в основі яких лежать реальні ситуації.

85. Хоча поділ за змістовими категоріями має велике значення для розроблення й відбирання тестових завдань, а також для звітування про результати оцінювання, варто зауважити, що деякі тестові завдання з математики можуть потенційно належати до більше ніж однієї змістової категорії.

86. Національні навчальні програми з математики переважно організовані навколо низки змістових ліній (наприклад, числа, алгебра, функції, геометрія, робота з даними) і докладних списків тем, які визначають чіткі очікування щодо сформованості знань учнів / студентів. Зазвичай навчальні програми з математики розробляють, щоб забезпечити учнів / студентів знаннями й уміннями, які стосуються основних математичних явищ. Саме ці явища й представлені змістом тестових завдань PISA. Отже, діапазон змісту, що репрезентований у математичному тестуванні PISA внаслідок саме такої його організації, тісно пов'язаний із тим змістом, який здебільшого наявний у національних навчальних програмах з математики. У цьому рамковому документі перераховано деякі математичні теми, які (на основі аналізу національних програм і стандартів одинадцяти країн) важливі для оцінювання математичної грамотності 15-річних підлітків.

87. У цьому розділі описано широкі категорії математичного змісту й більш конкретні теми змісту, які підходять для 15-річних учнів / студентів. Ці категорії й теми відображають рівень і широту змісту, який може бути включено для оцінювання в дослідженні PISA-2022. Кожну категорію описано з погляду її змісту та визначено її відповідність математичним процесам (математичному мисленню й процесам циклу розв'язування задачі), після чого надано конкретніше визначення того змісту, який підходить для включення в оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів / студентів і 15-річних підлітків, які не навчаються в закладах освіти (не здобувають формальної освіти).

88. Для оцінювання математичної грамотності в дослідженні PISA-2022 було визначено чотири додаткові теми. Ці теми не є новими для змістових категорій математики. Наразі їх включено до наявних змістових категорій PISA і вони потребують особливої уваги. У публікації Махаджана та інших (PISA Mathematics 2022, 2016^[28]) ці чотири теми подано не тільки як ситуації, які часто трапляються в дорослому житті людини, і як математика, необхідна для нових галузей економіки, наприклад для високотехнологічного виробництва тощо. До цих чотирьох тем входять явища зростання, геометричні апроксимації, комп'ютерне моделювання й умовне прийняття рішень. Кожну тему висвітлено разом з відповідною категорією змісту математики:

- явища зростання (зміни й залежності);
- геометричні апроксимації (простір і форма);
- комп'ютерне моделювання (кількість);
- умовне прийняття рішень (невизначеність і дані).

Зміни й залежності

89. Як у реальному, так і в змодельованому світі між предметами й обставинами наявна величезна кількість тимчасових і постійних залежностей, у яких зміни відбуваються в системах взаємопов'язаних об'єктів або в тих випадках, коли елементи здійснюють вплив одне на одного. У багатьох випадках ці зміни відбуваються з плином часу, в інших зміни в одному об'єкті або величині пов'язані зі змінами в іншому об'єкті або величині. Деякі

із цих змін мають дискретний характер, інші відбуваються безперервно. Деякі залежності мають сталий або незмінний характер. Грамотність у галузі змін і залежностей передбачає розуміння фундаментальних типів змін і здатність визначати, коли вони відбуваються, для використання відповідної математичної моделі з метою опису й прогнозування змін. У математичному сенсі це означає моделювання змін і залежностей за допомогою відповідних функцій або рівнянь, а також створення, інтерпретацію та графічне й символічне представлення залежностей і перехід від однієї форми представлення до іншої.

90. Зміни та залежності можна спостерігати в багатьох різноманітних явищах, наприклад у зростанні кількості організмів, сезонних змінах і циклах, погодних закономірностях, рівнях зайнятості населення та в економічних умовах. Такі аспекти традиційного математичного змісту, як функції та алгебра, зокрема алгебраїчні вирази, рівняння й нерівності, табличні й графічні представлення, є головними в описі, моделюванні й інтерпретації змін. Комп'ютерні інструменти забезпечують засоби візуалізації та оперування змінами й залежностями. Здатність розпізнавати, як і коли комп'ютерні інструменти можуть посилювати й доповнювати математичні поняття, є важливим складником обчислювального мислення.

91. Представлення даних і залежностей, описаних за допомогою статистики, також часто застосовують для відображення й інтерпретації змін і залежностей. Крім того, важливим для визначення й інтерпретації змін і залежностей є чітке усвідомлення понять числа та одиниць вимірювання. Деякі цікаві залежності можна виявити під час геометричних вимірювань — наприклад, як може змінюватися периметр фігури зі зміною її площі або які залежності є між довжинами сторін трикутників.

92. *Явища зростання.* Усвідомлення небезпечних наслідків епідемій грипу, спалахів бактерійних захворювань, а також загроз, пов'язаних зі змінами клімату, потребує від людей думати не тільки з погляду лінійних залежностей, але й визнавати, що такі явища потребують нелінійних (часто експоненціальних, а також інших) моделей. Лінійні залежності дуже поширені, їх легко розпізнавати та зрозуміти, але припускати лінійність у всьому — небезпечно. Гарним прикладом лінійності є визначення пройденої відстані за різні проміжки часу під час подорожі з певною швидкістю. Цей приклад, імовірно, використовує кожна людина. Таке використання лінійності забезпечує обґрунтовану оцінку в тих ситуаціях, коли швидкість залишається відносно постійною. Але, наприклад, у ситуації з епідемією грипу такий лінійний підхід суттєво недооцінює кількість хворих через 5 днів після початку епідемії. Тут ключовим буде розуміння нелінійного (зокрема, квадратичного та експоненціального) зростання і того, як швидко може поширюватися інфекція, з огляду на критичну швидкість щоденного зростання. Поширення інфекції Зіка є важливим прикладом експоненціального зростання: визнання такої моделі цього захворювання допомогло медикам зрозуміти загрозу від неї та необхідність швидких дій.

93. Визначення явищ зростання як ключової теми в категорії *змін і залежностей* не означає, що ми очікуємо, що учні / студенти, які братимуть участь у дослідженні PISA-2022, попередньо вивчали експоненціальну функцію. Тож тестові завдання PISA, звичайно, і не вимагатимуть знань про неї. Натомість очікується введення таких завдань, які передбачатимуть визнання учнями того, що:

- a) не завжди зростання є лінійним;

б) нелінійне зростання має особливі та глибокі наслідки для розуміння людиною певних ситуацій;

в) «експоненціальне зростання» характеризується надзвичайно швидким темпом і потребує певної інтуїтивної оцінки. Так, наприклад, під час застосування шкали для вимірювання сили землетрусу необхідно усвідомлювати, що кожне збільшення сили на одиницю за шкалою Ріхтера не означає, що збільшення його наслідків відбуватиметься пропорційно, а натомість означає, що наслідки будуть більші в 10, 100 або 1000 разів тощо.

Простір і форма

94. Категорія «простір і форма» охоплює широкий спектр явищ нашого візуального та фізичного світу: моделі, властивості предметів, розташування й орієнтації, представлення предметів, кодування й декодування візуальної інформації, навігація й динамічна взаємодія з реальними формами та їх представленнями, рух, переміщення й здатність передбачати дії в просторі. Простір і форма лежать в основі геометрії, але ця змістова категорія виходить за межі традиційного змісту геометрії, її значення й методів і спирається на інші математичні підгалузі, приміром на просторову візуалізацію, вимірювання й алгебру. Наприклад, форми можуть змінюватися, а точка під час руху описувати деяке геометричне місце точок, а отже, дослідження цих процесів потребує використання функцій. До цієї змістової категорії також входять розпізнавання форм, їх перетворення й інтерпретація, що потребує застосування різних інструментів — від програм динамічної геометрії до систем глобального позиціонування (GPS).

95. Дослідження PISA передбачає, що розуміння низки основних понять і наявність певних умінь мають важливе значення для тих аспектів математичної грамотності, які стосуються простору й форми. Математична грамотність у питаннях простору й форми включає цілу низку математичних процесів, наприклад розуміння перспективи (як у живописі), складання та читання карт, перетворення форм за допомогою технологій і без них, інтерпретація видів тривимірних сцен із різних позицій і побудова зображень геометричних форм.

96. *Геометрична апроксимація.* Наразі світ має справи з формами, які не відповідають типовим моделям регулярності або симетрії. Оскільки прості формули не стосуються нерегулярних об'єктів, стає складніше зрозуміти, що ми бачимо і як знайти площу або об'єм таких конструкцій. Наприклад, визначення потрібної площі килимового покриття для будинку, де кімнати мають гострі кути, що з'єднуються кривими лініями, потребує іншого підходу, ніж коли ми маємо справу зі звичайними прямокутними кімнатами.

97. Визначення геометричної апроксимації як ключової теми в категорії «простір і форма» означає, що учні / студенти мають бути здатними застосовувати своє розуміння традиційних понять простору й форми для низки типових ситуацій.

Кількість

98. Кількість, можливо, є найпоширенішим і найважливішим математичним поняттям, що стосується взаємодії зі світом і функціонуванням у ньому. Воно включає в себе визначення кількості атрибутів об'єктів, залежностей, ситуацій у світі, розуміння різноманітних представлень таких визначень кількостей, а також оцінювання інтерпретацій та аргументів на основі кількості. Для визначення кількості будь-чого в реальному

житті необхідно розуміти процес вимірювання, робити обчислення, знати одиниці вимірювань, числові тенденції й закономірності. З погляду категорії кількості головними аспектами математичної грамотності є аспекти кількісного обґрунтування, наприклад числові значення, різні представлення чисел, точність обчислень, усні розрахунки, оцінювання обґрунтованості результату.

99. Квантифікація — це основний метод опису й вимірювання різноманіття властивостей певних аспектів світу. Ця дія дає змогу моделювати ситуації, вивчати зміни та залежності, описувати простір і форму та перетворювати їх, організовувати й інтерпретувати дані, вимірювати й оцінювати невизначеність тощо. У межах математичної грамотності категорія кількості охоплює знання чисел і числових операцій, застосовуваних у різноманітних умовах.

100. *Комп'ютерне моделювання.* Як у математиці, так і в статистиці є проблеми, які непросто розв'язати з різних причин: математика в них може бути надто складною, пов'язаною з великою кількістю чинників, які діють в одній системі, або просто пов'язаною з етичними питаннями, які стосуються впливу на живі істоти чи їхнє оточення. У сучасному світі для розв'язування таких проблем усе частіше застосовують комп'ютерні моделі, що діють за певними алгоритмами. У наведеному в *додатку А* прикладі «Моделювання заощаджень» учениця використовує комп'ютерну модель як інструмент для прийняття рішень. Комп'ютерна модель виконує для майбутньої студентки обчислення, залишаючи їй планування, прогнозування, керування змінними, від яких залежать досліджувані величини, та прийняття рішень, що й приводить до розв'язання проблеми.

101. Визначення комп'ютерних моделей як ключової теми категорії «кількість» сигналізує про те, що в комп'ютерному тестуванні з математики, яке проходитиме в рамках дослідження PISA з 2022 року, буде використано низку складних задач, включаючи складання бюджету й планування, у яких учні / студенти зможуть аналізувати змінні за допомогою комп'ютерної моделі безпосередньо під час виконання тестового завдання.

Невизначеність і дані

102. У науці, техніці й повсякденному житті випадковість та пов'язана з цим невизначеність є звичним явищем. Воно лежить в центрі уваги теорії ймовірностей і математичної статистики. Категорія «невизначеність і дані» охоплює визначення місця змін у процесах, усвідомлення кількісної оцінки цих змін, визнання невизначеності й похибки у вимірюваннях і знання про ймовірність. Крім того, до неї входять формулювання, інтерпретація й оцінювання висновків, зроблених у ситуаціях, для яких характерна невизначеність. Представлення й інтерпретація даних — це ключові поняття цієї категорії (Moore, 1997^[29]).

103. Невизначеність є в науковому прогнозуванні, результатах опитувань громадської думки, прогнозах погоди та в економічних моделях. Варіативність стосується виробничих процесів, результатів тестів і соціологічних опитувань; випадковість має принципове значення в багатьох розважальних заходах. У традиційній навчальній програмі теми ймовірності та статистики забезпечують формальні засоби опису моделювання й інтерпретації конкретного класу явищ невизначеності, а також навчають робити відповідні стохастичні умовиводи. Крім того, числові вміння та деякі алгебраїчні знання (наприклад,

використання графіків і володіння символічними представленнями) допомагають успішно розв'язувати проблеми, що стосуються цієї змістової категорії.

104. *Умовне прийняття рішень.* Статистика надає міру варіації, яка характерна для більшості того, із чим люди стикаються в повсякденному житті. Цією мірою є дисперсія. Коли маємо кілька змінних, для кожної зі змінних можна визначити варіацію, а також коваріацію, яка характеризує зв'язки між змінними. Ці взаємозв'язки часто можуть бути представлені за допомогою таблиць із двома входами, які слугують основою для прийняття умовних рішень (умовиводів). У такій таблиці для двох дихотомічних змінних (тобто змінних, кожна з яких може набувати двох значень) маємо чотири комбінації значень змінних. Таблиця (аналіз ситуації) дає три типи відсотків, які своєю чергою дають оцінки відповідних імовірностей. До них належать ймовірності чотирьох спільних подій, дві маргінальні та умовні ймовірності, які відіграють центральну роль у тому, що ми називемо умовним прийняттям рішень. Тестові завдання, що будуть використані в дослідженні PISA, передбачають, що учні / студенти зможуть прочитати відповідні дані з таблиці та продемонструвати їх глибоке розуміння.

105. У демонстраційному прикладі «Рішення про купівлю» запропоновано зведений рейтинг товару в інтернет-магазині, складений за відгуками покупців. Крім того, подано більш докладний аналіз відгуків клієнтів, які надали найнижчі оцінки (1 або 2 зірочки). За цими даними створено двосторонню таблицю, і учень має продемонструвати розуміння статистичних показників, які вона надає.

106. Визначення умовного прийняття рішень як ключової теми категорії «невизначеність і дані» означає, що від учнів / студентів можна очікувати усвідомлення того, як припущення за певних умов впливають на можливі висновки, а також того, що різні припущення можуть породжувати різні висновки.

МАТЕМАТИЧНІ ТЕМИ, ВАЖЛИВІ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ 15-РІЧНИХ УЧНІВ / СТУДЕНТІВ

107. Ефективне розуміння й розв'язування контекстоцентризованих проблем, пов'язаних зі змінами й залежностями, простором і формою, кількістю та невизначеністю й даними, потребує опори на різні математичні поняття, процедури, факти й інструменти на належному рівні глибини й досвіду. Організатори тестування математичної грамотності PISA прагнуть оцінити рівень і структуру математичних знань, необхідних 15-річним учням / студентам, щоб ті могли стати творчими, активними та мислячими громадянами XXI століття, здатними формулювати обґрунтовані судження та приймати аргументовані рішення. Водночас програма PISA, хоча й не розроблена з метою перевірки навчальних стандартів або програм, віддзеркалює ті математичні теми, які 15-річні учні / студенти, імовірно, мали можливість на цей час вивчити у своїх закладах освіти.

108. Під час розроблення рамкового документа з математики для дослідження PISA-2012 його автори прагнули створити таке оцінювання, яке спрямоване на майбутнє, але водночас відображає математику, якої 15-річні учні / студенти, імовірно, мали можливість навчатися. Для цього в одинадцяти країнах вивчали зразки бажаних результатів навчання, які допомогли визначити і те, чого навчають учнів / студентів на уроках математики в різних країнах світу, і те, що країни вважають реалістичним і важливим у підготовці

учнів / студентів до початку професійного життя або вступу до закладу вищої освіти. На підставі спільних рис різних країн, визначених у цьому аналітичному дослідженні, і за погодженням експертів з математики було створено перелік математичних тем, доцільних для включення до оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів / студентів у PISA-2012. Цей перелік застосовують і в дослідженні PISA-2022.

109. Під час підготовки до PISA-2022 перелік було доповнено чотирма ключовими математичними темами. Проте він все одно не є вичерпним, а тільки надає уявлення про математичний зміст тестових завдань дослідження PISA:

- *Явища зростання*: різні типи лінійного та нелінійного зростання.
- *Геометрична апроксимація*: апроксимація характеристик і властивостей нерегулярних або незнайомих форм і об'єктів через їх розбиття на знайомі форми й об'єкти, для яких існують формули й інструменти дослідження.
- *Комп'ютерне моделювання*: дослідження ситуацій (наприклад, формування бюджету, планування, розподіл популяції, поширення інфекції, експериментальна ймовірність, моделювання часу реакції тощо) за допомогою змінних і впливу цих змінних на результат.
- *Умовні прийняття рішень*: застосування умовної ймовірності й базових принципів комбінаторики для інтерпретації ситуацій і створення прогнозів.
- *Функції*: поняття функції; переважну увагу приділено лінійним функціям, властивостям, різним формам їх описування й задавання. Зазвичай використовують такі способи задавання функцій: словесний, символічний, табличний і графічний.
- *Алгебраїчні вирази*: словесна інтерпретація та перетворення алгебраїчних виразів, що включають числа, символи, арифметичні операції, степені й корені.
- *Рівняння й нерівності*: лінійні рівняння й нерівності та ті, що зводяться до них, прості квадратні рівняння, аналітичні й неаналітичні методи розв'язання.
- *Системи координат*: представлення й опис даних, їх розташування й залежності між ними.
- *Плоскі й об'ємні геометричні фігури, залежності між ними та між елементами*: співвідношення між елементами фігур (наприклад, теорема Піфагора для прямокутного трикутника), взаємне розташування, подібність і конгруентність, динамічні відношення, пов'язані з перетворенням і рухом фігур, а також відповідність між плоскими та об'ємними фігурами.
- *Вимірювання*: кількісне визначення характеристик фігур та об'єктів, наприклад вимірювання кутів, довжин відрізків, відстаней, периметрів, довжин кіл, площ та об'ємів.
- *Числа й одиниці вимірювання*: поняття числа та системи числення (включаючи перетворення чисел з однієї системи в іншу), представлення чисел, властивості цілих і раціональних чисел; вимірювання часу, вартості, маси, температури, відстані, площі й об'єму; одиниці вимірювання цих величин, їх похідні та зв'язок між ними.

- *Арифметичні операції*: зміст і властивості арифметичних операцій та їх позначення.
- *Відсотки, відношення та пропорції*: числовий опис величини за допомогою порівняльної мірки; застосування пропорцій і пропорційних міркувань для розв'язування задач.
- *Принципи підрахунків*: комбінації без повторень.
- *Наближені обчислення*: наближені оцінювання величин і значень числових виразів, включаючи значущі цифри й округлення.
- *Збір, представлення й інтерпретація даних*: характер і походження різних типів даних, збір даних і різні способи їх аналізу, представлення й інтерпретації.
- *Дисперсія даних та її опис*: поняття дисперсії, розподіл і центральні тенденції наборів даних, способи їх опису, числова й графічна інтерпретація.
- *Вибірки*: поняття вибірки й формування вибірки з генеральної сукупності, зокрема прості виведення на основі властивостей вибірки, включаючи точність і достовірність.
- *Шанси та ймовірність*: поняття випадкових подій і випадкових змін і їх представлення, частота і ймовірність; основні аспекти поняття ймовірності та умовної ймовірності.

КОНТЕКСТИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ І НАВИЧКИ ХХІ СТОЛІТТЯ

110. Визначення математичної грамотності охоплює два важливі аспекти, які необхідно враховувати під час розроблення тестових завдань PISA. По-перше, визначення чітко вказує на застосування математичної грамотності в контекстах реального світу. По-друге, у ньому йдеться про те, що математична грамотність допомагає людині зрозуміти роль математики у світі, робити обґрунтовані умовиводи й приймати рішення, необхідні творчому, активному й мислячому громадянину ХХІ століття. У цій частині документа обговорюємо, як впливають контексти реального світу й навички ХХІ століття на розроблення тестових завдань для дослідження PISA.

111. Використання реальних контекстів для оцінювання математичної грамотності в дослідженні PISA не є простим. Контексти реального світу включають інформацію, і ця інформація передається за допомогою текстів. Кількісна та статистична інформація, що поширюється у світі та доходить до громадян, передається через друковані чи усні тексти, наприклад статті в засобах масової інформації, пресрелізи, блоги, соціальні мережі, рекламу тощо. Ці друковані та усні тексти використовують для поширення повідомлень чи аргументів, які можуть включати (чи не включати) числову інформацію та/або графіки. Текст є головним інструментом для поєднання контексту, і з цього випливає, що розуміння тексту є основним і необхідним попереднім умінням для досягнення успіху в математичній грамотності. Складнощі, які виникають у зв'язку з цим у розробників тестових завдань для дослідження PISA, чималі. З одного боку, в оцінюванні має бути використано соціально значущу числову інформацію, подану з використанням складного тексту, з іншого боку, порівняльний характер оцінювання, багато мов, на які перекладають тестові завдання, та широкий діапазон рівнів розуміння тексту 15-річними учасниками дослідження

накладають обмеження на складність текстів, які реально можна використовувати. Ці питання обговоримо далі в розділі про розроблення тестових завдань.

Контексти

112. Важливим аспектом математичної грамотності є те, що математику застосовують для розв'язування проблем, заданих у конкретному контексті. *Контекст* — це аспект особистісного світу, у якому подано проблему. Вибір відповідних математичних стратегій і представлень нерідко залежить від контексту, у якому виникає проблема, і для розроблення її математичної моделі необхідно використовувати знання про контекст реального світу. Уміння працювати в межах контексту є дуже значущим і ставить перед особою, яка розв'язує задачі, додаткові вимоги (Watson and Callingham, 2003_[30]). Для дослідження PISA велике значення має використання широкого спектру контекстів, що надає можливість залучати максимально широкий діапазон особистих інтересів і ситуацій, у яких діють люди у XXI столітті.

113. З огляду на кількість країн, які братимуть участь у дослідженні PISA-2022, на збільшення кількості країн-учасниць з низьким або середнім рівнем доходу на душу населення та на можливість участі в дослідженні 15-річних підлітків, які не навчаються в закладах освіти, укладачі тесту з математики повинні приділяти особливу увагу контекстам завдань, які мають бути доступними для максимально широкого кола учасників. У зв'язку з цим дуже важливо зберегти помірно навантаження тестових завдань з погляду читання, що дасть змогу використовувати математичне тестування суто для оцінювання математичної грамотності.

114. У рамковому документі з математики для PISA-2022 збережено чотири контекстні категорії, які використовували для класифікації тестових завдань у 2012 році. Вони слугуватимуть орієнтиром для розробників тестів і для циклу PISA-2022. Зазначимо, що ці контексти й призначені для інформування розробників тестових завдань, не варто очікувати, що їх буде використано у звітуванні.

115. *Особистісні контексти*. Проблеми, які входять до цієї категорії, сконцентровані навколо діяльності окремої особи, родини або групи однолітків. До контекстів, які розглядають як особистісні, належать, наприклад, ті, що включають ігри, приготування їжі, покупки, здоров'я людини, власний транспорт, спорт, подорожі, складання особистого розкладу, планування особистого бюджету тощо.

116. *Професійні контексти*. Завдання цієї категорії зосереджені на світі праці. Завдання, які належать до цієї категорії, можуть містити інформацію про таку діяльність працівника, як вимірювання, оцінювання вартості й замовлення матеріалів для будівництва, нарахування заробітної плати й бухгалтерський облік, контроль якості, планування й інвентаризація, проведення дизайнерських та архітектурних робіт, прийняття рішення щодо робочих питань тощо. У професійних контекстах може йтися про робочу силу будь-якого рівня — від некваліфікованих працівників до спеціалістів найвищої категорії, проте завдання дослідження PISA мають бути зрозумілими для 15-річних підлітків.

117. *Суспільні контексти*. Завдання цієї категорії зосереджені на певній громаді (місцевій, національній або світовій). До групи суспільних контекстів належать, наприклад, теми щодо виборчих систем, громадського транспорту, урядування, соціальної політики, демографії, реклами, національної статистики, економіки тощо. Хоча людина задіяна в

таких процесах на особистісному рівні, у межах категорії суспільних контекстів у центрі проблем, пов'язаних із цими процесами, є саме суспільство.

118. *Наукові контексти.* Завдання цієї категорії передбачають застосування математики для аналізу явищ природного світу й наукових та технологічних питань і тем. Такі контексти охоплюють теми на зразок таких: погода й клімат, екологія, медицина, наука про космос, генетика, вимірювання і власне світ математики тощо. Суто математичні завдання, у яких усі елементи стосуються світу математики, також належать до категорії наукових контекстів.

119. Групи тестових завдань у дослідженні PISA об'єднані спільними стимульними матеріалами, тому зазвичай усі завдання групи належать до однієї контекстної категорії. Але бувають і винятки: наприклад, у межах однієї групи в одному із завдань стимул може бути розглянуто з погляду особистості, а в іншому — з погляду суспільства. Коли до завдання входять тільки математичні елементи без посилання до контекстних елементів групи завдань, до якої воно належить, його зараховують до контекстної категорії всієї групи. У небагатьох випадках, коли завдання має суто математичні складники й не має жодного посилання до контексту за межами математики, завдання зараховують до наукової контекстної категорії.

120. Використання цих контекстних категорій забезпечує основу для відбору різних за контекстом завдань, і завдяки цьому оцінювання віддзеркалює широкий спектр способів використання математики, які варіюються від щоденного особистого використання до наукового використання для розв'язування глобальних проблем. Ба більше, важливо, щоб кожен контекстну категорію було представлено завданнями різного рівня складності. Оскільки головна мета цих — це виклик учням / студентам розв'язувати проблеми в різних контекстах, кожна з них робить суттєвий внесок у вимірювання математичної грамотності. Не може бути так, що рівень складності тестових завдань, що представляють одну контекстну категорію, систематично є вищим або нижчим, ніж рівень складності тестових завдань іншої категорії.

121. Визначаючи актуальні контексти, надзвичайно важливо враховувати, що головна мета тестування PISA — оцінити здатність використовувати математичні знання та вміння, якими 15-річні підлітки оволоділи на цей час. Отже, контексти тестових завдань вибирають з урахуванням відповідності інтересам і життю підлітків, а також вимог, які будуть ставити до підлітків на час до суспільства як творчих, активних і мислячих громадян. До обговорення ступеня такої актуальності керівництво проекту залучає національних координаторів програми з країн, що беруть участь у міжнародному дослідженні PISA.

Навички XXI століття

122. Світова увага до навичок XXI століття дедалі зростає, збільшуючи шанси на їх інтегрування до освітніх процесів у різних країнах світу. ОЕСР видала публікацію, у центрі уваги якої стоять такі навички, та власним коштом упровадила дослідницький проект під назвою «*Майбутнє освіти й навички: рамковий документ ОЕСР на період до 2030 р.*», у якому беруть участь близько 25 країн. На меті цього міжнародного проекту — дослідження навчальних програм країн-учасниць та ступеня інтегрування в них навичок XXI століття. Основну увагу організатори приділяють навчальним програмам майбут-

нього: якими вони будуть, зокрема з погляду навчання математики.

123. Останні 15 років багато публікацій присвячували обговоренню й міркуванням щодо навичок XXI століття. Так, розвідка ОЕСР «Математика в PISA-2021: широкий погляд» [[https://one.oecd.org/document/EDU/PISA/GB\(2017\)17/en/pdf](https://one.oecd.org/document/EDU/PISA/GB(2017)17/en/pdf)] пропонує ознайомитися з висновками ключових наукових робіт у цій галузі та з узагальненим формулюванням концепції навичок XXI століття. Ретельно проаналізувавши відповідну літературу, автори публікації рекомендують розглянути можливість потужного впровадження навичок XXI століття в деякі дисципліни. Наприклад, дуже важливим є навчати учнів / студентів робити обмірковані аргументації й бути впевненими у своїй правоті. Їхні аргументи мають бути математично точними, мати чіткі теоретичні обґрунтування й бути достатньо сильними, щоб витримати критику, однак, коли це можливо, не містити покликань на авторитети, наприклад «так написано в інтернеті». Ця складова загальної компетентності людини дає їй змогу робити незалежні судження й відповідати за них (OECD, 2005^[31]). У суспільному контексті тільки мати рацію — недостатньо, тому що людина має бути здатною та готовою представляти докази й захищати їх. Процес навчання математики забезпечує ідеальні можливості для практики й розвитку вміння використовувати такі докази, оскільки саме математична галузь надає чіткі контексти, на належному рівні акцентує на логічних міркуваннях і точності.

124. Так само важливо забезпечувати сучасних учнів / студентів інструментарієм, що базується на математичних міркуваннях, який вони можуть використовувати для власного захисту від неправдивої інформації. Нерідко застосування нескладних логічних міркувань буде достатнім для такого захисту. Неправдива інформація зазвичай міститься за певною прихованою суперечністю. Найпростіший спосіб розвивати пильність молодих людей щодо можливих суперечностей — це якісне навчання математики в закладі освіти.

125. З метою логічного поєднання загальних навичок XXI століття і пов'язаних із ними предметних компетентностей, які є невід'ємною частиною навчання цього предмета, до рамкового документа для PISA-2022 включено перелік цих важливих **навичок XXI століття**:

- критичне мислення;
- креативність;
- дослідництво й допитливість;
- самодостатність, ініціативність, наполегливість;
- використання інформації;
- системне мислення;
- комунікативність;
- рефлексія.



ОЦІНЮВАННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ
ГРАМОТНОСТІ

РОЗДІЛ

126. У цьому розділі визначено підхід до застосування описаних вище елементів рамкового документа з математики для PISA-2022 з погляду:

- структури математичного компонента дослідження PISA;
- бажаного розподілу балів за виконання завдань з математики за видами математичної діяльності під час розв'язування задач;
- розподілу балів за виконання завдань за змістовими категоріями;
- діапазону складності завдань;
- структури дослідження;
- ролі комп'ютерного тестування з математики;
- розроблення тестових завдань;
- звітування про рівні оволодіння математичною грамотністю.

СТРУКТУРА ОЦІНЮВАННЯ З МАТЕМАТИКИ В ДОСЛІДЖЕННІ PISA-2022

127. Згідно з визначенням математичної грамотності всі тестові завдання дослідження PISA стосуються певного контексту. Завдання передбачають застосування важливих математичних понять, знань, міркувань і вмій (володіння математичним змістом) на відповідному для 15-річних підлітків рівні відповідно до опису, наведеного вище. Надзвичайно важливо, щоб інструменти дослідження містили належним чином урівноважену кількість завдань, які охоплюють усі елементи рамкового документа, розробленого для оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів / студентів. Отже, рамковий документ визначає структуру та зміст тестування.

БАЖАНИЙ РОЗПОДІЛ БАЛІВ ЗА ВИДАМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

128. При оцінюванні тестових завдань дослідження PISA-2022 можна виділити математичні міркування та математичні процеси, пов'язані з розв'язуванням задач. Під час розроблення тесту зусилля має бути спрямовано на досягнення рівноваги між двома процесами, які включають встановлення зв'язків між реальним світом і світом математики, та процесами математичного мислення і застосування, які залучають учнів / студентів до роботи з математично сформульованою проблемою (задачею). Незважаючи на те, що математичне мислення супроводжує кожен з процесів формулювання, інтерпретації й застосування, кожне тестове завдання має бути спрямоване на оцінювання тільки одного з-поміж цих з математичних процесів.

129. Варто зауважити, що завдання, які відповідають кожній з категорій, мають бути різної складності та передбачати застосування різних математичних знань і вмій (див. Таблицю 3).

Таблиця 1

Приблизний розподіл балів за видами математичної діяльності (для PISA-2022)

Види математичної діяльності		Відсоток балів у тесті PISA-2022
Математичні міркування		Близько 25
Математичні процеси (цикл розв'язування математичної задачі)	Математичне формулювання ситуацій	Близько 25
	Застосування математичних понять, фактів, процедур і міркувань	Близько 25
	Інтерпретація, використання й оцінювання математичних розв'язків	Близько 25
Усього		100

БАЖАНИЙ РОЗПОДІЛ БАЛІВ ЗА ЗМІСТОВИМИ КАТЕГОРІЯМИ

130. Добір математичних завдань для дослідження PISA проводять так, щоб вони віддзеркалювали знання математичного змісту, які було описано вище. Трендові завдання для математичного тестування PISA-2022 охоплюють усі чотири змістові категорії (див. *табл. 2*). Під час розроблення тесту його укладачі прагнуть досягти такої рівноваги між балами за завдання, яка забезпечить приблизно однакові пропорції між змістовими категоріями, оскільки всі вони мають важливе значення в житті творчих, активних і мислячих громадян.

Таблиця 2

Приблизний розподіл балів за змістовими категоріями (для PISA-2022)

Змістова категорія	Відсоток балів у тесті PISA-2022
Зміни й залежності	Близько 25
Простір і форма	Близько 25
Кількість	Близько 25
Невизначеність і дані	Близько 25
Усього	100

131. Варто зауважити, що завдання за кожною зі змістових категорій мають бути різної складності та передбачати застосування різних математичних знань і умінь.

ДІАПАЗОН СКЛАДНОСТІ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

132. Математичне тестування в межах дослідження PISA-2022 включає завдання широкого діапазону складності, який віддзеркалює діапазон можливостей 15-річних підлітків. Тест включає і складні завдання, із якими можуть впоратися лише найздібніші учні / студенти, і прості, що підходять для менш підготовлених учнів / студентів, які беруть участь у математичному оцінюванні. Із психометричної позиції, дослідження, призначене для оцінювання певної сукупності осіб, є найбільш виваженим та ефективним тоді, коли складність тестових завдань відповідає рівню підготовленості суб'єктів оцінювання. Ба більше, шкала з описом рівнів математичної грамотності, якій приділено головну увагу під час звітування про результати PISA, може містити корисні відомості про всіх учнів / студентів лише в тому випадку, коли завдання, за допомогою яких складено опис усіх рівнів математичної грамотності, охоплюють увесь описаний діапазон умінь.

133. У таблиці 3 зазначено види діяльності учнів / студентів (математичні міркування й математичні процеси) під час розв'язування задачі. У цьому переліку описано дії, яких потребує виконання тестових завдань PISA. У кожній категорії деякі дії позначено двома зірочками «**», що означає, що володіння відповідною діяльністю очікують від учнів, які продемонструють результат на рівнях 1a, 1b, 1c а також рівні 2 за шкалою математичної грамотності PISA. Укладачі тестів мають забезпечити достатню кількість завдань для диференціації нижчих рівнів математичної грамотності, що надасть можливість учням з низькими результатами PISA краще показати свої здібності.

134. Для отримання корисної інформації щодо нововведених нижчих рівнів математичної грамотності 1b і 1c надзвичайно важливо, щоб контексти й мова тестових завдань не заважали безпосередньому оцінюванню математики. Тому їх необхідно ретельно добирати, одночасно забезпечуючи тестове завдання певною цікавинкою, яка не дасть учням / студентам його пропустити.

135. Контексти тестових завдань для рівнів 1b та 1c не повинні виходити за межі повсякденних для учнів / студентів ситуацій. Це, наприклад, ситуації, пов'язані з грошима, температурою, їжею, часом, датами, масою, розмірами й відстанню. Усі завдання мають бути конкретними, а не абстрактними. У центрі їх уваги повинна бути тільки математика. Розуміння контексту не має заважати виконанню завдання.

136. Усі тестові завдання необхідно формулювати за допомогою найпростішої термінології. Речення мають бути короткими й чіткими. Потрібно уникати складних та умовних речень, а також складних іменників. Лексику в завданнях слід ретельно перевіряти, щоб переконатися в можливості учнів / студентів зрозуміти те, що від них вимагають. Ще один важливий аспект підготовки тестових завдань — це перевірка відсутності в них додаткової складності через надмірну текстову завантаженість або незнайомий учням / студентам контекст, який не відповідає їхньому життєвому й культурному досвіду.

137. Тестові завдання, які розробляють для рівня 1c, повинні ґрунтуватися лише на простих (однокрокових) операціях. Однак варто зауважити, що такі прості операції не обов'язково мають бути представлені арифметичними діями. Завдання може полягати в тому, щоб учні / студенти зробили вибір вибір або визначили певну інформацію. Тестові завдання для оцінювання математичної грамотності учнів / студентів на рівнях 1b і 1c мають передбачати всі види математичної діяльності: математичні міркування й математичні процеси, пов'язані з розв'язуванням задачі.

Таблиця 3

Очікувана математична діяльність учнів / студентів під час розв'язування задач
(математичні міркування й математичні процеси)

** Робити прості висновки
** Вибирати відповідне обґрунтування
** Пояснювати, чому математичний результат або висновок має сенс чи не має сенсу в контексті конкретної задачі
Представляти задачу в іншій формі: організовувати її відповідно до математичних понять і робити відповідні припущення
Використовувати означення, правила й формальні системи, а також застосовувати алгоритми й обчислювальне мислення
Пояснювати й доводити обґрунтованість визначеного або розробленого представлення реальної ситуації
Пояснювати або доводити обґрунтованість процесів і процедур чи моделей, які було використано для знаходження математичного результату або розв'язку
Визначати межі моделі, використаної для розв'язання задачі
Розуміти означення, правила або формальні системи, а також застосовувати алгоритми й обчислювальне мислення
Надавати обґрунтування визначеного або розробленого представлення реальної ситуації
Надавати обґрунтування процесів і процедур, які були використані для знаходження математичного результату або розв'язку
Осмишлювати математичні докази в процесі пояснення й обґрунтування математичного результату
Критично оцінювати межі моделі, використаної під час розв'язування задачі
Інтерпретувати математичний результат в контексті реального світу з метою пояснення значення результатів
Пояснювати зв'язки між мовою конкретного контексту задачі й мовою символів та формальною мовою, які потрібні для математичного представлення задачі
Осмишлювати математичні докази в процесі пояснення й обґрунтування математичного результату
Осмишлювати математичні розв'язки й наводити пояснення та докази для їх підтримки або спростування математичного розв'язку контекстуалізованої задачі
Аналізувати подібності й відмінності між обчислювальною моделлю й математичною задачею, яку вона моделює
Пояснювати, як працює простий алгоритм; визначати й виправляти помилки в алгоритмах і програмах

Продовження таблиці 3

Формулювання	Застосування	Інтерпретація
** Вибирати математичний опис або представлення, яке описує задачу	** Виконувати прості розрахунки	** Інтерпретувати математичний результат у контексті початкової проблеми реального світу
** Визначати ключові змінні в моделі	** Вибирати з переліку відповідну стратегію	** Визначати, чи має математичний результат або висновок сенс в контексті конкретної задачі
** Вибирати з переліку форму представлення, яка відповідає контексту задачі	** Застосовувати певну стратегію для визначення математичного розв'язку	** Визначати межі моделі, використаної для розв'язання задачі
Читати й розуміти висловлювання, питання, завдання, об'єкти або зображення, надавати їм сенсу з метою моделювання ситуації	** Будувати математичні діаграми, графіки, конструкції або комп'ютерні об'єкти	Використовувати математичні інструменти або комп'ютерні моделі для встановлення обґрунтованості математичного розв'язку та його обмежень з огляду на контекст задачі
Розпізнавати математичну структуру, зокрема закономірності, залежності та шаблони в проблемах і ситуаціях	Розуміти й використовувати конструкції на основі визначень, правил і формальних систем, а також застосовувати відомі алгоритми	Інтерпретувати математичні результати в різних форматах відповідно до ситуації або способу їх використання; порівнювати або оцінювати дві (або більше) форми представлення, що відповідають ситуації

Продовження таблиці 3

Формулювання	Застосування	Інтерпретація
Розпізнавати й описувати математичні аспекти реальної проблемної ситуації, у тому числі визначати значущі змінні	Будувати математичні діаграми, графіки, конструкції або комп'ютерні об'єкти й отримувати з них математичну інформацію	Використовувати знання про вплив реального світу на результати й розрахунки, отримані внаслідок виконання математичної процедури або моделювання, з метою скласти контекстні судження щодо коригування результатів та їх застосування
Спростувати або розкласти ситуацію або проблему з метою зробити її придатною для математичного аналізу	Оперувати числами, графічними й статистичними даними та інформацією, алгебраїчними виразами й рівняннями та геометричними представленнями	Вибудовувати й надавати пояснення та докази в контексті задачі
Розпізнавати аспекти проблеми, які відповідають відомим задачам або математичним поняттям, фактам і процедурам	Описувати розв'язання, демонструючи та/або узагальнюючи проміжні математичні результати	Визначати (демонструвати, інтерпретувати, пояснювати) обсяг і межі математичних понять і математичних розв'язків
Переводити проблему в стандартну математичну форму або алгоритм	Використовувати математичні інструменти, включаючи технології, моделювання й обчислювальне мислення, які допомагають знайти точні або наближені розв'язки	Розуміти зв'язок між контекстом проблеми й представленням математичного розв'язання; використовувати це розуміння для полегшення інтерпретації розв'язання в контексті та оцінювання здійсненності й можливих обмежень цього розв'язання

Продовження таблиці 3

Формулювання	Застосування	Інтерпретація
Застосовувати математичні інструменти (використовуючи потрібні змінні, символи, діаграми) для опису математичних структур та/або зв'язків у задачі	Осмилювати різні форми представлення інформації, інтегрувати й використовувати їх під час розв'язування задачі	
Застосовувати математичні засоби й комп'ютерні інструменти для зображення математичних залежностей	Перемикатися між різними формами представлення в процесі пошуку розв'язків	
Визначати обмеження, спрощення й припущення в математичній моделі	Використовувати багатокрокові процедури для знаходження математичного розв'язку, результату або узагальнення	
	Використовувати розуміння контексту задачі для управління процесом її математичного розв'язування або його прискорення, наприклад робота на тому рівні точності, який відповідає контексту	
	Робити узагальнення на основі результатів застосування математичних процедур для розв'язування задачі	

КОМП'ЮТЕРНЕ ТЕСТУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ

138. Комп'ютерне тестування буде основною формою оцінювання з математики в PISA-2022. Переходу на нього передували спеціальні дослідження режимів тестування, за допомогою яких під час циклів 2015 і 2018 років вивчали його особливості. З метою збереження трендів для забезпечення порівнюваності з попередніми циклами дослідження, оцінювання PISA-2015 і PISA-2018 були нейтральними щодо комп'ютерного формату, незважаючи на використання комп'ютерного тестування. Перехід до повноцінного комп'ютерного тестування з 2022 року надає організаторам PISA низку можливостей для актуалізації оцінювання математичної грамотності відповідно до природного розвитку математики в сучасному світі, одночасно гарантуючи збереження трендів для забезпечення порівнюваності з попередніми циклами дослідження. Такі можливості дають змогу розробляти нові форми завдань (наприклад, перетягування варіанта відповіді); надавати учням / студентам реальні дані (як-от, великий за обсягом набір даних для сортування); створювати математичні моделі або симуляції, які учні / студенти можуть досліджувати, змінюючи значення змінних; виконувати апроксимацію кривих і використовувати «найкращу» криву для прогнозування. На додаток до розширення спектру типів завдань і математичних можливостей комп'ютерне тестування з математики забезпечує умови для проведення адаптивного оцінювання.

139. Упровадження адаптивного оцінювання в комп'ютерному тестуванні з математики, яке раніше було впроваджено в оцінюванні читацької грамотності в дослідженні PISA, дає можливість краще описати, на що саме здатні учні / студенти, оцінки яких розташовано на обох кінцях шкали результатів PISA. Шляхом забезпечення учнів / студентів індивідуальними добірками тестових завдань, зважаючи на успішність виконання раніше запропонованих тестових завдань, дослідження PISA збирає докладнішу інформацію про діяльність учнів / студентів, оцінки яких розташовано на обох кінцях шкали результатів.

140. Покращення, що стали можливими завдяки комп'ютерним технологіям, зумовили створення тестових завдань цікавіших, різноманітніших та легших для розуміння. Наприклад, учням / студентам може бути запропоновано динамічні стимули, зображення тривимірних об'єктів, які можна обертати, або гнучкий доступ до відповідної інформації. Нові формати завдань, наприклад ті, де учням / студентам треба «перетягти» інформацію або використати опцію «перемикач» на екрані монітора (вибір одного елемента з представленої групи), дають можливість залучити учнів / студентів до більшої активності, запропонувати їм ширший спектр типів відповідей і надати повнішу картину математичної грамотності. Головною складністю в реалізації цих задумів є забезпечення того, щоб відповідні тестові завдання оцінювали саме математичну грамотність і щоб залучення непритаманних математичній галузі елементів було мінімальним.

141. Дослідження показують, що в робочих процесах потреба у використанні математики все частіше виникає за наявності електронних технологій, тому математична грамотність і використання комп'ютера вже стали єдиним цілим (Hoyles et al., 2002_[32]). Для працівників усіх рівнів сьогодні характерною є взаємозалежність між математичною грамотністю та використанням комп'ютерних технологій. Ключова проблема полягає в тому, щоб відрізнити математичні вимоги комп'ютерних завдань PISA від вимог, не пов'язаних з математичною компетентністю, наприклад вимог до тестових завдань з погляду інформаційно-комунікаційних технологій і формату їх представлення.

Виконання тестових завдань PISA в комп'ютерному форматі замість впаперового переносить тест PISA в реальність XXI століття та відповідає його вимогам.

142. Для комп'ютерного тестування й оцінювання безперервно еволюціонувальної природи математичної грамотності добре підходять тестові завдання, що включають:

- симуляції (комп'ютерні інтерактивні моделі), у яких реалізовано математичну модель ситуації і де учні / студенти можуть змінювати значення змінних і досліджувати їх вплив для знаходження «оптимального розв'язку»;
- апроксимації кривими (вибір кривої з обмеженого набору кривих) заданого набору даних або геометричного образу, щоб визначити та використати результувальну «найкращу» криву для визначення відповіді на запитання щодо ситуації;
- ситуації бюджетування (наприклад, при плануванні покупок в інтернет-магазині) — ситуації, у яких учні / студенти мають вибрати комбінації товарів для досягнення низки цілей у межах певного бюджету;
- моделювання покупок у кредит, у яких передбачено вибір варіанта позики й відповідної схеми погашення кредиту; виклик такого типу завдань полягає в розумінні взаємодії між змінними;
- візуальне програмування для досягнення заданої послідовності дій.

143. Незважаючи на те, що комп'ютерне тестування надає дослідженню описані можливості, надзвичайно важливо зберігати сфокусованість комп'ютерного тестування математики на оцінюванні математичної грамотності, а не зміщувати увагу на оцінювання вмій, які стосуються інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Також дуже важливо, щоб тестові завдання, які використовують симуляції та інші можливості комп'ютерного тестування, не були надто «кричущими» й не спричиняли втрати необхідності математично мислити й задіювати математичні процеси розв'язування задачі.

144. Крім того, комп'ютерне тестування має зберігати деякі функції паперового тестування, наприклад можливість переглядати тестові завдання, на які учень / студент уже намагався відповісти раніше, хоча в контексті адаптивного тестування ця потреба повинна обмежуватися групою завдань, над якою учень / студент у цей час працює.

РОЗРОБЛЕННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ PISA-2022

145. Для тестування математичної грамотності в межах програми оцінювання PISA використовують три формати завдань: з розгорнутою або короткою відповіддю, а також множинного вибору із запропонованих варіантів.

• Завдання з відкритими відповідями потребують від учнів / студентів надання в довільній формі певної розгорнутої відповіді в письмовому вигляді. Учням / студентам також можуть запропонувати показати хід своєї роботи або пояснити, яким чином було знайдено відповідь. Для перевірки таких завдань потрібні кваліфіковані експерти, які вручну перевірятимуть (кодуватимуть) відповіді учнів / студентів. Для впровадження адаптивного оцінювання в комп'ютерному тестуванні з математики необхідно мінімізувати кількість тестових завдань, відповіді на які потребують ручного кодування кваліфікованими експертами.

- Завдання з короткими відповідями забезпечують більш стандартизовані варіанти представлення розв'язання задач. Відповіді на такі завдання легко оцінювати як правильні або неправильні, до того ж їх у може бути внесено до спеціального програмного забезпечення й закодовано автоматично. Найчастіше відповідями на такі завдання є певні числа.

- У завданнях множинного вибору учні / студенти мають одну або більше відповідей із запропонованих варіантів. Зазвичай такі відповіді обробляють автоматично. Для створення інструментів оцінювання використовують приблизно однакову кількість завдань кожного формату.

146. Математичний тест PISA складається з груп завдань, що містять словесний матеріал-стимул і, зазвичай, іншу інформацію, наприклад таблиці, графіки, діаграми тощо, та одне або більше завдань, пов'язаних із цим загальним матеріалом-стимулом. Такий формат надає учням / студентам можливість краще зрозуміти контекст або проблему, виконуючи низку пов'язаних завдань.

147. Широкий діапазон умінь учнів / студентів, які беруть участь у дослідженні PISA, покривають різні рівні складності завдань, вибраних для тестування. Крім того, усі найважливіші категорії оцінювання (змістові категорії, математичні міркування та математичні процеси циклу розв'язання задачі, контекстні категорії, навички XXI століття) максимально представлені завданнями широкого діапазону складності. Складність завдань розглядається як один зі значущих параметрів вимірювання для пілотного етапу оцінювання, який попередньо проводять з метою добору завдань для основного етапу дослідження PISA. Завдання для інструментів тестування PISA відбирають з урахуванням їх відповідності категоріям рамкового документа та їхніх вимірювальних властивостей.

148. До того ж під час розроблення й добору тестових завдань значну увагу приділяють такому аспекту, як рівень оволодіння читанням, необхідний для успішної роботи над ними. Під час підготовки завдань слід ураховувати важливо формулювати їх максимально зрозуміло. Також ураховують і необхідність уникати таких контекстів завдань, які б могли викликати культурні упередження, для чого всі вибрані варіанти перевіряють національні команди проекту PISA. Фахівці ретельно перекладають тестові завдання різними мовами, а також виконують їх зворотний переклад і забезпечують дотримання багатьох інших протоколів.

149. Для циклу PISA-2022 буде впроваджено інструмент, який дасть учасникам змогу вводити відповіді та показувати хід своєї роботи, що вкрай потрібно для оцінювання математичної грамотності. Так, учасники тестування можуть вводити і текст, і математичні символи. Натискаючи відповідну кнопку, учні / студенти можуть увести дріб, квадратний корінь або показник степеня. Також доступні додаткові символи, наприклад π та «більше» і «менше», знаки математичних операцій «множення» й «ділення» (див. схему 3).

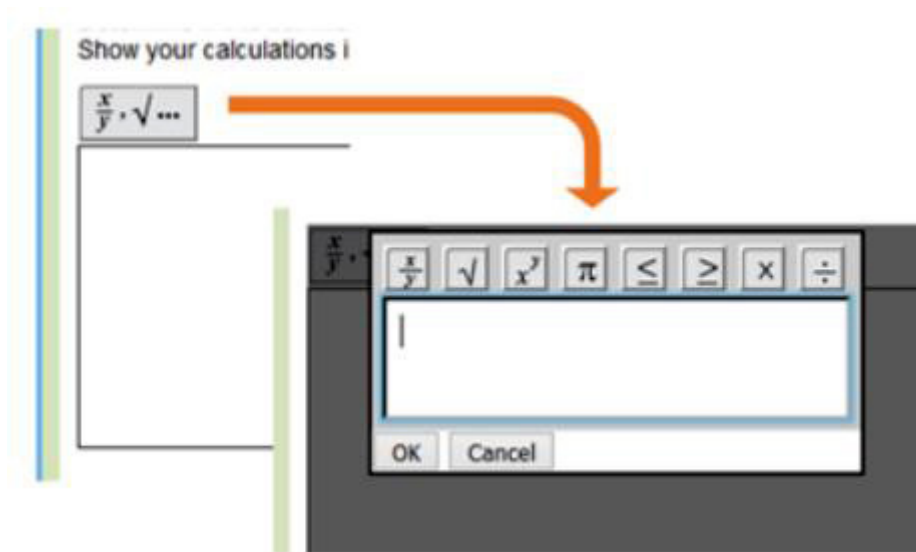


Схема 3. Зразок інструмента для редагування (PISA-2022)

150. Наразі набір онлайн-інструментів, доступних учням / студентам, містить базовий науковий калькулятор. Він дає змогу виконувати операції додавання, віднімання, множення й ділення, обчислювати степені, квадратні корені та обернені величини ($1/x$), використовувати число π та дужки. Калькулятор запрограмований, щоб відповідати загальноприйнятому порядку виконання математичних операцій.

151. Учасники паперового тестування можуть використовувати кишеньковий калькулятор, який схвалено для застосування 15-річними учнями / студентами у відповідних системах закладів освіти.

ОЦІНЮВАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

152. Хоча більшість завдань оцінюють дихотомічно, тобто відповідь або зараховують, або не зараховують, відкриті завдання іноді потребують оцінювання частковим балом, що надає можливості оцінювати відповіді різного ступеня «правильності» й одночасно враховувати різні ступені активності учнів / студентів у процесі розв'язування задачі. Оцінювання частковим балом має особливе значення для перевірки завдань, спрямованих на математичне мислення. Саме такі завдання рідко потребують відповіді у вигляді одного числа, частіше вона містить один або більше елементів.

ЗВІТНІСТЬ ПРО РІВНІ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ

153. Звітування про результати тестування з математики в межах дослідження PISA реалізують у різні способи. Після отримання результатів обчислюють середні показники загальної математичної грамотності досліджуваної вибірки для кожної з країн-учасниць, визначають кількість рівнів математичної грамотності учнів / студентів та для кожного визначеного рівня створюють типові описи відповідно до отриманих результатів. Для PISA-2022 визначені в попередніх циклах дослідження шість загальних рівнів математичної грамотності буде доповнено: назву «рівень 1» перейменують на «рівень 1a», а таблицю

з рівнями математичної грамотності буде доповнено рівнями 1b і 1c та їх описами. Ці додаткові рівні забезпечать вищу точність звітування про математичну грамотність учнів / студентів з низькими результатами в математичному тестуванні PISA.

154. Окрім загальної математичної шкали, після пілотного етапу дослідження будуть додатково розроблені й оприлюднені окремі описові шкали рівнів математичної грамотності, які стосуються видів математичної діяльності (математичних міркувань і математичних процесів, що пов'язані з розв'язуванням математичних задач: формулювання ситуацій математично; застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування; інтерпретації, використання й оцінювання математичних результатів).

ЗАПИТАННЯ СТОСОВНО МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ В АНКЕТАХ PISA-2022

155. Починаючи з першого циклу дослідження PISA, анкети учнів / студентів і вчителів виконують дві взаємопов'язані функції, зорієнтовані на оцінювання систем освіти різних країн. По-перше, анкети забезпечують контекст для інтерпретації результатів учнів / студентів у тестуваннях PISA як у межах окремих систем освіти, так і між ними. По-друге, анкетування спрямоване на надійне й валідне вимірювання окремих індикаторів освіти, які самостійно можуть надати суттєву інформацію для освітньої політики й освітніх досліджень.

156. Оскільки математика є провідною галуззю дослідження в циклі PISA-2022, анкетування збиратиме не тільки трендові дані. За допомогою анкет буде зібрано багато інформації щодо інновацій, про які йдеться в рамковому документі з математики для PISA-2022. Зокрема планується приділити значну увагу дослідженню математичної грамотності з погляду аналізу математичних контекстних складників, а також з погляду деяких категорій освітньої політики, зосереджених, наприклад, навколо індивідуальних даних учасників тестування щодо їхніх демографічних, соціальних або емоційних характеристик чи навколо даних закладів освіти щодо їх педагогічних практик, політики й інфраструктури (OECD, 2018_[33]).

157. У процесі підготовки до математичного оцінювання 2012 року особливий інтерес виник стосовно двох широких категорій ставлення учнів / студентів до математики, які сприяють їхній продуктивності й активності під час виконання математичних завдань. Ці категорії включають інтерес учнів / студентів до математики та їхнє бажання активно вивчати й застосовувати її. В анкетуванні 2022 року вивчення цих аспектів планується продовжувати.

158. Інтерес людини до математики включає елементи, пов'язані з її теперішньою та майбутньою діяльністю. Відповідні запитання в анкеті зосереджені на інтересі учнів / студентів до математики в закладі освіти, на тому, чи вважають учні / студенти її корисною в реальному житті, чи мають вони намір і далі навчатися математики й обрати математичну професію. Цей аспект має надзвичайну міжнародну актуальність, оскільки в багатьох країнах-учасницях спостерігається одночасне скорочення частки випускників, які планують далі навчатися математики, і зростання потреби в тих, хто продовжуватиме вивчати цю дисципліну.

159. Бажання учнів / студентів займатися математикою пов'язане з їхнім ставленням, емоціями й упевненістю у своїй компетентності, що або допомагає, або заважає їм використовувати набуту математичну грамотність. Учні / студенти, які зазвичай отримують задоволення від математичної діяльності й відчують упевненість у власних здібностях, частіше розглядають ситуації, з якими вони стикаються в житті як у закладі освіти, так і поза ним, з математичної позиції. Складники анкетування PISA, пов'язані із цим аспектом, включають відчуття задоволеності, упевненості й тривоги (або її відсутності) через математику, а також упевненість у своїх здібностях (самооцінка й самоефективність). Так, серед австралійців, які в 15-річному віці отримали низькі результати PISA, провели дослідження їхнього подальшого прогресу в житті. За результатами цього дослідження виявилось, що ті учасники, хто в 15 років визнавав цінність математики для свого успіху в подальшому житті переважно дійсно стали успішними, про що свідчить їхня задоволеність багатьма аспектами особистого життя, досягненнями й професією (Hillman and Thomson, 2010, p. 31^[34]). Згідно із цим дослідженням зосередженість на практичному застосуванні математики в повсякденному житті може позитивно впливати на життєві погляди учнів / студентів із низькими результатами навчання.

160. Відповідно до очевидних інновацій у рамковому документі з математики для PISA-2022 виділяють як мінімум чотири аспекти, щодо яких можна зібрати багато даних за допомогою анкетування. Ці аспекти включають **математичні міркування, обчислювальне мислення і роль сучасних технологій у математичній діяльності й у навчанні математики, чотири ключові змістові розділи математики та навички XXI століття в контексті математики.**

Математичні міркування

161. Рамковий документ з математики для PISA-2022 на перший план висуває математичні міркування, які ґрунтуються на деяких ключових уявленнях, що лежать в основі шкільної математики (розуміння кількості, числових систем та їх алгебраїчних властивостей; відчуття сили абстрагування та символічного представлення; бачення математичних структур та їх закономірностей; визначення функціональних залежностей між величинами; використання математичного моделювання як інструмента для дослідження реального світу та розуміння варіації як основи статистики).

162. Зосередженість на міркуванні має вплинути на зміст анкет, щоб зібрати дані, необхідні для розуміння можливостей учнів навчатися математично мислити та використовувати ключові розуміння, що лежать в основі шкільної математики. Зокрема анкети мають допомогти встановити частотність, з якою учні / студенти, наприклад:

- визначають, розпізнають, організують, поєднують та представляють;
- конструюють, абстрагують, оцінюють, виводять, обґрунтовують, пояснюють і відстоюють;
- інтерпретують, роблять висновки, піддають критиці, спростовують та кваліфікують.

163. Окрім дослідження того, як часто надається можливість навчатися міркувати, запитання. Анкети повинні з'ясувати, які форми при цьому використовують (усні чи письмові).

164. Нарешті, що стосується міркувань, анкети повинні надавати можливість з'ясувати готовність учнів / студентів наполегливо працювати над завданнями, що потребують певного рівня міркувань.

165. Що стосується вчителів і навчання математики, то необхідно краще зрозуміти, як вони бачать роль міркування в математиці взагалі та в їхній практиці викладання й оцінювання зокрема.

Обчислювальне мислення

166. Обчислювальне мислення швидко еволюціонує та розширює межі як математики, так і математичної грамотності. Рамковий документ з математики для PISA-2022 ілюструє, як обчислювальне мислення водночас є необхідним для математичної діяльності і впливає на неї. Частина анкети PISA, що стосується цінностей і поглядів на навчання та широке мислення, надає можливість дослідити досвід учнів / студентів щодо ролі обчислювального мислення в їхній математичній діяльності.

167. Рамковий документ з математики для PISA-2022 звертає увагу на різні способи, за допомогою яких технологія змінює світ, у якому ми живемо, і змінює погляди на те, що означає «займатися математикою». Ключові запитання анкет спрямовано на глибоке розуміння двох тенденцій: по-перше, як змінюються математичний досвід і математична діяльність учнів / студентів (якщо такі зміни відбуваються); а по-друге, як еволюціонує навчальний процес в умовах впливу комп'ютерних технологій на взаємодію людини з математикою й математичними об'єктами, а також на те, що означає математична діяльність. У випадку з опитуванням учнів / студентів важливо зібрати інформацію про вплив нових технологій на результати їхнього навчання (дослідження цього питання буде забезпечено в частині анкети про виконання завдань). Своєю чергою питання навчання буде досліджено через частини анкети, які стосуються навчального часу й навчальної програми та навчальних практик.

168. Зосередженість на обчислювальному мисленні та ролі технологій як у математичній діяльності, так і в навчанні математики має вплинути на зміст анкет, щоб зібрати дані, необхідні для кращого розуміння можливостей учнів / студентів навчатися у зв'язку із цим. Зокрема в анкетах потрібно встановити частотність, з якою учні / студенти долучаються, наприклад, до:

- проектування комп'ютерних симуляцій і комп'ютерних моделей або до роботи з ними;
- програмування на уроках математики та поза ними;
- використання комп'ютерних математичних систем (включаючи програми динамічної геометрії, електронні таблиці, програмні середовища (наприклад, Logo і Scratch), графічні калькулятори, ігри тощо).

Чотири фокусні змістові розділи математики

169. З огляду на визнання мінливого характеру світу, у якому ми живемо, у рамковому документі з математики для PISA-2022 запропоновано приділяти особливу увагу чотирьом математичним темам у межах тих змістових категорій, які й раніше використовували в оцінюванні математики. Такими математичними темами є: явища

зростання (категорія «зміни й залежності»), геометричні апроксимації (категорія «простір і форма»); комп'ютерне моделювання (категорія «кількість») та умовне прийняття рішень (категорія «невизначеність і дані»). Зосередженість на цих змістових розділах має вплинути на зміст анкет, щоб зібрати дані, необхідні для кращого розуміння можливостей учнів вчитися в цьому аспекті. Зокрема завдяки анкетам необхідно встановити частотність, з якою учні / студенти стикаються із цим змістом та різними формами його представлення.

Навички XXI століття в контексті математики

170. Уперше в рамковому документі з математики представлено певний перелік навичок XXI століття, які одночасно є і результатом сучасних тенденцій в математиці, і центральним об'єктом математичної галузі. Анкетування дасть змогу зібрати докладну інформацію щодо двох пов'язаних питань: по-перше, чи сприяє математика підвищенню рівня цих навичок в учнів / студентів і, по-друге, чи акцентують на них увагу навчальні практики в різних країнах. Наявність таких навичок у поточних навчальних програмах, затверджених у різних системах освіти, досліджує анкета PISA в частині про навчальний час і навчальні програми.

171. Результати анкетування PISA-2022 забезпечать політиків, освітян, дослідників і всі інші зацікавлені сторони в країнах, які братимуть участь у наступному циклі дослідження, важливою інформацією про результати їхніх систем освіти як з погляду навчальних досягнень, так і з погляду ставлення до навчання. Отримати повнішу картину вдасться завдяки поєднанню результатів математичного тестування й зібраних за допомогою анкетування даних щодо ставлення, емоцій і переконань учнів / студентів — чинників, які зумовлюють застосування ними математичної грамотності, а також щодо впливу на навчання математики чотирьох описаних новацій дослідження PISA-2022.

ВИСНОВКИ

172. У рамковому документі з математики для PISA-2022 зберігається узгодженість із попередніми рамковими документами щодо оцінювання математичної грамотності 15-річних учнів / студентів. Але водночас у ньому визнається, що світ постійно змінюється, унаслідок чого в ньому безперервно зростає попит на математично грамотних громадян, здатних математично мислити, а не тільки відтворювати вивчені математичні прийоми.

173. Метою програми PISA з оцінювання математичної грамотності є розроблення індикаторів, які показують, наскільки ефективно країни готують своїх учнів / студентів до використання математики в кожному аспекті їхнього особистого, суспільного та професійного життя як творчих, активних і мислячих громадян XXI століття. Для досягнення цієї мети PISA розробила визначення математичної грамотності та засади оцінювання, які відображають його важливі елементи.

174. Тестові завдання з математики, дібрані для PISA-2022 на основі цього визначення та рамкового документа, покликані відобразити баланс між математичними міркуваннями, математичними процесами розв'язування задачі, математичним змістом і життєвими контекстами.

175. Дизайн оцінювання забезпечить достовірне вимірювання результатів математичного тестування з використанням шкали рівнів математичної грамотності, яку доповнено порівняно з попередніми циклами дослідження PISA двома нижчими рівнями, зберігаючи при цьому якість і зміст оцінювання.

176. Комп'ютерне тестування з математики, яке використовуватимуть у 2022 році, забезпечує різноманітність форматів тестових завдань з різним ступенем умонтованого керування та структурованості. Головну увагу приділено задачам реальної математики, які потребують від учнів / студентів певного рівня міркувань і демонстрування мислення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Ananiadou, K. and M. Claro (2009), “21st Century Skills and Competences for New Millennium Learners in OECD Countries”, <i>OECD Education Working Papers</i> , No. 41, OECD Publishing, Paris, http://dx.doi.org/10.1787/218525261154 .	[2]
Basu, S. et al. (2016), “Identifying middle school students’ challenges in computational thinking-based science learning”, <i>Research and Practice in Technology Enhanced Learning</i> , Vol. 11/3, http://dx.doi.org/10.1186/s41039-016-0036-2 .	[20]
Beheshti, E. et al. (2017), <i>Computational Thinking in Practice: How STEM Professionals Use CT in Their Work</i> , Northwestern University, San Antonio, Texas, http://ccl.northwestern.edu/papers.shtml .	[22]
Beloit College (2017), <i>The Beloit College Mindset List for the Class of 2021</i> , https://www.beloit.edu/mindset/2021/ .	[1]
Benton, L. et al. (2017), Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England, <i>Digital Experiences in Mathematic Education</i> , Vol. 3, pp. 115–138, http://dx.doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x .	[21]
Box, G. and N. Draper (1987), <i>Empirical Model-Building and Response Surfaces</i> , John Wiley.	[24]
Brennan, K. and M. Resnick (2012), <i>New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking</i> , https://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf .	[25]
Cuny, J., L. Snyder and J. Wing (2010), <i>Demystifying computational thinking for noncomputer scientists</i> .	[9]
Devlin, K. (1994), <i>Mathematics: The Science of Patterns : The Search for Order in Life, Mind, and the Universe</i> , W H Freeman & Co.	[27]
Fadel, C., M. Bialik and B. Trilling (2015), <i>Four-Dimensional Education: The Competencies Learners Need to Succeed</i> , Create Space Independent Publishing Platform.	[3]
Gadanidis, G. (2015), <i>Coding for Young Mathematicians</i> , Western University, London, Ontario, Canada, http://worlddiscoveries.ca/technology/18155 (accessed on 05 April 2018).	[10]
Gadanidis, G., E. Clements and C. Yiu (2018), Group Theory, Computational Thinking, and Young Mathematicians, <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , Vol. 20/1, pp. 32–53, http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403542 .	[13]
Galbraith, P., H. Henn and M. Niss (eds.) (2007), <i>Modelling and Applications in Mathematics Education</i> , Springer US, http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1 .	[19]
Grover, S. (2018), <i>The 5th‘C’ of 21st Century Skills? Try Computational Thinking (Not Coding) EdSurge News</i> , https://www.edsurge.com/news/2018-02-25-the-5th-c-of-21st-century-skills-try-computational-thinking-not-coding (accessed on 05 April 2018).	[16]
Hillman, K. and S. Thomson (2010), <i>Against the odds: influences on the post-school success of ‘low performers’</i> , NCVER, Adelaide, Australia, https://www.ncver.edu.au/publications/publications/all-publications/against-the-odds-influences-on-the-post-school-success-of-low-performers# (accessed on 05 April 2018).	[34]
Hoyles, C. et al. (2002), “Mathematical skills in the work place: final report to the Science Technology and Mathematics Council”, <i>Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council, London</i> . (2002), http://discovery.ucl.ac.uk/1515581/ (accessed on 05 April 2018).	[32]
Mahajan, S. et al. (2016), <i>PISA Mathematics in 2021</i> , Center for Curriculum Redesign, http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths-2021-FINAL-EXTENDED-VERSION-WITH-EXAMPLES-CCR.pdf .	[28]

Moore, D. (1997), New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics, <i>International Statistical Review</i> , Vol. 65/2, https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.1751-5823.1997.tb00390.x , pp. 123-165.	[29]
National Research Council (2012), <i>Education for Life and Work: Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century</i> , The National Academies Press, Washington D.C., https://www.nap.edu/resource/13398/dbasse_070895.pdf (accessed on 05 April 2018).	[4]
Niemelä, P. et al. (2017), <i>Computational thinking as an emergent learning trajectory of mathematics</i> , ACM Press, New York, New York, USA, http://dx.doi.org/10.1145/3141880.3141885 .	[17]
OECD (2004), <i>The PISA 2003 Assessment Framework</i> , OECD Publishing, http://dx.doi.org/10.1787/9789264101739-en .	[6]
OECD (2005), <i>The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary</i> , OECD, Paris, http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf (accessed on 05 April 2018).	[31]
OECD (2013), <i>PISA 2012 Assessment and Analytical Framework</i> , OECD Publishing, http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en .	[7]
OECD (2017), <i>PISA for Development Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science, Preliminary Version</i> , OECD Publishing, Paris, http://www.oecd.org/about/publishing/corrigenda.htm . (accessed on 06 April 2018).	[8]
OECD (2017), <i>PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving</i> , OECD Publishing, Paris, http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en .	[23]
OECD (2018), <i>PISA 2018 Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science</i> .	[33]
Pei, C., D. Weintrop and U. Wilensky (2018), “Cultivating Computational Thinking Practices and Mathematical Habits of Mind in Lattice Land”, <i>Mathematical Thinking and Learning</i> , Vol. 20/1, pp. 75–89, http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403543 .	[14]
Pratt, D. and R. Noss (2002), “The Microevolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness”, <i>Journal of the Learning Sciences</i> , Vol.11/4, pp. 453–488, http://dx.doi.org/10.1207/S15327809JLS1104_2 .	[12]
Rambally, G. (2017), <i>Applications of Computational Matrix Algebra</i> , AACE, Austin, Texas, https://www.learntechlib.org/p/177277/ .	[11]
Reimers, F. and C. Chung (2016), <i>Teaching and Learning for the Twenty-First Century: Educational Goals, Policies, and Curricula from Six Nations</i> , Harvard Education Press, Cambridge, MA.	[5]
Resnick, M. et al. (2009), “Scratch”, <i>Communications of the ACM</i> , Vol.52/11, p. 60, http://dx.doi.org/10.1145/1592761.1592779 .	[18]
Steen, L. (1990), <i>On the Shoulders of Giants</i> , National Academies Press, Washington, D.C., http://dx.doi.org/10.17226/1532 .	[26]
Watson, J. and R. Callingham (2003), “Statistical literacy: A Complex hierarchical construct”, <i>Statistics Education Research Journal</i> , Vol. 2, pp. 3–46.	[30]
Weintrop, D. and U. Wilensky (2015), <i>To block or not to block, that is the question</i> , ACM Press, New York, New York, USA, http://dx.doi.org/10.1145/2771839.2771860 .	[35]
Weintrop, D. et al. (2016), “Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms”, <i>Journal of Science Education and Technology</i> , Vol.25/1, pp.127–147, http://dx.doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5 .	[15]

Додаток А.
ПРИКЛАДИ
ЗАВДАНЬ

177. Завдання, запропоновані в додатку А, ілюструють найважливіші елементи цього рамкового документа. Задля забезпечення тяглості оцінювання (збереження трендів) більшість завдань в PISA-2022 — це завдання, які використовували в попередніх циклах PISA. Більшу кількість зразків використаних і оприлюднених завдань можна знайти за посиланням: www.oecd.org/pisa/test¹.

178. Завдання, наведені в додатку А, ілюструють такі нові елементи:

- оцінювання математичного міркування, як описано в цьому рамковому документі;
- чотири теми, на яких буде зроблено особливий акцент в оцінюванні PISA-2022, а саме: явища зростання, геометричні апроксимації, комп'ютерне моделювання та умовне прийняття рішень;
- особливості завдань, які стали можливі завдяки комп'ютерному тестуванню (КТ);
- обчислювальне мислення.

179. Сім блоків ілюстративних завдань, наведених у додатку А, включають:

- **ВИКОРИСТАННЯ СМАРТФОНІВ.** Цей блок завдань ілюструє:
 - можливості КТ, зокрема у використанні електронних таблиць з можливістю сортування та деякими іншими.
- **КРАСА СТЕПЕНІВ.** Цей блок завдань ілюструє:
 - низку завдань на математичне міркування – від простого до складних за математичним змістом;
 - покликання на явища зростання, хоча, якщо об'єктивно, контекст цього блоку завдань більше зосереджений на міркуваннях та розпізнаванні образів, ніж на зростанні.
- **ЗАВЖДИ — ІНОДІ — НІКОЛИ.** Цей блок завдань ілюструє:
 - низку завдань на міркування — від простого до більш складних, зокрема низку завдань різних форматів — від Так / Ні та множинного вибору до завдань з відкритою формою відповіді.
- **ЗАМОЩЕННЯ.** Цей блок завдань ілюструє:
 - міркування та обчислювальне мислення;
 - геометричні представлення.
- **РІШЕННЯ ПРО КУПІВЛЮ.** Цей блок завдань ілюструє:
 - застосування умовного прийняття рішень.
- **НАВІГАЦІЯ.** Цей блок завдань ілюструє:
 - Міркування в контексті геометрії;
 - спроможність завдань у КТ.
- **МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ.** Цей блок завдань ілюструє:
 - використання комп'ютерних симуляцій;
 - покликання на явища зростання в контексті та вплив інтересів.

¹ Значну кількість цих завдань українською мовою можна знайти на сайті PISA.UKRAINE за посиланням: pisa.testportal.gov.ua.

ВИКОРИСТАННЯ СМАРТФОНІВ

PISA-2022

Використання смартфонів
Вступ

Прочитайте вступ. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

ВИКОРИСТАННЯ СМАРТФОНІВ

У таблиці наведено дані щодо кількості населення (у мільйонах) і кількості користувачів смартфонів (у мільйонах) для низки країн Азії. Дані відсортовані за назвами країн.

Стовпчик А	Стовпчик В	Стовпчик С	Стовпчик D
Країна	Населення (у мільйонах)	Кількість користувачів смартфонів (у мільйонах)	
Бангладеш	166,735	8,921	
В'єтнам	96,357	29,043	
Індонезія	266,357	67,57	
Малайзія	31,571	12,42	
Пакистан	200,663	23,228	
Таїланд	68,416	30,486	
Туреччина	81,086	44,771	
Філіппіни	105,341	28,627	
Японія	125,738	65,282	

PISA-2022

Використання смартфонів
Завдання 1 / 3

Ознайомтеся з наведеною справа інформацією «Використання смартфонів». Виберіть відповідь на запитання та клікніть на неї.

Яка операція над величинами зі стовпців В і С правильно визначить величину в стовпці D?

Для кожної країни:

Поділити величину в стовпці В на величину в стовпці С:
 V / C

Поділити суму величин у стовпцях В і С на величину в стовпці С:
 $(V + C) / C$

Поділити величину в стовпці С на величину в стовпці В:
 C / V

Поділити величину в стовпці В на суму величин у стовпцях В і С:
 $V / (V + C)$

ВИКОРИСТАННЯ СМАРТФОНІВ

У таблиці наведено дані про кількість населення (у мільйонах) і кількість користувачів смартфонів (у мільйонах) для низки країн Азії. Дані відсортовані за назвами країн.

Стовпець А	Стовпець В	Стовпець С	Стовпець D
Країна	Населення (у мільйонах)	Кількість користувачів смартфонів (у мільйонах)	Частка користувачів смартфонів
Бангладеш	166,735	8,921	
В'єтнам	96,357	29,043	
Індонезія	266,357	67,57	
Малайзія	31,571	12,42	
Пакистан	200,663	23,228	
Таїланд	68,416	30,486	
Туреччина	81,086	44,771	
Філіппіни	105,341	28,627	
Японія	125,738	65,282	

PISA-2022

Використання смартфонів

Питання 2 / 3

Ви можете сортувати дані в таблиці, натиснувши на кнопку сортування в заголовку стовпця. Дані будуть відсортовані за зростанням.

Використовуйте кнопки сортування, які допоможуть Вам оцінити кожне твердження.

Клікніть на **Істинне** або **Хибне** для кожного з наведених нижче тверджень.

Твердження	Істинне	Хибне
Країна з найбільшою кількістю населенням має також найбільшу кількість користувачів смартфонів.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Країна з найменшою кількістю користувачів смартфонів також має найменшу кількість населення.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Країна з найбільшою часткою користувачів смартфонів також має найменшу кількість населення.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Країна з медіанною часткою користувачів смартфонів водночас є країною із медіанною кількістю користувачів смартфонів.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

ВИКОРИСТАННЯ СМАРТФОНІВ

Дані про частку користувачів смартфонів (у відсотках) було додано до таблиці у стовпці D.

Стовпець A	Стовпець B	Стовпець C	Стовпець D
Країна	Населення (у мільйонах)	Кількість користувачів смартфонів (у мільйонах)	Частка користувачів смартфонів
Бангладеш	166,735	8,921	5%
В'єтнам	96,357	29,043	30%
Індонезія	266,357	67,57	25%
Малайзія	31,571	12,42	38%
Пакистан	200,663	23,228	12%
Таїланд	68,416	30,486	45%
Туреччина	81,086	44,771	55%
Філіппіни	105,341	28,627	27%
Японія	125,738	65,282	52%

PISA-2022

Використання смартфонів

Питання 3/3

Використовуючи відповідну закладку, Ви можете робити вибір між змінними **Кількість населення (у мільйонах)** або **Мінімальна погодинна заробітна плата (у зедах)** для відображення на горизонтальній осі їх значень для кожної країни.

Вибираючи відповідну закладку, дослідіть різні діаграми й дайте відповідь на запитання.

Для якої змінної (кількість населення чи мінімальна погодинна заробітна плата) частка користувачів смартфонів у країні зростає при збільшенні значення змінної?

Кількість населення

Мінімальна погодинна заробітна плата (у зедах)

Поясніть свою відповідь.

ВИКОРИСТАННЯ СМАРТФОНІВ

На діаграмі відображено дані про частку користувачів смартфонів у країні залежно від значення змінної **Кількість населення (у мільйонах)** або **Мінімальна погодинна заробітна плата (у зедах)** для кожної країни.

Кількість населення
Погодинна заробітна плата

Країна	Кількість населення (у мільйонах)	Частка користувачів смартфонів (%)
Туреччина	81,086	55%
Японія	125,738	52%
Таїланд	68,416	45%
Малайзія	31,571	38%
В'єтнам	96,357	30%
Філіппіни	105,341	27%
Індонезія	266,357	25%
Пакистан	200,663	12%
Бангладеш	166,735	5%

PISA-2022

⏻

⌨️

?

⏪

⏩

Використання смартфонів

Питання 3/3

Використовуючи відповідну закладку, Ви можете робити вибір між змінними **Кількість населення (у мільйонах)** або **Мінімальна погодинна заробітна плата (у зедах)** для відображення їх значень для кожної країни на горизонтальній осі.

Вибираючи відповідну закладку, дослідіть різні діаграми й дайте відповідь на запитання.

Для якої змінної (кількість населення чи мінімальна погодинна заробітна плата) частка користувачів смартфонів у країні зростає при збільшенні значення змінної?

Кількість населення

Мінімальна погодинна заробітна плата (у зедах)

Поясніть свою відповідь.

ВИКОРИСТАННЯ СМАРТФОНІВ

На графіку показано частку користувачів смартфонів за країнами або відповідно до **Населення (у мільйонах)**, або відповідно до **Мінімальної погодинної заробітної плати (у зедах)** для кожної країни.

Кількість населення

Погодинна заробітна плата

Країна	Мінімальна погодинна заробітна плата (у зедах)	Частка користувачів смартфонів (%)
Бангладеш	0.5	5
Філіппіни	1.5	25
Індонезія	2.0	20
В'єтнам	2.0	25
Малайзія	2.5	35
Пакистан	2.5	10
Таїланд	3.0	45
Японія	7.0	50
Туреччина	7.0	55

КРАСА СТЕПЕНІВ

PISA-2022

Краса степенів

Вступ

Прочитайте вступ. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

КРАСА СТЕПЕНІВ

Якщо Ви виконаєте повторні множення числа на себе, то можете скористатися позначенням степеня для відображення результату Ваших дій.

Наприклад:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 \quad (\text{для добутку чотирьох вісімок}),$$

або

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6 \quad (\text{для добутку шести сімок}).$$

PISA-2022

Краса степенів

Завдання 1 / 3

Ознайомтеся з наведеною справа інформацією «Краса степенів». Клікніть на **Істинне** або **Хибне** для кожного з тверджень.

Твердження	Істинне	Хибне
Число 8^{16} у 8 разів більше за число 8^{15} .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Число 8^{10} у 10 разів більше за число 8.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

КРАСА СТЕПЕНІВ

Якщо Ви виконаєте повторні множення числа на себе, то можете скористатися позначенням степеня для відображення результату Ваших дій.

Наприклад:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 \quad (\text{для добутку чотирьох вісімок}),$$

або

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6 \quad (\text{для добутку шести сімок}).$$

PISA-2022

Краса степенів
Завдання 2 / 3

Ознайомтеся з наведеною справа інформацією «Краса степенів». Виберіть відповідь на запитання та клікніть на неї.

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$$

Чому дорівнює значення виразу, наведеного вище?

-1

1

0

5

КРАСА СТЕПЕНІВ

Якщо Ви виконуєте повторні множення числа на себе, то можете скористатися позначенням степеня для відображення результату Ваших дій.

Наприклад:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 \quad (\text{для добутку чотирьох вісімок}),$$

або

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6 \quad (\text{для добутку шести сімків}).$$

PISA-2022

Краса степенів
Завдання 3 / 3

Ознайомтеся з наведеною справа інформацією «Краса степенів». Виберіть відповідь на запитання та клікніть на неї.

На яку цифру закінчується число 7^{190} ?

1

3

7

9

КРАСА СТЕПЕНІВ

Нижче наведено перших дев'ять степенів числа 7.

Зверніть увагу на те, як швидко вони зростають!

Останні цифри цих чисел підпадають під певне правило чи закономірність. Дослідіть цю закономірність, щоб відповісти на питання.

$7^1 =$	7
$7^2 =$	49
$7^3 =$	343
$7^4 =$	2 401
$7^5 =$	16 807
$7^6 =$	117 649
$7^7 =$	823 543
$7^8 =$	5 764 801
$7^9 =$	40 353 607

НАВІГАЦІЯ

PISA-2022

Навігація

Вступ

Прочитайте вступ. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

НАВІГАЦІЯ

Найкоротша відстань між двома точками – відрізок прямої. Проте зазвичай у населеному пункті пересуватися по прямій неможливо. Подивіться на карту, наведену нижче. Сірі лінії – це дороги, а сині квадрати – будівлі.

У цій групі завдань ви будете досліджувати різні стратегії для планування маршруту пересування з однієї точки в іншу в цьому населеному пункті.

PISA-2022

Навігація

Продовження вступу

Прочитайте продовження вступу й, обираючи різні вкладки, перегляньте різні маршрути. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

НАВІГАЦІЯ

Ганна, Дмитро і Марина мають різні ідеї щодо визначення найкоротшого маршруту з точки А в точку В.

- Ганна завжди рухається вправо або вгору, залишаючись нижче червоного відрізка, що з'єднує точки А і В, але якомога ближче до нього (зелена лінія).
- Дмитро завжди рухається вправо або вгору, намагаючись якомога частіше перетинати червоний відрізок, що з'єднує точки А і В (помаранчева лінія).
- Марина завжди рухається вправо або вгору, залишаючись вище червоного відрізка, що з'єднує точки А і В, але якомога ближче до нього (фіолетова лінія).

Маршрут Ганни Маршрут Дмитра Маршрут Марини

PISA-2022

Навігація
Вступ

Прочитайте продовження вступу й, обираючи різні вкладки, перегляньте різні маршрути. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

НАВІГАЦІЯ

Ганна, Дмитро і Марина мають різні ідеї щодо визначення найкоротшого маршруту з точки А в точку В.

- Ганна завжди рухається вправо або вгору, залишаючись нижче червоного відрізка, що з'єднує точки А і В, але якомога ближче до нього (зелена лінія).
- Дмитро завжди рухається вправо або вгору, намагаючись якомога частіше перетинати червоний відрізок, що з'єднує точки А і В (помаранчева лінія).
- Марина завжди рухається вправо або вгору, залишаючись вище червоного відрізка, що з'єднує точки А і В, але якомога ближче до нього (фіолетова лінія).

Маршрут Ганни **Маршрут Дмитра** Маршрут Марини

PISA-2022

Навігація
Продовження вступу

Прочитайте продовження вступу й, обираючи різні вкладки, перегляньте різні маршрути. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

НАВІГАЦІЯ

Ганна, Дмитро і Марина мають різні ідеї щодо визначення найкоротшого маршруту з точки А в точку В.

- Ганна завжди рухається вправо або вгору, залишаючись нижче червоного відрізка, що з'єднує точки А і В, але якомога ближче до нього (зелена лінія).
- Дмитро завжди рухається вправо або вгору, намагаючись якомога частіше перетинати червоний відрізок, що з'єднує точки А і В (помаранчева лінія).
- Марина завжди рухається вправо або вгору, залишаючись вище червоного відрізка, що з'єднує точки А і В, але якомога ближче до нього (фіолетова лінія).

Маршрут Ганни Маршрут Дмитра **Маршрут Марини**

PISA-2022

Навігація

Завдання 1 / 2

За допомогою миші переміщайте точку А в різні позиції, що позначені на перехрестях вулиць. Зі зміною положення точки А на карті будуть відображатися маршрути відповідно до кожної зі стратегій планування маршруту до точки В, а в таблицю будуть занесені довжини цих маршрутів.

Ви помітите, що незалежно від стартової позиції довжини маршрутів Ганни, Дмитра й Марини однакові.

Поясніть, чому всі три стратегії дають маршрути однакової довжини.

Надайте пояснення

НАВІГАЦІЯ

Позиція А	Відстань від точки А до точки В (в одиницях)		
	Маршрут Ганни	Маршрут Дмитра	Маршрут Марини
1			
2			
3			
4			

PISA-2022

Навігація

Завдання 2 / 2

На карту було додано три діагональні вулиці.

З попереднього досвіду ми знаємо, що в разі відсутності діагональних вулиць довжина найкоротшого маршруту з точки С в точку В становить 7 одиниць.

Клікніть на **Істинне** або **Хибне** для кожного твердження і поясніть Вашу відповідь.

- Існує маршрут із точки С в точку В, що проходить через Діагональ 1, довжина якого менша, ніж 7 одиниць.

Істинне
 Хибне

Поясніть Вашу відповідь
- Існує маршрут із точки С в точку В, що проходить через Діагональ 2, довжина якого менша, ніж 7 одиниць.

Істинне
 Хибне

Поясніть Вашу відповідь
- Існує маршрут із точки С в точку В, що проходить через Діагональ 3, довжина якого менша, ніж 7 одиниць.

Істинне
 Хибне

Поясніть Вашу відповідь

НАВІГАЦІЯ

ЗАВЖДИ – ІНОДІ – НІКОЛИ

PISA-2022

Завжди – іноді – ніколи
Вступ

Прочитайте вступ. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

ЗАВЖДИ – ІНОДІ – НІКОЛИ

Твердження, які висловлюють люди, загалом можуть бути згруповані в три різні категорії:

твердження, які **ЗАВЖДИ** істинні;
твердження, які **ІНОДІ** істинні;
твердження, які **НІКОЛИ** не істинні.

Твердження
«Число, яке ділиться на 4, також ділиться на 2»

ЗАВЖДИ істинне, тому що 2 є множитком 4.

Твердження
«Число, яке ділиться на 9, також ділиться на 6»

ІНОДІ істинне. Наприклад, 36 ділиться і на 9, і на 6, але 27 ділиться на 9, але не ділиться на 6.

Твердження
«Сума двох непарних чисел є непарним числом»

НІКОЛИ не істинне, тому що сума двох непарних чисел завжди є парним числом.

PISA-2022

Завжди – іноді – ніколи
Завдання 1 / 3

Для кожного твердження вкажіть, чи є воно завжди істинним, іноді істинним або ніколи не істинним.

Твердження	Завжди істинне	Іноді істинне	Ніколи не істинне
Будь-яка 14-річна дівчина принаймні один раз у своєму житті мала зріст у два рази менший за її теперішній зріст.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Будь-яка 14-річна дівчина вища за будь-яку 10-річну дівчинку.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

ЗАВЖДИ – ІНОДІ – НІКОЛИ

Твердження, які висловлюють люди загалом можуть бути згруповані в три категорії:

твердження, які **ЗАВЖДИ** істинні;
твердження, які **ІНОДІ** істинні;
твердження, які **НІКОЛИ** не істинні.

Твердження
«Число, яке ділиться на 4, також ділиться на 2»

ЗАВЖДИ істинне, тому що 2 є множитком 4.

Твердження
«Число, яке ділиться на 9, також ділиться на 6»

ІНОДІ істинне. Наприклад, 36 ділиться і на 9, і на 6, але 27 ділиться на 9, але не ділиться на 6.


Твердження
«Сума двох непарних чисел є непарним числом»

НІКОЛИ не істинне, тому що сума двох непарних чисел завжди є парним числом.

PISA-2022

Завжди – іноді – ніколи
Завдання 2 / 3

Для кожного твердження вкажіть, чи є воно **завжди істинним**, **іноді істинним** або **ніколи не істинним**.

Твердження	Завжди істинне	Іноді істинне	Ніколи не істинне
Якщо ціле число помножити саме на себе, то одержимо парне число.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Подвоєння цілого числа дає парне число.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Ділення непарного цілого числа на два дає ціле число.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$3x + 1 = \frac{6x + 2}{2}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
 <p>Периметр фігури А більший за периметр фігури В.</p>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Якщо монету підкинути 50 разів, то герб випаде 25 разів.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

PISA-2022

Завжди – іноді – ніколи
Питання 3 / 3

Кожне з наведених нижче тверджень **ІНОДІ ІСТИННЕ**.

Для кожного з наведених нижче тверджень наведіть приклад, коли це твердження є істинним і коли це твердження не є істинним.

Твердження	Приклад, коли це твердження є істинним	Приклад, коли це твердження не є істинним
Людина, яка має найбільшу кількість монет, має найбільшу суму грошей.	<i>Уведіть свій приклад тут</i>	<i>Уведіть свій приклад тут</i>
$A - B = B - A$	<i>Уведіть свій приклад тут</i>	<i>Уведіть свій приклад тут</i>
Якщо додати одне й те саме число до чисельника та до знаменника дробу, то значення дробу збільшиться.	<i>Уведіть свій приклад тут</i>	<i>Уведіть свій приклад тут</i>

ЗАМОЩЕННЯ


PISA-2022

Замощення
Вступ


Прочитайте вступ. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

ЗАМОЩЕННЯ

Плиточник замощує підлогу. Він може використовувати плитки двох різних типів – А та Б.

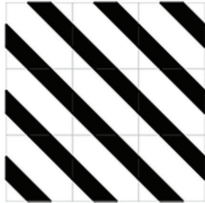
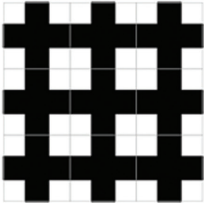


Плитка А



Плитка Б

Використовуючи лише плитку А, він може скласти орнамент, який наведено внизу зліва, а використовуючи лише плитку Б, він може скласти орнамент, який наведено внизу справа.

PISA-2022

Замощення
Завдання 1 / 5


Ознайомтеся з наведеною справа інформацією «Замощення». Щоб виконати завдання, скористайтеся методом перетягування.

Орнамент, що зображений справа, створений за допомогою комбінування двох типів плитки. Плиточник продовжує замощувати підлогу плиткою, розширюючи візерунок за тим самим зразком.


Дослідіть зразок.

Скористайтеся мишкою для перетягування плиток на потрібні позиції, щоб завершити замощення підлоги плитками відповідно до заданого зразка.

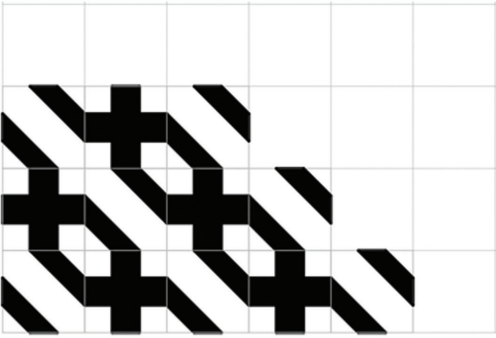
ЗАМОЩЕННЯ



Плитка А



Плитка Б



PISA-2022

Замощення
Завдання 2 / 5

Ознайомтеся з наведеною справа інформацією «Замощення». Щоб виконати завдання, скористайтеся методом перетягування.

Плиточник хоче створити інструкцію щодо послідовності кроків для тих, хто хоче повторити його орнамент.

Перетягніть елементи у відповідні місця для завершення інструкції, яка допоможе повторити орнамент, наведений справа.

ЯКШО ТО ІНАКШЕ ПЛИТКА А ПЛИТКА В

ІНСТРУКЦІЯ ДЛЯ ЗАМОЩЕННЯ
Для ряду з номером від 1 до 4:

«Спочатку визначимо ліву плитку в ряді»

ЯКШО номер ряду непарний

ТО першою буде

ІНАКШЕ першою буде

«Закінчимо ряд додаванням плиток»

ЯКШО попередня плитка

використайте

використайте

Наступний ряд

ЗАМОЩЕННЯ

PISA-2022

Замощення
Завдання 3 / 5

Ознайомтеся з наведеною справа інформацією «Замощення». Виберіть відповідь на запитання та клікніть на неї.

Плиточник хоче знати наперед, яка плитка потрібна для будь-якої позиції на сітці. Наприклад, він хоче знати, яку плитку йому доведеться використати в позиції, яка позначена через $(m; n)$.

Дослідіть орнамент, зокрема ті чотири плитки, які обмежені червоною лінією. Оберіть з наведених нижче правил УСІ ті, які допоможуть правильно визначити плитку, що потрібна для будь-якої позиції $(m; n)$ на сітці.

Правило	
Якщо число $m + n$ непарне, то використовуємо плитку А, інакше – плитку В.	<input type="radio"/>
Якщо число $m + n$ парне, то використовуємо плитку А, інакше – плитку В.	<input type="radio"/>
Якщо число $m \cdot n$ непарне, то використовуємо плитку А, інакше – плитку В.	<input type="radio"/>
Якщо число $m \cdot n$ парне, то використовуємо плитку А, інакше – плитку В.	<input type="radio"/>
Якщо число m непарне і число n непарне, то використовуємо плитку А, інакше – плитку В.	<input type="radio"/>
Якщо m і n обоє парні або обоє непарні, то використовуємо плитку А, інакше – плитку В.	<input type="radio"/>

ЗАМОЩЕННЯ

PISA-2022


Замощення
Обговорення

Прочитайте вступ.

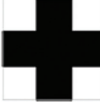
Іншим способом опису зразка є просто запис літер, якими позначено плитку, у відповідних позиціях на сітці.

Дослідіть використання літер для опису орнаменту. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

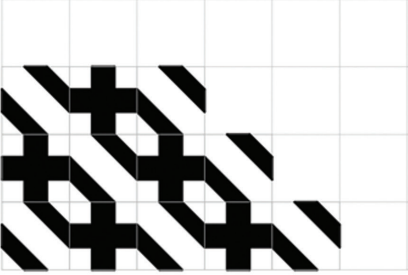
ЗАМОЩЕННЯ



Плитка А



Плитка В



A	B	A			
B	A	B	A		
A	B	A	B	A	

PISA-2022


Замощення
Завдання 4 / 5

Орнамент, наведений справа, був створений за допомогою комбінації двох типів плиток – В та С. Андрій продовжує замощувати підлогу плиткою, повторюючи заданий зразок.


Дослідіть зразок.

Червоний квадрат на сітці, що наведена нижче, відповідає червоному квадрату на сітці справа. Використайте літери В та С для позначення тих плиток, які мають бути розташовані в кожній позиції червоного квадрата.

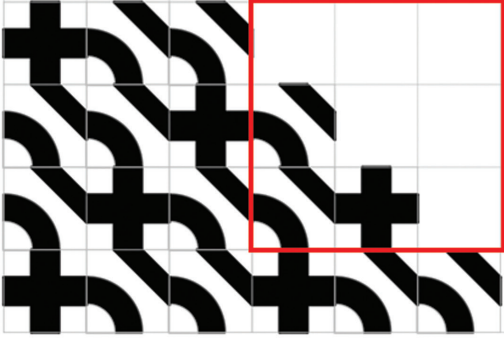
ЗАМОЩЕННЯ



Плитка В



Плитка С



PISA-2022

Замощення
Завдання 5/5

Рисунок, наведений справа, є фрагментом орнаменту, що створений за допомогою комбінації трьох плиток – А, В та С.

Дослідіть орнамент.

Які з наведених нижче фрагментів описують складені із плиток зразки 3 x 3, що можна повторити для створення орнаменту, зображеного справа (оберіть УСІ фрагменти, які можна використати).

Зразки 3 x 3, які використані для створення орнаменту			
A	B	C	D
B	A	C	
B	C	A	
B	C	A	D
C	A	B	
A	C	B	
A	B	C	D
B	C	A	
B	A	C	
A	B	C	D
B	C	A	
C	A	B	

ЗАМОЩЕННЯ

Плитка А Плитка В Плитка С

РІШЕННЯ ПРО КУПІВЛЮ

PISA-2022


Рішення про купівлю
Вступ

Прочитайте вступ. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

РІШЕННЯ ПРО КУПІВЛЮ


Аліна хоче купити в інтернет-магазині пару навушників. Вона таки знайшла ті, які їй подобаються. Аліна помітила, що попри те, що загальна кількість відгуків на товар невелика, він отримав багато низьких оцінок: загалом 25% 1- та 2-зіркових відгуків.

Стереонавушники вакуумні з мікрофоном



Середній рейтинг на основі 163 відгуків

5 зірочок	47 (29%)
4 зірочки	41 (25%)
3 зірочки	34 (21%)
2 зірочки	28 (17%)
1 зірочка	13 (8%)



PISA-2022

Рішення про купівлю
Продовження вступу


Прочитайте продовження вступу. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

РІШЕННЯ ПРО КУПІВЛЮ

Щоб визначитися з тим, купувати навушники чи ні, Аліна вивчила коментарі до 1- та 2-зіркових відгуків і зауважила, що деякі з них зовсім не стосувалися якості або функціональності виробу.

Вона згрупувала відгуки для 1- та 2-зіркових відгуків і узагальнила свої результати в таблиці.

ПРИЧИНА	Кількість
Навушники прийшли із затримкою	13
Навушники взагалі не прийшли	4
Шнур був пошкоджений або його зовсім не було	7
Один або обидва навушники були пошкоджені	4
Упаковка була непривабливою	5
Неправильна оцінка (хороший відгук, низька оцінка)	8



PISA-2022

Рішення про купівлю
Завдання 1/2

Аліна проглянула всі коментарі й зауважила, що тільки 1- та 2-зіркові відгуки стосувалися низької якості виробу, а також ситуацій, коли навушники прийшли із затримкою або не прийшли взагалі.

Скористайтеся інформацією на вкладках **Онлайн-відгуки** та **Зведена таблиця**, а також убудованим калькулятором для відповіді на запитання.

Запитання	Відповідь
Який відсоток від усіх відгуків стосувався низької якості виробу?	<input type="text"/>
Який відсоток від 1- та 2-зіркових відгуків стосувався ситуацій, коли виріб доставили із затримкою або не доставили взагалі?	<input type="text"/>

РІШЕННЯ ПРО КУПІВЛЮ

Онлайн-відгуки **Зведена таблиця**

Стереонавушники вакуумні з мікрофоном

5 зірочок	<input type="text"/>	47 (29%)
4 зірочки	<input type="text"/>	41 (25%)
3 зірочки	<input type="text"/>	34 (21%)
2 зірочки	<input type="text"/>	28 (17%)
1 зірочка	<input type="text"/>	13 (8%)

Середній рейтинг на основі 163 відгуків

PISA-2022

Рішення про купівлю
Завдання 1/2

Аліна переглянула всі коментарі й зауважила, що тільки 1- та 2-зіркові відгуки стосуються низької якості виробу, а також ситуацій, коли навушники прийшли із затримкою або не прийшли взагалі.

Скористайтеся інформацією на вкладках **Онлайн-відгуки** та **Зведена таблиця**, а також убудованим калькулятором для відповіді на запитання.

Запитання	Відповідь
Який відсоток від усіх відгуків стосується низької якості виробу?	<input type="text"/>
Який відсоток від 1- та 2-зіркових відгуків стосується ситуацій, коли виріб доставили із затримкою або не доставили взагалі?	<input type="text"/>

РІШЕННЯ ПРО КУПІВЛЮ

Онлайн-відгуки **Зведена таблиця**

ПРИЧИНА	Кількість
Навушники прийшли із затримкою	13
Навушники взагалі не прийшли	4
Шнур був пошкоджений або його зовсім не було	7
Один або обидва навушники були пошкоджені	4
Упаковка була непривадливою	5
Неправильна оцінка (хороший відгук, низька оцінка)	8

PISA-2022

Рішення про купівлю
Завдання 2/2

Аліна переглянула всі коментарі й зауважила, що тільки 1- та 2-зіркові відгуки стосуються низької якості виробу, а також ситуацій, коли навушники прийшли із затримкою або не прийшли взагалі.


Скористайтеся інформацією на вкладках **Онлайн-відгуки** та **Зведена таблиця**, а також убудованим калькулятором для відповіді на запитання.

Запитання	Відповідь
Аліна стурбована тим, що навушники придуть із запізненням або не будуть доставлені взагалі.	
На основі інформації, яка наведена на вкладках Онлайн-відгуки та Зведена таблиця визначте, наскільки ймовірно, що товар надійде із запізненням чи зовсім не буде доставленим?	
Запишіть свою відповідь у вигляді дробу або відсотків.	

РІШЕННЯ ПРО КУПІВЛЮ


Онлайн-відгуки Зведена таблиця

Стереонавушники вакуумні з мікрофоном



5 зірочок	47 (29%)
4 зірочки	41 (25%)
3 зірочки	34 (21%)
2 зірочки	28 (17%)
1 зірочка	13 (8%)

Середній рейтинг на основі 163 відгуків



PISA-2022

Рішення про купівлю
Завдання 2/2

Аліна проглянула всі коментарі й зауважила, що тільки 1- та 2-зіркові відгуки стосувалися низької якості виробу, а також ситуацій, коли навушники прийшли із затримкою або не прийшли взагалі.


Скористайтеся інформацією на вкладках **Онлайн-відгуки** та **Зведена таблиця**, а також убудованим калькулятором для відповіді на запитання.

Запитання	Відповідь
Аліна стурбована тим, що навушники придуть із запізненням або не будуть доставлені взагалі.	
На основі інформації, яка наведена на вкладках Онлайн-відгуки та Зведена таблиця визначте, наскільки ймовірно, що товар надійде із запізненням чи зовсім не буде доставленим?	
Запишіть свою відповідь у вигляді дробу або відсотків.	

РІШЕННЯ ПРО КУПІВЛЮ

Онлайн-відгуки Зведена таблиця

ПРИЧИНА	Кількість
Навушники прийшли із затримкою	13
Навушники взагалі не прийшли	4
Шнур був пошкоджений або його зовсім не було	7
Один або обидва навушники були пошкоджені	4
Упаковка була непривабливою	5
Неправильна оцінка (хороший відгук, низька оцінка)	8



МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

PISA-2022

Моделювання заощаджень

Вступ

Прочитайте вступ. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

Софія та її батьки обговорюють, як найкраще заощадити кошти, які потім вона зможе використати, коли почне навчання в університеті. Вони знайшли в інтернеті онлайн-застосунок, який дає їм змогу досліджувати різні варіанти того, як можна досягти бажаного результату.

При моделюванні ситуації беруться до уваги чотири змінні:

- **Місячний внесок:** сума, яку родина вносить на ощадний рахунок кожного місяця.
- **Період заощаджень:** кількість місяців, упродовж яких родина робить щомісячні внески на ощадний рахунок.
- **Річна процентна ставка,** яка нараховується на ощадний рахунок.
- **Загальне заощадження:** загальна сума, яка буде накопичена в кінці періоду заощаджень.

Застосунок дає можливість користувачеві моделювати такі три величини:

- **Загальне заощадження:** сукупні заощадження, які будуть накопичені, якщо відомі місячний внесок, процентна ставка та період заощаджень.
- **Місячний внесок:** місячний внесок, необхідний для досягнення бажаного загального заощадження за певний період та за певної процентної ставки.
- **Період заощаджень:** загальний період (кількість місяців), необхідний для досягнення бажаного загального заощадження за певного місячного внеску та певної процентної ставки.

PISA-2022

Моделювання заощаджень

Вступ

Використання симулятора складається з двох кроків:

1. Вибір величини, яку ви хочете моделювати.
2. Уведення значень відповідних змінних.

Симулятор дає можливість водночас зберігати деталі не більш ніж п'яти моделювань.

Дослідіть, як працює симулятор. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

Крок 1: Оберіть, що бажаєте моделювати:

Крок 2: Уведіть потрібну інформацію, використовуючи виділені (червоні) повзунки

Період заощаджень: Місяці

Місячний внесок: Зеди

Річна процентна ставка: % на рік

Загальне заощадження: Зеди

№ симуляції	Період заощаджень (місяці)	Місячний внесок (зеди)	Річна процентна ставка (%)	Загальне заощадження (зеди)
1				
2				
3				
4				
5				

PISA-2022

Моделювання заощаджень

Вступ

Використання симулятора складається з двох кроків:

1. Вибір величини, яку ви хочете моделювати.
2. Уведення значень відповідних змінних.

Симулятор дає можливість водночас зберігати деталі не більш ніж п'яти моделювань.

Дослідіть, як працює симулятор. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

Крок 1: Оберіть, що бажаєте моделювати: Загальна сума, яку Ви заощадите

Крок 2: Уведіть потрібну інформацію, використовуючи виділені (червоні) повзунки

Період заощаджень: 12 48 Місяці

Місячний внесок: 40 Зеди

Річна процентна ставка: 10 % на рік

Загальне заощадження: 2350 Зеди

Зберегти дані
Видалити збережені дані

№ симуляції	Період заощаджень (місяці)	Місячний внесок (зеди)	Річна процентна ставка (%)	Загальне заощадження (зеди)
1	12	40	6	495
2	48	40	6	2165
3	12	40	10	505
4	48	40	10	2350
5				

Цього екрана немає в групі завдань. Його наведено для того, щоб надати читачеві уявлення про те, із чим буде мати справу учень / студент.

PISA-2022

Моделювання заощаджень

Вступ

Використання симулятора складається з двох кроків:

1. Вибір величини, яку ви хочете моделювати.
2. Уведення значень відповідних змінних.

Симулятор дає можливість водночас зберігати деталі не більш ніж п'яти моделювань.

Дослідіть, як працює симулятор. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

Крок 1: Оберіть, що бажаєте моделювати: Місячний внесок, який Ви робитимете

Крок 2: Уведіть потрібну інформацію, використовуючи виділені (червоні) повзунки

Період заощаджень: 12 48 Місяці

Місячний внесок: 82 Зеди

Річна процентна ставка: 12 % на рік

Загальне заощадження: 5000 Зеди

Зберегти дані
Видалити збережені дані

№ симуляції	Період заощаджень (місяці)	Місячний внесок (зеди)	Річна процентна ставка (%)	Загальне заощадження (зеди)
1	12	405	6	5000
2	48	92	6	5000
3	18	255	12	5000
4	48	82	12	5000
5				

Цього екрана немає в групі завдань. Його наведено для того, щоб надати читачеві уявлення про те, із чим буде мати справу учень / студент.

PISA-2022

Моделювання заощаджень

Вступ

Використання симулятора складається з двох кроків:

1. Вибір величини, яку ви хочете моделювати.
2. Уведення значень відповідних змінних.

Симулятор дає можливість водночас зберігати деталі не більш ніж п'яти моделювань.

Дослідіть, як працює симулятор. Після цього клікніть на стрілку УПЕРЕД.

Цього екрана немає в групі завдань. Його наведено для того, щоб надати читачеві уявлення про те, із чим буде мати справу учень / студент.

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

Крок 1: Оберіть, що бажаєте моделювати:

Крок 2: Уведіть потрібну інформацію, використовуючи виділені (червоні) повзунки

Період заощаджень: Місяці
 Місячний внесок: Зеди
 Річна процентна ставка: % на рік
 Загальне заощадження: Зеди

№ симуляції	Період заощаджень (місяці)	Місячний внесок (зеди)	Річна процентна ставка (%)	Загальне заощадження (зеди)
1	97	40	6	5000
2	55	80	6	5000
3	81	40	12	5000
4	49	80	12	5000
5				

PISA-2022

Моделювання заощаджень

Завдання 1 / 3

Скористайтеся симулятором для обчислення невідомої величини в кожній з описаних нижче ситуацій.

1. Скільки зедів заощадить Софія, якщо:
 - щомісяця вноситиме на ощадний рахунок 60 зедів
 - упродовж 48 місяців
 - за річної процентної ставки 4 %?
2. Скільки зедів має вносити Софія на ощадний рахунок кожного місяця, щоб:
 - заощадити 4000 зедів
 - за 36 місяців
 - за річної процентної ставки 8 %?
3. Скільки часу (у місяцях) потрібно Софії, щоб:
 - заощадити 6000 зедів,
 - якщо її щомісячний внесок буде 100 зедів,
 - за річної процентної ставки 10 %?

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

Крок 1: Оберіть, що бажаєте моделювати:

Крок 2: Уведіть потрібну інформацію, використовуючи виділені (червоні) повзунки

Період заощаджень: Місяці
 Місячний внесок: Зеди
 Річна процентна ставка: % на рік
 Загальне заощадження: Зеди

№ симуляції	Період заощаджень (місяці)	Місячний внесок (зеди)	Річна процентна ставка (%)	Загальне заощадження (зеди)
1				
2				
3				
4				
5				

PISA-2022

Моделювання заощаджень

Завдання 2 / 3

Для кожного моделювання виберіть **ДВА ТВЕРДЖЕННЯ**, які є підставою для його використання.

Моделювання	Твердження		
	Ви знаєте, скільки грошей вам буде потрібно.	Ви знаєте, яку суму можете вносити кожного місяця.	Ви знаєте, коли вам будуть потрібні гроші.
Моделювання періоду заощаджень	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Моделювання щомісячного внеску	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Моделювання загального заощадження	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

Крок 1: Оберіть, що бажаєте моделювати:

Крок 2: Уведіть потрібну інформацію, використовуючи виділені (червоні) повзунки

Період заощаджень: **Місяці**

Місячний внесок: **Зеди**

Річна процентна ставка: **% на рік**

Загальне заощадження: **Зеди**

№ симуляції	Період заощаджень (місяці)	Місячний внесок (зеди)	Річна процентна ставка (%)	Загальне заощадження (зеди)
1				
2				
3				
4				
5				

PISA-2022

Моделювання заощаджень

Завдання 3 / 3

Софія провела кілька моделювань. Вона стверджує: **«Я помітила, що якщо я не отримую відсотків від заощаджень і подвоюю місячний внесок, то період накопичення зменшується вдвічі. Проте якщо я отримую відсоток і подвоюю місячний внесок, то період накопичення не зменшується вдвічі».**

Оберіть необхідні опції, щоб дослідити результати моделювань Софії та щоб провести власні моделювання для надання відповідей на наведені нижче запитання.

- Завершіть твердження: *Спостереження, зроблене Софією,*
 - завжди істинне.
 - інколи істинне, це залежить від величини процентної ставки.
- Завершіть твердження: *У разі фіксованої суми загального заощадження й визначеного місячного внеску зростання процентної ставки приводить до більшого скорочення періоду заощаджень, якщо*
 - місячний внесок менший.
 - місячний внесок більший.
- Наведіть обґрунтування твердження, яке ви завершили, надаючи відповідь на запитання 2.

Наведіть обґрунтування

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

Крок 1: Оберіть, що бажаєте моделювати:

Крок 2: Уведіть потрібну інформацію, використовуючи виділені (червоні) повзунки

Період заощаджень: **Місяці**

Місячний внесок: **Зеди**

Річна процентна ставка: **% на рік**

Загальне заощадження: **Зеди**

№ симуляції	Період заощаджень (місяці)	Місячний внесок (зеди)	Річна процентна ставка (%)	Загальне заощадження (зеди)
1	300	20	0	6000
2	150	40	0	6000
3	184	20	6	6000
4	112	40	6	6000
5				

PISA-2022

Моделювання заощаджень
 Завдання 3 / 3

Софія провела кілька симуляцій. Вона стверджує:
«Я помітила, що якщо я не отримую процента від заощаджень і подвоюю місячний внесок, то тривалість періоду накопичення зменшується вдвічі. Проте якщо я отримую процент і подвоюю місячний внесок, то період накопичення не зменшується вдвічі.»

Оберіть необхідні опції, щоб дослідити результати симуляцій Софії та щоб провести власні симуляції для надання відповідей на наведені нижче запитання.

1. Завершіть твердження:
 Спостереження, зроблене Софією,
 завжди істинне
 інколи істинне, це залежить від величини процентної ставки.
2. Завершіть твердження:
 У разі фіксованої суми загального заощадження й постійних місячних внесків зростання процентної ставки приводить до більшого скорочення періоду заощаджень, якщо
 місячний внесок менший.
 місячний внесок більший.
3. Наведіть обґрунтування для твердження, яке ви завершили, надаючи відповідь на запитання 2.

Наведіть обґрунтування

Симуляції Софії

Симулятор

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАОЩАДЖЕНЬ

Крок 1: Оберіть, що бажаєте симулювати:

Крок 2: Уведіть потрібну інформацію, використовуючи виділені (червоні) повзунки

Період заощаджень:

0 Місяці

Місячний внесок:

0 Зеди

Річна процентна ставка:

0 % на рік

Загальне заощадження:

0 Зеди

Зберегти дані

Видалити збережені дані

№ симуляції	Період заощаджень (місяці)	Місячний внесок (зеди)	Річна процентна ставка (%)	Загальне заощадження (зеди)
1				
2				
3				
4				
5				

Додаток Б.
СКОРОЧЕНА
ВЕРСІЯ
РАМКОВОГО
ДОКУМЕНТА

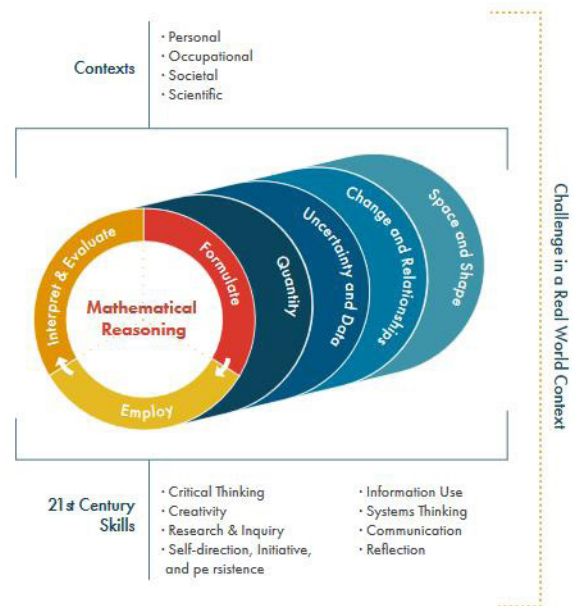
PISA 2022

MATHEMATICS

FRAMEWORK

PISA-2022:

РАМКОВИЙ ДОКУМЕНТ

ІЗ МАТЕМАТИКИ¹

Рамковий документ із математики PISA-2021 визначає теоретичні засади оцінювання PISA з математики, що ґрунтуються на фундаментальному понятті математичної грамотності, яка стосується математичного мислення й трьох процесів циклу розв'язування задач (математичного моделювання). Цей рамковий документ показує, як знання математичного змісту структуровані в чотири змістові категорії. Він також описує чотири категорії контекстів, у яких учні / студенти стикаються з викликами, у яких важливою стає математика.

Оцінювання PISA вимірює, наскільки ефективно країни готують своїх учнів / студентів до застосування математики в різних ситуаціях їхнього особистого, суспільного або професійного життя як складника їхнього конструктивного, активного й свідомого громадянства у 21 столітті.

Що таке математична грамотність?

Математична грамотність — це здатність людини мислити математично й формулювати, застосовувати та інтерпретувати математику для розв'язання проблем у різноманітних контекстах реального світу. Вона включає в себе поняття, процедури, факти та засоби для опису, пояснення й прогнозування явищ; допомагає людині зрозуміти, яку роль математика відіграє у світі, та робити обґрунтовані умовиводи і приймати виважені рішення, необхідні творчому, активному й мислячому громадянину XXI століття.

Що нового в PISA-2022

PISA-2022 намагається бачити математику в контексті нинішнього мінливого світу, який надзвичайно швидко розвивається під впливом нових технологій і тенденцій і в якому громадяни змушені бути творчими й активними,

¹ Примітка. Цей матеріал є перекладом матеріалів скороченої версії рамкового документа PISA-2022 (<https://pisa2022-maths.oecd.org/#Examples>).

шукати нестандартні рішення, що стосуються як їхнього приватного життя, так і суспільства, у якому вони живуть, загалом. Це ставить у фокус здатність мислити математично, що завжди була складником рамкового документа PISA з математики. Технологічні зміни зумовлюють необхідність розуміння учнями / студентами тих понять обчислювального мислення, які є складниками математичної грамотності. Урешті-решт, рамковий документ утверджує думку, що поліпшена версія комп'ютерного тестування нині є доступною для більшості учнів / студентів у межах PISA.

МАТЕМАТИЧНЕ МИСЛЕННЯ

Здатність мислити логічно та обстоювати свою думку чесно й переконливо – це вміння, яке набуває все більшого значення в сучасному світі. Математика – це наука про чітко визначені об'єкти та поняття, що можуть бути аналізовані й трансформовані в різні способи завдяки використанню «математичного мислення» для отримання висновків, що є однозначними й незмінними в часі.

Через математику учні / студенти доходять розуміння того, що за допомогою належних міркувань і припущень можна отримувати такі результати, щодо яких цілком можна бути певними, що вони є істинними в застосунку до широкого спектру реальних ситуацій. Важливо також, що ці висновки не мають виключень і не потребують своєї перевірки кимось іззовні, хто наділений певними повноваженнями.

Ключові ідеї

Принаймні шість ключових ідей структурують і підтримують математичне мислення. Ці ключові ідеї включають:

- розуміння кількості, числових систем і їхніх алгебраїчних властивостей;
- визнання сили абстрагування й символічних представлень;
- бачення математичних структур і їхніх закономірностей;
- розпізнавання функціональних залежностей між величинами;
- застосування математичного моделювання як об'єктива, наведеного на реальний світ (наприклад, на ті явища, що вивчаються у фізиці, біології, економіці, соціальних і поведінкових науках);
- усвідомлення варіативності (змінності) як осердя статистики.

Кількість, числові системи та їхні алгебраїчні властивості

Фундаментальне стародавнє поняття кількості концептуалізується в математиці через числові системи та базові алгебраїчні властивості, що використовуються цими системами. Усеохопна універсальність числових систем робить їх істотними для математичної грамотності.

Важливо також розуміти сутність представлень чисел (як символів, включно з числівниками, як точок на числовій прямій або як геометричних величин) та те, як здійснювати переходи між ними; те, як властивості числових систем позначаються на властивостях їх представлень, а також те, як алгебраїчні властивості числових систем впливають на характер роботи в цих системах.

Математика як система, що ґрунтується на абстрагуванні та символічних представленнях

Фундаментальні ідеї математики вирости з досвіду життя людини в цьому світі та з її потреби забезпечити узгодженість, упорядкованість і передбачуваність цього досвіду. Багато математичних об'єктів у той чи той спосіб моделюють дійсність або принаймні уявлення про певні аспекти дійсності. Абстрагування передбачає свідомий і вибірковий пошук структурних подібностей між об'єктами й вибудову зв'язків між цими об'єктами на основі виявлених подібностей. У межах шкільного курсу математики абстрагування забезпечує встановлення зв'язків між реальними об'єктами, символічними представленнями та операціями, зокрема й алгоритмами та ментальними моделями.

Учні / студенти застосовують представлення – чи то символічні, графічні, числові, чи то геометричні – для того, щоб організувати й вербалізувати своє математичне мислення. Представлення можуть узагальнювати математичні смисли й процеси в ефективних алгоритмах. Представлення є також ключовим елементом математичного моделювання, яке дає можливість учням / студентам отримувати спрощене або ідеалізоване формулювання реальної проблеми дійсності.

Математичні структури та їхні закономірності

Структура тісно пов'язана із символічним представленням. Використання символів є потужним засобом тільки в тому разі, коли ці символи щось значать для того, хто їх використовує, а не тоді, коли вони постають як позбавлені будь-якого смислу об'єкти для жонглювання. Бачення структури є способом знаходження й запам'ятовування смислу абстрактного представлення. Спроможність бачити структуру – важлива концептуальна підмога для суто процедурних знань.

Смислова стрункість усвідомлення математичних структур також допомагає в моделюванні. Якщо досліджувані об'єкти є не абстрактними математичними об'єктами, а швидше об'єктами реального світу, які потребують моделювання за посередництва математики, то структура може спрямовувати моделювання. Учні / студенти можуть також накладати структури на нематематичні об'єкти, щоб зробити їх предметом математичного аналізу.

Функціональні залежності між величинами

Залежність між величинами може бути виражена за допомогою рівнянь, графіків, таблиць або вербальних описів. Важливий крок у навчанні – вивести з них поняття функції як такої, тобто як такого абстрактного об'єкта, представленнями якого і виступають різноманітні рівняння, графіки, таблиці чи описи.

Два погляди на функцію – наївний погляд як на процес і більш абстрактний погляд як на об'єкт – можуть бути узгоджені між собою в графіку функції.

Разом із тим аналіз графіка функції, визначення координат величин на осях також мають динамічний або процесний характер. Графік функції є важливим інструментом для дослідження поняття швидкості змін. Графік постає таким собі візуальним засобом для усвідомлення функції як залежності між пов'язаними величинами.

Математичне моделювання як об'єктів, наведених на реальний світ

Моделі репрезентують ідеалізовані концептуалізації явищ реального життя або науки. У цьому сенсі моделі постають як абстракції реальності. Модель може репрезентувати концептуалізації, які розуміють як наближення або робочі гіпотези щодо певного явища об'єктивної дійсності, або вона може представляти певне явище як свідомо спрощену версію його бачення. Математичні моделі формулюються математичною мовою й використовують широкий спектр математичних інструментів і математичних фактів (наприклад, з арифметики, алгебри чи геометрії). Тому їх використовують для точної передачі суті якоїсь концептуалізації або теорії явища, для аналізування й оцінювання даних (чи відповідає певна модель даним?), а також для прогнозування. Моделями можна оперувати, тобто використовувати їх у різний час або з різними вхідними даними, створюючи таким чином симуляції (імітаційні моделі). За допомогою симуляцій можна робити прогнози, вивчати наслідки та оцінювати адекватність і точність моделей.

Варіативність (змінність) як осердя статистики

Живі істоти, як і неживі об'єкти, різняться за багатьма характеристиками. З огляду на існування такого, як правило, великого різноманіття робити ті чи ті узагальнення в цьому світі виявляється доволі складним завданням, якщо попередньо не окреслити хоч якось межі цих узагальнень. Урахування варіативності є одним із визначальних, якщо не центральних, елементів, що лежить в основі статистики. У сучасному світі люди часто діють у життєвих ситуаціях, практично ігноруючи варіативність. Унаслідок цього вони пропонують необґрунтовані узагальнення, які часто вводять в оману або взагалі є помилковими, а тому дуже небезпечними. Упередження, у їх суспільствознавчому розумінні, як правило, виникають тоді, коли не враховується варіативність обговорюваних ознак.

Статистика – це своєрідні спроби пошуку закономірностей у дуже мінливому контексті, тобто намагання знайти сигнал, що репрезентує «істину», серед великої кількості випадкових шумів. «Істину» взято в лапки, оскільки це не істина в тому Платоновому розумінні, що її може надати математика, а наближена оцінка істини, що установлена в імовірнісному контексті, пов'язана з наближеною оцінкою похибки, що виникає в процесі її визначення. Зрештою, людині, якій випадає приймати рішення, завжди доведеться стикатися з дилемою так ніколи і не дізнатися напевне, що таке істина. У підсумку наближена оцінка – це всього лише набір правдоподібних значень.

МАТЕМАТИЧНЕ МИСЛЕННЯ

Формулювати

Слово *формулювати* у визначенні математичної грамотності означає здатність особи розпізнавати та ідентифікувати можливості застосовувати математику, а потім пропонувати математичні структури для проблеми, що існує в певній контекстуальній формі. У процесі формулювання проблеми в математичній формі треба визначити, які розділи математики потрібні для аналізу, визначення (постановки) задачі та її розв'язання. Особа переводить проблему з контексту реального світу до категорії математичних задач, надаючи цій проблемі математичної структури, представлення й специфікації. Вона обмірковує й визначає обмеження та припущення щодо відповідної проблеми. Якщо говорити більш конкретно, то процес формулювання проблеми математично включає такі види діяльності:

- вибір відповідної моделі зі списку;**
- ідентифікація математичних аспектів проблеми, представленої в контексті реального світу, й ідентифікація значимих змінних;
- розпізнавання математичної структури (включаючи закономірності, залежності й форми) в проблемах або ситуаціях;
- спрощення ситуації або проблеми для того, щоб зробити її придатною для математичного аналізу;
- визначення обмежень і припущень, що стоять за будь-яким моделюванням і спрощеннями, виведеними з контексту;
- представлення ситуації в математичній формі із застосуванням доречних змінних, символів, діаграм і стандартних моделей;
- представлення проблеми різними способами, зокрема і її структурування відповідно до математичних понять і доречних припущень;
- з'ясування та пояснення зв'язку між контекстно специфічною мовою проблеми та символічною й формальною мовою, яка потрібна для математичного представлення відповідної проблеми;
- переклад проблеми на математичну мову або її представлення;
- розпізнавання тих аспектів проблеми, які відповідають уже відомим проблемам або математичним поняттям, фактам чи процедурам;
- використання технологій (таких як електронні таблиці або списки в графічних калькуляторах) для відображення математичних відношень, що виявляються у контекстній проблемі;
- створення впорядкованих послідовностей (покрокових) команд для розв'язування проблем.

** Ці види діяльності включені до переліку для того, щоб розробники тестових завдань готували завдання, які були б посильними для учнів / студентів, результати яких знаходяться на нижньому кінці шкали рівнів оволодіння математичною грамотністю.

Застосовувати

Словом *застосовувати* у визначенні математичної грамотності позначено здатність індивідуумів використовувати математичні поняття, факти, процедури та міркування для розв'язування проблем, що математично сформульовані у вигляді задач, з метою отримання математичних висновків. У процесі застосування математичних понять, фактів, процедур і міркувань для розв'язування задач індивід виконує математичні процедури, необхідні для отримання результатів і пошуку математичного розв'язку. Він працює над моделлю проблемної ситуації, установлює закономірності, визначає зв'язки між математичними сутностями та пропонує математичні обґрунтування. Якщо говорити конкретніше, то цей процес застосування математичних понять, фактів, процедур і міркувань включає такі дії, як:

- проведення простих розрахунків; **
- побудова простих висновків; **
- вибір відповідної стратегії з переліку; **
- розроблення та реалізація стратегій знаходження математичних розв'язків;
- використання математичних інструментів, зокрема й технології, для пошуку точних або наближених розв'язків;
- застосування математичних фактів, правил, алгоритмів і структур в процесі пошуку розв'язків;
- оперування числами, графічними та статистичними даними та інформацією, алгебраїчними виразами й рівняннями та геометричними образами;
- побудова математичних діаграм, графіків і побудов, а також вилучення з них математичної інформації;
- використання різних представлень і перемикання між ними в процесі пошуку розв'язків;
- побудова узагальнень за результатами застосування математичних процедур у процесі пошуку розв'язків;
- рефлексія математичних доведень, пояснення та обґрунтування математичних результатів;
- оцінювання значущості спостережуваних (або запропонованих) закономірностей і регулярностей у даних.

** Ці види діяльності включені до переліку для того, щоб розробники тестових завдань готували завдання, які були б посилюючими для учнів / студентів, результати яких знаходяться на нижньому кінці шкали рівнів оволодіння математичною грамотністю.

Інтерпретувати та оцінювати

Слово *інтерпретувати* (та оцінювати), що використано у визначенні математичної грамотності, стосується здатності індивідуумів проводити рефлексію математичних рішень, результатів або висновків та інтерпретувати їх у контексті проблеми реального життя, яка й спровокувала потребу використати математику. Це передбачає переклад математичних розв'язків або міркувань назад у контекст проблеми та визначення того, чи результати є розумними та чи мають вони сенс у контексті проблеми.

Якщо говорити конкретніше, то цей процес інтерпретації, застосування та оцінювання математичних результатів включає такі дії, як:

- інтерпретування інформації, представленої в графічній формі та/або на діаграмах; **
- оцінювання математичного результату з огляду на контекст; **
- пов'язування математичного результату із контекстом реального світу;
- оцінювання обґрунтованості математичного рішення в контексті реальної проблеми;
- розуміння того, як реальний світ впливає на результати розрахунків за математичною процедурою або моделлю, щоб у контексті вихідної проблеми вирішити, як результати мають бути скореговані або застосовані;
- пояснення того, чому математичний результат чи висновок має сенс або не має сенсу в заданому контексті проблеми;
- розуміння можливостей і обмежень математичних понять і математичних рішень;
- критичне бачення та визначення обмежень моделі, яка використовується для вирішення проблеми;
- використання математичного мислення та обчислювального мислення для прогнозування, надання доказів для аргументації, а також для тестування та порівняння запропонованих рішень.

** Ці види діяльності включені до переліку для того, щоб розробники тестових завдань готували завдання, які були б посилюючими для учнів / студентів, результати яких знаходяться на нижньому кінці шкали рівнів оволодіння математичною грамотністю.

ЗНАННЯ ЗМІСТУ

Розуміння математичного змісту, як і здатність застосовувати ці знання для розв'язування змістовних контекстних проблем, є важливими для самореалізації громадян у сучасному світі. Це означає, що для того, щоб математично міркувати, розв'язувати проблеми та інтерпретувати ситуації в особистісних, професійних, суспільних і наукових контекстах, люди повинні спиратися на певні математичні знання та уявлення.

Означені нижче змістові категорії, які використовувалися починаючи з PISA-2012, продовжують використовуватися й у PISA-2022 для відображення математичних явищ, які лежать в основі широких класів проблем, загальної структури математики та основних напрямів типових шкільних програм:

- зміни й залежності,
- простір і форма,
- кількість,
- невизначеність і дані.

Для цілей PISA-2022 було визначено чотири теми, яким має бути приділена особлива увага. Ці теми не є новими в межах змістових категорій математики, однак заслуговують на особливий акцент:

- явища зростання (зміни та залежності),
- геометрична апроксимація (простір і форма),
- комп'ютерне моделювання (кількість),
- умовне прийняття рішень (невизначеність і дані).

КОНТЕКСТИ

Важливим аспектом математичної грамотності є те, що математика застосовується для розв'язування проблем у контексті. Контекст – це фрагмент особистісного світу індивідуума, де відповідні проблеми актуалізовані. Вибір доцільних математичних стратегій і представлень часто залежить від контексту, якого стосується та чи та проблема. Для PISA важливим є використання широкого розмаїття контекстів.

Особистісний

Проблеми, які зараховують до категорії особистісного контексту, сфокусовані на індивідуальній діяльності окремого індивідуума, сім'ї чи групи однолітків. Особистісні контексти включають (але не обмежуються лише цим) ситуації приготування їжі, здійснення закупівель, проведення дозвілля (ігри), ситуації, пов'язані з піклуванням про здоров'я, особистим транспортом, ситуації, що стосуються занять спортом, подорожей, планування свого часу та особистих фінансів.

Професійний

Проблеми, які зараховують до категорії професійного контексту, зосереджені на світі професій. Завдання професійного контексту можуть стосуватися (але не обмежуватися цим) ситуацій проведення вимірювань, оцінки вартості й замовлення матеріалів для будівництва, нарахування заробітної платні й бухгалтерського обліку, контролю якості, планування й інвентаризації, проведення дизайнерських та архітектурних робіт, а також ситуацій прийняття рішень, пов'язаних із професійною діяльністю. Професійні контексти можуть стосуватися будь-якої категорії робочої сили (від некваліфікованих працівників до працівників найвищої кваліфікації), головне, щоб завдання PISA були зрозумілими для 15-річних учнів / студентів.

Соціальний

Проблеми, які зараховують до категорії соціального контексту, сфокусовані на певній спільноті, до якої належить особа (на місцевій, національній чи глобальній). Вони можуть стосуватися (але не обмежуватися цим) питань виборчої системи, громадського транспорту, урядування, державної політики, демографії, реклами, національної статистики та економіки. Хоча людина включена до всіх цих контекстів індивідуально, проте в конкретних ситуаціях, що стосуються категорії соціального контексту, акцент зроблений на громадських аспектах відповідних контекстів.

Науковий

Проблеми, які зараховують до категорії наукового контексту, пов'язані з необхідністю застосування математики до світу природи та питань і тем, пов'язаних із наукою та технікою. Конкретні контексти можуть стосуватися (але не обмежуватися цим) такого: погода або клімат, екологія, медицина, наука про космос, генетика, вимірювання та світ математики як він є. Завдання, що зосереджені на самій математиці як такій, тобто у яких усі елементи стосуються світу математики, також віднесені до наукового контексту.

НАВИЧКИ 21-ГО СТОЛІТТЯ

Нині в всьому світі спостерігається підвищений інтерес до того, що називають «компетентностями (уміннями) 21 століття», та до того, як ці компетентності (уміння) можуть бути актуалізовані в освітніх системах. Нещодавно ОЕСР була оприлюднила публікацію, що зосереджена на цих компетентностях (уміннях), і спонсорувала дослідницький Проект *«Майбутнє освіти й умінь: Освіта-2030»*. 25 країн були задіяні в цьому міжнародному дослідженні освітніх програм (курикулумів), зокрема й з огляду на актуалізованість у них відповідних компетентностей (умінь). Проект у центрі своєї уваги поставив питання того, яким може бути курикулум у майбутньому, і сконцентрувався передусім на математиці.

Ось деякі ключові компетентності (уміння) 21 століття:

- критичне мислення;
- креативність;
- дослідництво й допитливість;
- самодостатність, ініціативність і наполегливість;
- використання інформації;
- системне мислення;
- комунікативність;
- рефлексія.

Хоча розробники тестових завдань цілком визнають названі компетентності (уміння) 21 століття, проте завдання з математики для PISA-2022 не створювалися саме під ці компетентності (уміння).